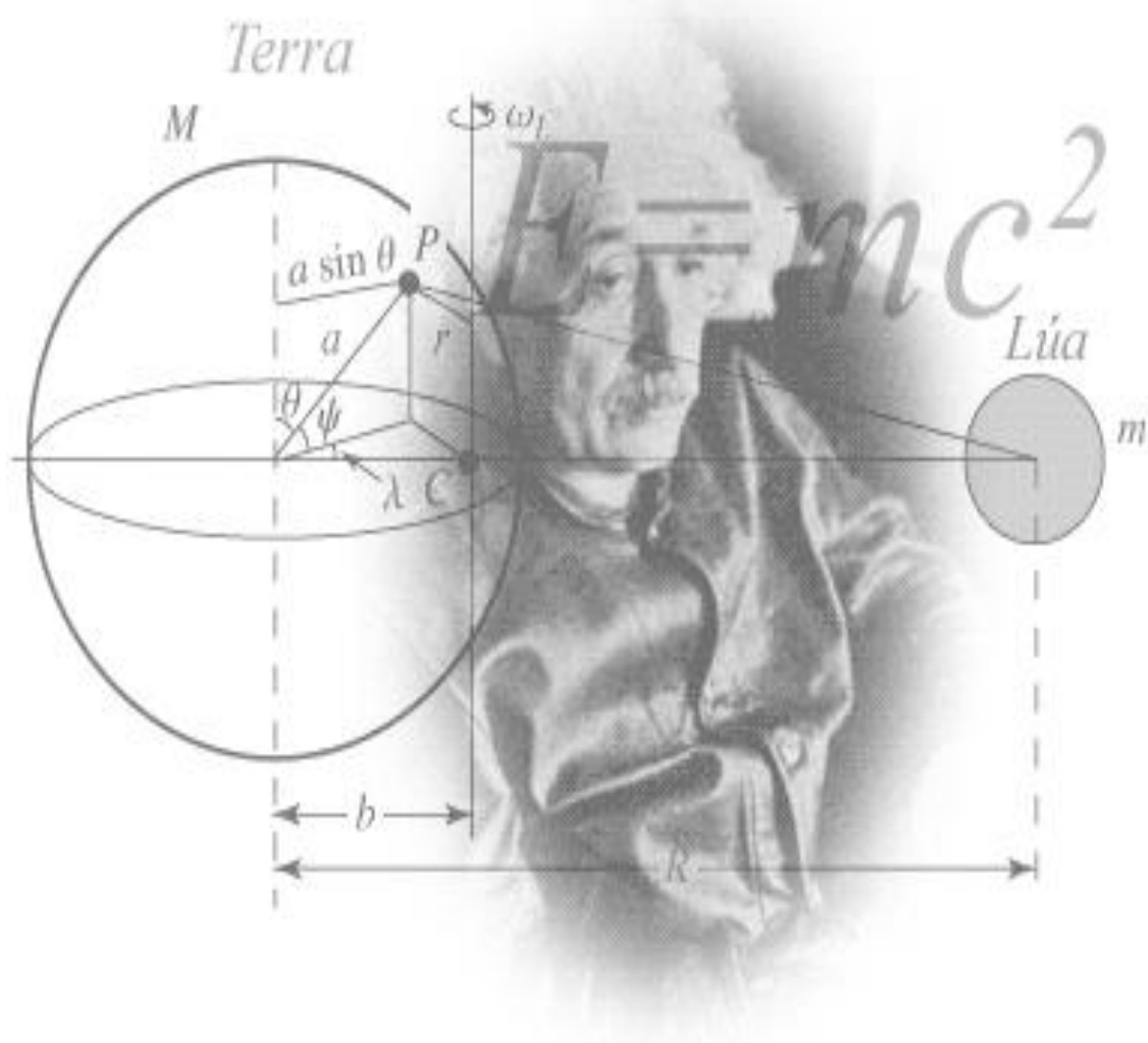


MÓDULO II

FÍSICA



JAVIER GEJO GARCÍA

ÍNDICE

TEMA I

La materia Pág. 2

TEMA II

Estática Pág. 27

TEMA III

Cinemática..... Pág. 80

TEMA IV

Dinámica..... Pág. 121

TEMA V

Dinámica II..... Pág. 157

TEMA VI

Fluidos..... Pág. 188

TEMA VII

Termodinámica Pág. 225

TEMA VIII

Óptica Pág. 254

TEMA IX

Movimiento ondulatorio..... Pág. 283

TEMA I

LA MATERIA

MATERIA: ESTADOS DE AGREGACIÓN Y COMPORTAMIENTO QUÍMICO



La verdad al cien por cien es tan rara como el alcohol al cien por cien.

SIGMUND FREUD

Introducción

La transformación de las sustancias forma parte de los conocimientos humanos más antiguos. Muchos pueblos consiguieron expansionarse y vencer a otras civilizaciones basándose en la capacidad de sus armas y herramientas metálicas. El motor de las culturas del cobre, del bronce y del hierro fue más la habilidad de los metalúrgicos que la fuerza de los guerreros.

Primero en Egipto y después en Grecia, los conocimientos químicos de tipo práctico alcanzaron un desarrollo notable. Precisamente el nombre de alquimia, y por tanto también el de química, podría provenir de «*Khemeia*» y éste de «*Kham*», que es el nombre que los egipcios daban a su país. Sin embargo, los conocimientos de tipo práctico de la antigüedad no cristalizaron en una verdadera ciencia química. Las preocupaciones de tipo teórico sobre la constitución y las propiedades de la materia se integraron en el corpus filosófico de los griegos o en los rituales religiosos de la alquimia egipcia.

Los griegos de la época clásica eran expertos en el trabajo de los metales, tejidos, cerámica, aceites y vinos. En la misma época, la mayoría de los pueblos bárbaros europeos sustituyeron las herramientas líticas por las de bronce y, a principios del último milenio a.C., por las provenientes del trabajo del hierro.

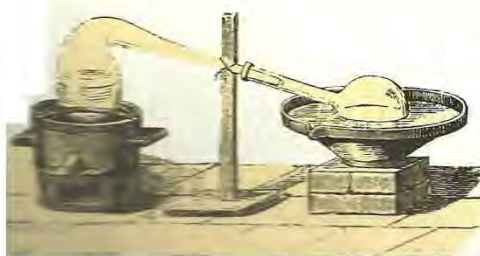
En la época romana, los avances químicos se refugiaron en la mejora de las actividades artesanales y en la metalurgia. Se reprocha comúnmente a la intelectualidad romana el escaso interés por la ciencia pura o la tecnología.

En la Edad Media se reencontraron los conocimientos del antiguo Egipto recuperados por los árabes y los principios griegos refundidos por Galeno en una doctrina hermética que se autoperpetuó sin abrirse a ninguna revisión experimental.

No fue hasta el siglo XVIII que Antoine de Lavoisier acabó definitivamente con la teoría del flogisto, puso las bases de un tratamiento cuantitativo de la transformación de las sustancias, depuró la alquimia de sus tendencias mágicas y religiosas y obtuvo una nueva ciencia moderna y racional: la química.

A partir de aquí, Dalton, Priestley, Avogadro, Liebig, Gay-Lussac, Kekulé, Wöhler, Van't Hoff, Mendeleiev y una larguísima lista de otros nombres ilustres llevaron la química en un periodo de dos siglos al desarrollo más rápido y espectacular que ninguna ciencia haya conocido.

Actualmente, aparecen cada día centenares de compuestos nuevos y se encuentran otras utilidades para los que ya se conocían. La capacidad de transformación de la materia ha creado plásticos conductores de la electricidad, tejidos sintéticos, aleaciones duras y ligeras, medicamentos nuevos y más eficaces, pilas y baterías eléctricas, productos para el hogar y para la agricultura, materiales superconductores, pinturas, perfumes, jabones, vidrios, películas fotográficas, pantallas de televisión, barnices, productos cosméticos, cerámicas, filtros depuradores, etc. También ha producido sustancias peligrosas, explosivos y armas químicas, contaminación ambiental y enfermedades profesionales. Quizás el gran reto de la humanidad es llegar a tiempo de administrar racionalmente lo que racionalmente ha conquistado.



1. La materia y las leyes fundamentales de la química

1.1. Sustancias puras, elementos y compuestos

Un sistema se clasifica como **homogéneo** o **heterogéneo** según presente o no las mismas propiedades en todos sus puntos. Por ejemplo, el agua, el vino, la sal de mesa o el plomo son homogéneos porque en ellos no se pueden apreciar zonas que sean diferentes las unas de las otras. En cambio, el granito, la pólvora, la madera o un trozo de carne son heterogéneos porque se pueden apreciar zonas con una composición y propiedades diferentes unas de las otras.

Naturalmente, hay que fijar un nivel de observación para decidir sobre la homogeneidad. Se ha decidido que un sistema es homogéneo, si lo es cuando se observa a través de un microscopio de luz visible.

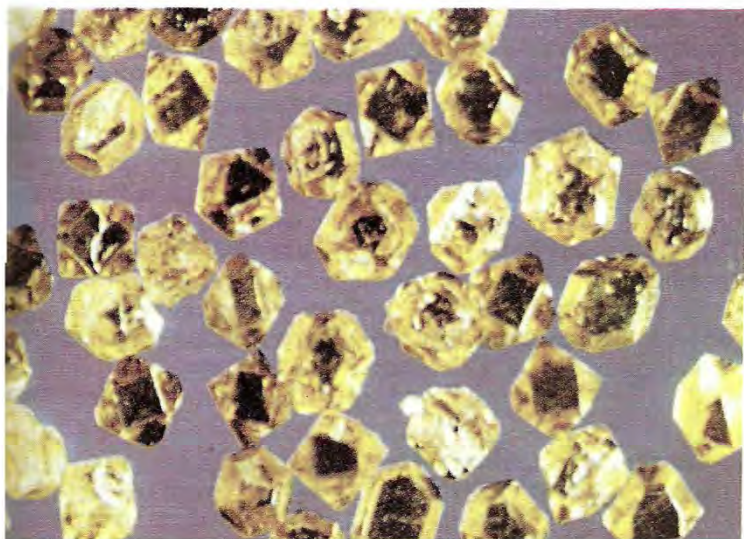


Fig. 1.1. El grafito y el diamante son dos manifestaciones diferentes del mismo elemento: carbono. En la fotografía, diamantes artificiales obtenidos a partir del grafito mediante elevada presión y temperatura.

Tanto si los sistemas son heterogéneos como si son homogéneos, puede ser que estén formados por una o por más de una sustancia. Si es así, se podrán separar mediante métodos físicos como la evaporación, la filtración, la cristalización, la aplicación de campos eléctricos, etc. Por ejemplo, una disolución de agua con sal es homogénea pero si la calentamos se puede evaporar el agua, quedando la sal como residuo. En cambio, hay sistemas heterogéneos que están formados por una única sustancia, por ejemplo, agua con hielo o una mezcla de azufre monoclínico y rómbico.

Una **sustancia pura** o una **especie química** es un sistema homogéneo que no se puede separar en diversos componentes mediante métodos físicos (métodos que no implican reacciones). Por ejemplo, el oro, el cloruro sódico, la urea, el azufre o la glicerina.

Entre las sustancias puras, las que tienen todos sus átomos iguales (con la salvedad de los isótopos), se denominan **elementos químicos**. Son sustancias que no se pueden descomponer en otras más sencillas ni con procedimientos físicos ni químicos. Por ejemplo, el oro, la plata, el plo-

() Hydrogen 1	() Strontian 86
() Arsenic 75	() Barium 137
() Chlorine 35	() Iodine 127
() Oxygen 16	() Zinc 65
() Phosphorus 31	() Copper 63
() Sulphur 32	() Lead 207
() Magnesia 24	() Silver 108
() Lime 40	() Gold 197
() Soda 23	() Platinum 195
() Potash 39	() Mercury 200

Fig. 1.2. Símbolos químicos propuestos por Dalton para los elementos.

mo o el oxígeno. Los elementos se representan, a partir de su nombre o de su nombre latino, por la inicial y otra letra, si es conveniente para evitar confusiones, siguiendo la proposición que hizo el sueco **Jöns Jakob Berzelius** en el año 1815.

En cambio, hay otras sustancias puras llamadas **compuestos químicos**, que están formadas por átomos de dos o más clases. A partir de los compuestos se pueden separar dos o más sustancias más sencillas. Por ejemplo, el agua, el amoníaco, la glucosa o el ácido acético son compuestos químicos.

1.2. Antiguas leyes ponderales y volumétricas fundamentales

Se denominan leyes ponderales y leyes volumétricas porque establecen relaciones entre los pesos o entre los volúmenes de las sustancias que intervienen en una reacción.

Para comprender la importancia de estas leyes, hay que retrotraerse a una época en que no existían las fórmulas de los compuestos y en la que la química avanzaba penosamente buscando un camino que la convirtiera en ciencia cuantitativa y con capacidad de predicción.

■ Ley de conservación de la masa

Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794), aunque comenzó estudios de derecho, se convirtió en el principal impulsor de la química moderna. Demostró la composición del agua, del aire y de diversas sustancias, contribuyó a la nomenclatura química racional y estudió la respiración de los seres vivos. En 1789, en su «*Traité élémentaire de chimie*», desarrollaba un principio de conservación de la materia que se puede resumir como:

La masa total de un sistema cerrado (sin intercambios con el exterior) no varía, aunque haya reacciones entre las sustancias contenidas en él.

Fig. 1.3. Lavoisier con su esposa. Espíritu inteligente y simpatizante de la Revolución francesa, fue guillotinado en una locura de la historia.



O de una manera más concisa, como:

La materia no se crea ni se destruye, sólo se transforma.

Si los reactivos se transforman del todo en productos, también se puede asegurar que la masa de aquéllos es igual a la de éstos.

Esta ley no es absolutamente exacta. **Albert Einstein** demostró que la aparición o desaparición de energía iba acompañada de la aparición o desaparición, respectivamente, de una cierta masa según una expresión que se ha hecho famosa:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \quad [1.1]$$

ΔE = variación de energía

Δm = variación de masa

c = velocidad de la luz

A la luz de esta teoría, hay que hablar más concretamente de un principio de conservación de la masa-energía.

Sin embargo, las energías que participan en las reacciones químicas ordinarias son suficientemente pequeñas para que no haga falta apreciar la desaparición o aparición de masa. Por ejemplo, la energía necesaria para elevar diez millones de toneladas hasta 1 km de altura se podría obtener de la desintegración de un solo gramo de materia.

■ Ley de las proporciones definidas o de la composición constante

Fue enunciada por el químico francés **Louis Joseph Proust** (1754-1826), que acabó imponiendo su criterio sobre el de Claude Louis Berthollet, con quien mantuvo una viva polémica.

Cuando dos o más elementos se combinan para formar un compuesto lo hacen siempre en las mismas proporciones.

Por ejemplo, cuando se combinan azufre y aluminio para formar sulfuro de aluminio, sus masas están siempre en la proporción 53,963 g de Al y 96,192 g de S. O, si se quiere, el compuesto formado contiene siempre un 35,94 % de Al y un 64,06 % de S.

■ Ley de las proporciones múltiples

La ley de las proporciones definidas no implica que la combinación de dos o más elementos tenga que dar siempre un único compuesto. La combinación de los mismos elementos puede originar compuestos diferentes. **John Dalton** encontró una relación entre las cantidades de un mismo elemento que intervienen en la formación de compuestos diferentes.

Las cantidades de un mismo elemento que se combinan con una cantidad fija de otro elemento están siempre en una relación numérica sencilla.

Por ejemplo, el hierro y el oxígeno se combinan para formar dos compuestos diferentes. En uno de ellos, la composición es 77,73 % de Fe y 22,27 % de O. En el otro, la composición es 69,94 % de Fe y 30,06 % de O. Si se calculan los gramos de Fe, por 1 gramo de oxígeno en cada compuesto:

$$\text{En el primer compuesto: } \frac{77,73 \text{ g de Fe}}{22,27 \text{ g de O}} = 3,4903 \frac{\text{g de Fe}}{\text{g de O}}$$

$$\text{En el segundo compuesto: } \frac{69,94 \text{ g de Fe}}{30,06 \text{ g de O}} = 2,3267 \frac{\text{g de Fe}}{\text{g de O}}$$

Estas dos proporciones son las que la ley afirma que se encuentran en una relación numérica sencilla. En efecto:

$$\frac{3,4903}{2,3267} = 1,5 = \frac{3}{2}$$

Esto hoy en día no nos extraña demasiado porque identificamos rápidamente ambos óxidos de hierro como el FeO y el Fe₂O₃. La relación sencilla de 3:2 predicha por la ley deriva de que el hierro actúa con valencias 2 y 3 en estos compuestos.

■ Ley de las proporciones recíprocas o ley de los pesos de combinación

Esta ley fue establecida por **Benjamin Jeremias Richter** (1762-1807) antes que las leyes de Proust y de Dalton.

Las masas de diferentes elementos que se combinan con la misma masa de otro determinado elemento son iguales (o son múltiplos o submúltiplos sencillos) a las masas con que aquellos elementos se combinan entre sí.

Esto hizo pensar en fijar un elemento de referencia y adjudicar a los otros elementos un *peso de combinación* o *peso equivalente* igual a la masa con que cada uno de ellos se combinaba con aquel elemento de referencia.

Primero se pensó en el oxígeno como elemento de referencia, ya que se combina con la mayoría de los demás elementos. Pero, más tarde, se escogió el hidrógeno quedando definido:

Peso equivalente de un elemento es la masa de este elemento que se combina con 1,008 partes en peso de hidrógeno o que las reemplaza en alguna combinación química.

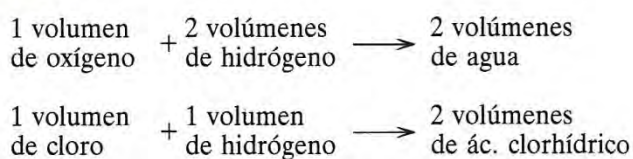
■ Ley de los volúmenes de combinación

Joseph Louis Gay-Lussac, en sus estudios de reacciones en las que tanto reactivos como productos eran sustancias gaseosas, se dio cuenta de que:

Los volúmenes de los gases que intervienen en una reacción química están en una relación sencilla de números enteros.

John Dalton fue maestro y observador meteorológico, además del creador de la teoría atómica, que permitía explicar las propiedades de los gases, y de la ley de las proporciones múltiples de las combinaciones químicas, ley que lleva también su nombre. En 1801 enunció la ley de la aditividad de las presiones parciales. También es suya una determinación de las presiones de vapor del agua a diferentes temperaturas. Dalton padecía una enfermedad hereditaria que le impedía diferenciar con claridad algunos colores. Hizo sobre ello un estudio tan exhaustivo que desde entonces la discromatopsia se conoce como enfermedad de Dalton o daltonismo.

Por ejemplo, tomando como medida un cierto volumen:



1.3. Teoría atómica de Dalton

Las leyes ponderales anteriores que relacionan las masas con que los elementos se combinan entre sí son leyes de carácter experimental, sin ninguna teoría que las fundamente. **John Dalton** (1766-1844) propuso, en 1803, una teoría sobre la constitución de la materia que justificaba aquellas leyes y abrió camino a la concepción moderna sobre la constitución de las sustancias. Se puede resumir como:

1. La materia está formada por unas unidades muy pequeñas, indivisibles e inalterables, que denominó **átomos**.
2. Los átomos de un elemento son todos iguales, tienen la misma masa y las mismas propiedades.
3. Los átomos de elementos distintos difieren en masa y propiedades.
4. Los compuestos se forman por unión de átomos de los elementos correspondientes, en una relación numérica constante y sencilla.
5. Los «átomos» de un compuesto son también idénticos en masa y propiedades.

Es necesario hacer tres puntualizaciones a esta teoría. La primera: lo que Dalton denominaba átomos de los compuestos era, obviamente, lo que, hoy en día, se conoce como moléculas. La segunda: los átomos no son tan indivisibles e inalterables como él creía. Y la tercera: en un mismo elemento, hay átomos que difieren en la masa (**isótopos**).

1.4. Hipótesis molecular de Avogadro

La teoría atómica de Dalton no podía explicar la ley de Gay-Lussac sobre los volúmenes de combinación.

Según la teoría de Dalton, al reaccionar n átomos del elemento cloro con n átomos del elemento hidrógeno, se tendrían que obtener n átomos del compuesto cloruro de hidrógeno. Por tanto, la reacción de 1 volumen de cloro y 1 volumen de hidrógeno debería proporcionar 1 volumen de cloruro de hidrógeno en lugar de los 2 volúmenes que se obtienen experimentalmente.

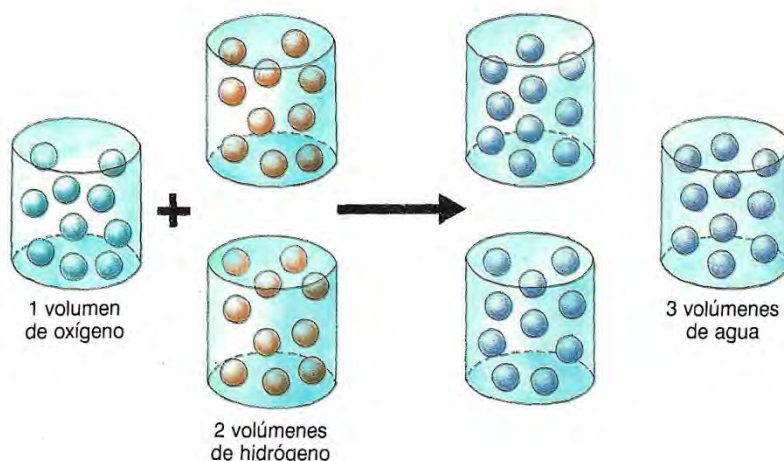
La explicación la proporciono de una manera sencilla y elegante el conde italiano **Amadeo Avogadro** (1776-1856). Según Avogadro:

Las últimas partículas que integran los gases no son los átomos sino agrupaciones de átomos con una composición fija, denominadas moléculas.



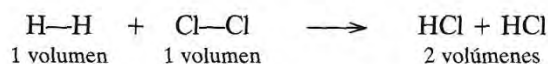
Fig. 1.4. John Dalton, creador de la teoría atómica.

Fig. 1.5. Según la teoría atómica de Dalton, 1 volumen de átomos de oxígeno y 2 volúmenes de átomos de hidrógeno tendrían que producir 3 volúmenes de agua.



En volúmenes iguales, medidos en las mismas condiciones de presión y temperatura, todos los gases tienen el mismo número de moléculas.

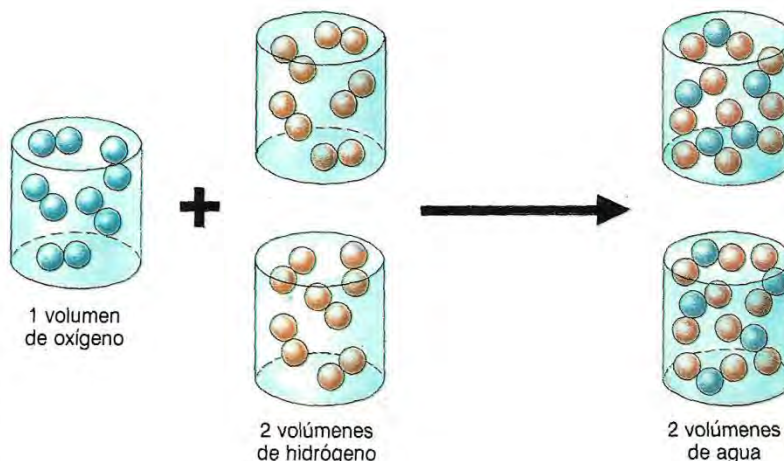
La hipótesis de Avogadro comporta que las moléculas de los elementos gaseosos son diatómicas (H_2 , O_2 , N_2 , F_2 , Cl_2) y no monoatómicas (H , O , N , F , Cl), como creía Dalton, a excepción de los gases nobles. Como el volumen ocupado por los gases, en igualdad de condiciones de presión y temperatura, depende del número de moléculas, las reacciones entre ellos cumplen la ley de los volúmenes de combinación.



Las moléculas son las agrupaciones más pequeñas posibles de átomos que todavía conservan las propiedades de las sustancias. Por ejemplo, una molécula de agua es propiamente agua, pero un átomo de hidrógeno o un átomo de oxígeno ya no lo son.

Además de las moléculas diatómicas, existen moléculas *monoatómicas* (gases nobles y metales en estado de vapor), *triatómicas* (H_2O , O_3 , etc.), *tetraatómicas* (P_4 , NH_3 , PCl_3 , etc.), etc., hasta llegar a mo-

Fig. 1.6. Según Avogadro, 1 volumen de moléculas de oxígeno y 2 volúmenes de moléculas de hidrógeno producen 2 volúmenes de moléculas de agua.



l culas con miles de átomos como las proteínas, los ácidos nucleicos o algunos polímeros s nteticos.

Desde otro punto de vista, las moléculas se pueden clasificar en *homooat micas* y *heterooat micas* según est n formadas por átomos iguales o diferentes. En el primer caso, se trata de moléculas de *elementos* (por ejemplo, He, O₂, O₃, P₄, S₈). En el segundo caso se trata de moléculas de *compuestos* (por ejemplo, H₂O, NH₃, H₂SO₄).

Las *sustancias puras* están formadas por una sola clase de moléculas.

2. Masa atómica y molecular. Mol. Fórmulas y composición

2.1. Masas atómicas y moleculares

La masa de un átomo es extraordinariamente pequeña al igual que su tamaño. Por ejemplo, el radio de un átomo de hidrógeno es de unos 10^{-10} m y su masa $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Para evitar estas cifras tan pequeñas se decidió tomar la masa de un átomo como unidad y expresar el resto como múltiplos suyos. Después de diversas tentativas, en 1961 la Comisión Internacional de Pesos y Medidas fij :

- **Unidad de masa atómica, uma**, como la doceava parte de la masa del ¹²C, el isótopo más abundante del carbono, resultando ser igual a $1,6605655 \cdot 10^{-27}$ kg.

A partir de entonces:

- **Masa atómica de un elemento** es la masa de un elemento expresada en unidades de masa atómica.
- **Masa molecular** es la masa de una molécula expresada en unidades de masa atómica. Obviamente, es igual a la suma de las masas de los átomos que la integran.

La IUPAC recomienda actualmente utilizar el nombre de **masa atómica relativa** y **masa molecular relativa** para expresar la masa en función de la doceava parte de la masa del ¹²C. Expresada de esta manera, la masa atómica es una cifra adimensional; se puede decir, por ejemplo, que la masa relativa del cloro es 35,453. En el tema 3, se insistir  sobre la masa atómica y su relación con la existencia de diversos isótopos de los elementos.

2.2. Concepto de mol. Número de Avogadro

De la misma manera que algunas cosas se cuentan a *docenas*, a *millares* o a *millones*, es muy útil para los químicos contar en *moles* las entidades como átomos, moléculas o iones que se presentan en unas cantidades enormes. El mol no es más que una cifra y se puede hablar de 2 moles de átomos de Fe o de 2 moles de iones de Cl⁻ de la misma manera que se habla de 3 docenas de huevos o de 3 docenas de naranjas.

Desde 1971, está el mol definido como:

La cantidad de una sustancia que contiene un número de entidades elementales igual al número de átomos que hay en 0,012 kg de ^{12}C .

Se debe indicar siempre de qué unidades elementales se trata. O sea, es necesario precisar si se trata de moles de átomos, de moléculas, de iones, de electrones, etcétera.

El número de átomos que hay en 0,012 kg de ^{12}C y, por tanto, el número de partículas que hay en 1 mol se conoce como **número de Avogadro, N_A** . El valor aceptado actualmente es:

$$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23}$$

El valor del número de Avogadro se ha determinado experimentalmente sucesivas veces, cada vez con mayor precisión. El primer cálculo de esta cifra lo realizó en 1875 el inglés **William Strutt Raileigh** a partir de la dispersión óptica de disoluciones coloidales. Posteriormente, se han hecho determinaciones comparando medidas de radiactividad con el volumen de helio desprendido por sustancias radiactivas; también a partir de la densidad y de distancias entre iones de un cristal calculadas por difracción de rayos X; otras determinaciones se basan en la cantidad de electricidad necesaria para la electrólisis de 1 mol de iones monovalentes; otras, en el estudio del movimiento browniano, en la conductividad de disoluciones y de gases, etcétera.

De la propia definición de mol se desprende que:

La masa en gramos de 1 mol de cualquier sustancia coincide con la masa de una molécula de esta sustancia expresada en *uma* (o con la masa de un átomo igualmente en *uma* si es una sustancia que no forma moléculas).

Ejemplo:

La masa de 1 mol de metano, CH_4 , es 16,04 gramos.
La masa de 1 molécula de metano es 16,04 uma.

La masa de 1 mol de plomo, Pb, es 207,19 gramos.
La masa de 1 átomo de plomo es 207,19 uma.

Volumen molar es el volumen que ocupa un mol de cualquier gas. En el caso de un gas ideal, este volumen, medido en condiciones normales o estándares (0°C y 1 atm), equivale a 22,414 litros y se denomina **volumen molar normal**.

Precisamente el número de Avogadro había sido definido como el número de moléculas presentes en un volumen igual a 22,4 l de cualquier gas medido en condiciones normales.

El mol ha llegado a ser, en química, la medida de cantidad por excelencia y prácticamente todas las magnitudes (capacidades caloríficas, energías de formación, etc.) están referidas a él.

1 mol de	contiene	masa
H ₂	$6,022 \cdot 10^{23}$ moléculas de H ₂	2,015 g
O ₂	$6,022 \cdot 10^{23}$ moléculas de O ₂	31,998 g
N ₂	$6,022 \cdot 10^{23}$ moléculas de N ₂	28,026 g
H ₂ O	$6,022 \cdot 10^{23}$ moléculas de H ₂ O	18,004 g
Ne	$6,022 \cdot 10^{23}$ moléculas de Ne	20,183 g
Fe	$6,022 \cdot 10^{23}$ átomos de Fe	55,847 g
NaCl	$6,022 \cdot 10^{23}$ iones Na ⁺ y $6,022 \cdot 10^{23}$ iones Cl ⁻	58,447 g

Tabla 1.1. El mol no es una medida de la masa, sino del número de partículas.

2.3. Fórmulas

Del mismo modo que los átomos de los elementos se representan por sus símbolos, las asociaciones de átomos se representan por **fórmulas** que se forman acompañando los símbolos atómicos de los átomos constituyentes con un subíndice numérico que indica la proporción en que están presentes.

■ Fórmulas empíricas y moleculares

Las **fórmulas empíricas** representan la relación entre los átomos constituyentes, sin que ello suponga que exista una molécula que corresponda a la fórmula. Por ejemplo:

- NaCl indica que en un cristal de cloruro sódico los iones Na⁺ y los Cl⁻ se encuentran en la proporción 1:1.
- C₆H₁₀O₅ es la fórmula empírica de la amilosa, una variedad de almidón. Sólo indica las proporciones en que se encuentran los tres elementos constitutivos, pero la molécula puede contener más de dos mil veces la fórmula empírica.

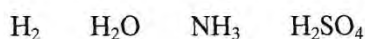
Cuando una fórmula coincide con la existencia de una molécula con el número indicado de átomos, se dice que se trata de una **fórmula molecular**. Por ejemplo:

- H₂O es una fórmula molecular porque realmente existen moléculas formadas por 1 átomo de oxígeno y 2 de hidrógeno.
- H₂O₂, HCl, CH₃CH₂OH son también fórmulas moleculares.

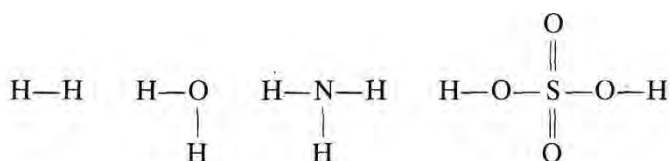
■ Fórmulas desarrolladas, semidesarrolladas y no desarrolladas

Se aplica el calificativo de **desarrolladas** a aquellas fórmulas en las que se indica cuáles son las uniones entre los átomos e incluso cómo están distribuidos geoméricamente.

Ejemplos:



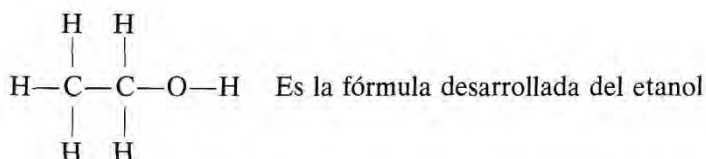
Son fórmulas no desarrolladas. Sólo indican las proporciones entre los átomos.



Son fórmulas desarrolladas que indican cómo están unidos los átomos.

En muchos casos, la fórmula se escribe de una manera semidesarrollada, de manera que el lector puede comprender la estructura de la molécula sin que ésta esté explicitada detalladamente.

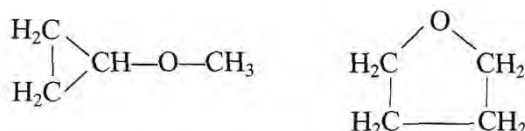
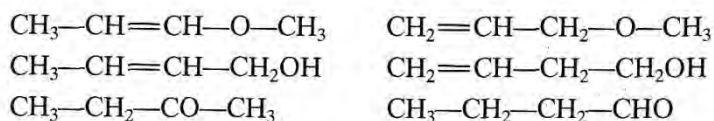
Ejemplo:



$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ Es la fórmula semidesarrollada del etanol

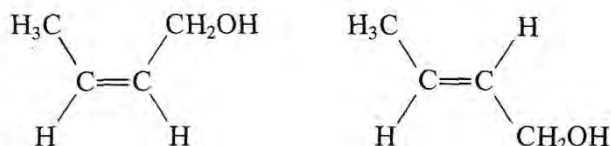
Esta cuestión llega a ser esencial en química orgánica donde la abundancia de compuestos con composición idéntica pero diferente organización de los átomos hace prácticamente inútiles las fórmulas que no estén, cuando menos, semidesarrolladas.

Ejemplo:



Son todos ellos compuestos que tienen la misma fórmula no desarrollada: $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}$. ¡Y todavía hay más!

Las fórmulas semidesarrolladas pueden también esconder más de un compuesto. Por ejemplo, bajo la segunda de las fórmulas anteriores se esconden dos compuestos diferentes:



Los compuestos que tienen la misma composición pero difieren en la ordenación de sus átomos se denominan **isómeros**. La cuestión de la isomería tiene una importancia capital en muchos campos de la química y será tratada ampliamente en el caso de los compuestos orgánicos.

2.4. Fórmulas y composición centesimal

Como una fórmula expresa la composición tanto cuantitativa como cualitativa de una sustancia, resulta bastante sencillo, a partir de ella, encontrar la composición en tanto por ciento de cada elemento y viceversa.

■ Cálculo de la composición centesimal de una sustancia a partir de su fórmula

1. Calcular la masa molecular de la sustancia a partir de las masas de los átomos que la integran.
2. Multiplicar la masa de cada átomo por el número de veces que está presente en la fórmula.
3. Dividir las cifras anteriores por la masa molecular y multiplicar por 100 si se quiere el resultado expresado en porcentaje.

Ejercicio 1.1

Calcular la composición centesimal del carbonato sódico, Na_2CO_3 .

$m_{\text{Na}} = 22,9898$; $m_{\text{C}} = 12,0112$; $m_{\text{O}} = 15,9994$.

Solución:

La masa molecular del Na_2CO_3 es:

$$2 (22,9898) + 12,0112 + 3 (15,9994) = 105,9890$$

Los porcentajes de cada elemento serán:

$$\% \text{ de Na} = \frac{2 \cdot 22,9898}{105,9890} \cdot 100 = 43,38 \%$$

$$\% \text{ de C} = \frac{12,0112}{105,9890} \cdot 100 = 11,33 \%$$

$$\% \text{ de O} = \frac{3 \cdot 15,9994}{105,9890} \cdot 100 = 45,29 \%$$

Porcentajes que, naturalmente, deben sumar cien:

$$43,38 + 11,33 + 45,29 = 100$$

■ Cálculo de la fórmula a partir de la composición centesimal

1. Obtener el número relativo de átomos de cada elemento, dividiendo sus porcentajes por las respectivas masas atómicas.
2. Dividir estos números relativos por el más pequeño de todos ellos.
3. Ajustar los números obtenidos en el punto anterior a los que correspondan a la masa molecular, si ésta se conoce, aunque sea aproximadamente.

Ejercicio 1.2

Un compuesto contiene 2,06 % de H, 65,25 % de O y 32,69 % de S. Su masa molecular es aproximadamente de 98 uma. Calcular su fórmula. $m_H = 1,00797$; $m_O = 15,9994$; $m_S = 32,064$.

Solución:

$$\text{Número relativo de átomos de H} = \frac{2,06}{1,00797} = 2,0437$$

$$\text{Número relativo de átomos de O} = \frac{65,25}{15,9994} = 4,0783$$

$$\text{Número relativo de átomos de S} = \frac{32,69}{32,064} = 1,0195$$

Para convertir estos números en números naturales se dividen todos por el más pequeño:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Número de átomos de H} = \frac{2,0437}{1,0195} \approx 2 \\ \text{Número de átomos de O} = \frac{4,0783}{1,0195} \approx 4 \\ \text{Número de átomos de S} = \frac{1,0195}{1,0195} = 1 \end{array} \right\} \text{ Por tanto, la fórmula sería: H}_2\text{SO}_4$$

Calculando la masa de la fórmula anterior resulta 98,0775 uma que concuerda con la que se facilita en el enunciado. Por tanto, la fórmula encontrada coincide con la fórmula molecular.

Ejercicio 1.3

Un ácido orgánico está formado por un 54,53 % de C, un 9,15 % de H y un 36,32 % de O. Su masa molecular es igual a 88,1072 uma. Calcular su fórmula. $m_C = 12,0112$; $m_H = 1,00797$; $m_O = 15,9994$.

Solución:

$$\text{Número relativo de átomos de H} = \frac{9,15}{1,00797} = 9,0777$$

$$\text{Número relativo de átomos de O} = \frac{36,32}{15,9994} = 2,2701$$

$$\text{Número relativo de átomos de C} = \frac{54,53}{12,0112} = 4,5150$$

Dividiendo todos estos números por el más pequeño:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Número de átomos de H} = \frac{9,0777}{2,2701} \approx 4 \\ \text{Número de átomos de O} = \frac{2,2701}{2,2701} = 1 \\ \text{Número de átomos de C} = \frac{4,5150}{2,2701} \approx 2 \end{array} \right\} \text{ Por tanto, la fórmula sería: } \text{C}_2\text{H}_4\text{O}$$

La masa molecular que corresponde a la fórmula $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}$ es 44,0536, que es justo la mitad de la citada en el enunciado. Por tanto, la fórmula molecular es: $\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_2$.

2.5. Determinación de masas atómicas

El método más utilizado y fiable para la determinación de masas atómicas consiste en la espectrografía de masas.

El **espectrógrafo de masas** es un aparato capaz de separar partículas que tengan la misma carga eléctrica pero diferente masa. Está basado en que los campos magnéticos perpendiculares a la dirección del movimiento de las partículas cargadas, las obligan a describir trayectorias circulares.

Los iones positivos de la sustancia a analizar se forman en un tubo de descarga de rayos catódicos (electrones). Se aceleran con diferencias de potencial entre unos 500 y unos 2 000 voltios, se hacen pasar por unos pequeños orificios para producir un rayo estrecho y, mediante un campo eléctrico y unas rendijas selectoras, se conducen hacia una zona donde hay un campo magnético perpendicular a su trayectoria. La trayectoria circular que describen mientras están en este campo magnético tiene un radio que depende de la masa de las partículas, ya que la fuerza centrípeta que ejerce el campo es igual para todas las que tengan la misma carga. Esta fuerza centrípeta, F_c , y la fuerza magnética, F_B , son:

$$F_c = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad [1.2]$$

m = masa de la partícula r = radio de la trayectoria
 v = velocidad de la partícula

$$F_B = B \cdot q \cdot v \quad [1.3]$$

q = carga de la partícula B = campo magnético

Igualando las expresiones anteriores, se deduce:

$$r = \frac{v \cdot m}{B \cdot q} \quad [1.4]$$

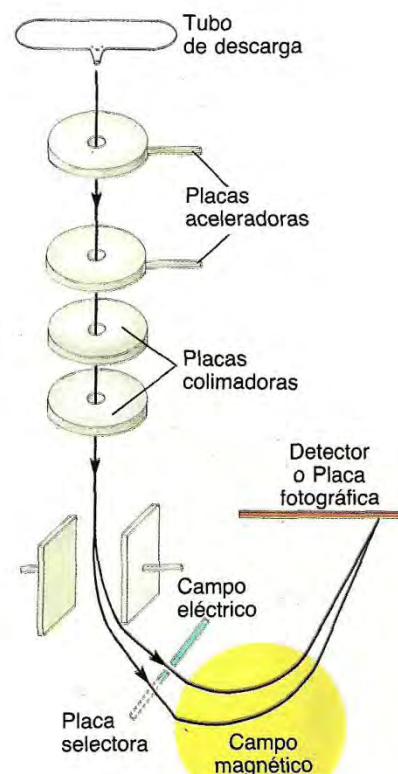


Fig. 1.7. Espectrógrafo de masas.

El radio de la trayectoria es proporcional a la masa del ion. Cuanto mayor sea la masa, mayor será el radio de la trayectoria circular. Comparando las desviaciones sufridas por partículas de masa desconocida con las que sufren otras partículas de masa conocida, tomadas como referencia, se puede calcular la masa de las primeras.

También se puede hacer la misma deducción por comparación de los voltajes necesarios para «desviar», hasta un mismo punto mediante un campo eléctrico, los iones que han descrito trayectorias diferentes bajo la acción del campo magnético.

Algunos métodos antiguos que sirvieron para la deducción de masas atómicas antes de desarrollarse la espectrografía de masas son:

El **método de Cannizaro** que partía de la suposición de que en una serie amplia de compuestos que contuvieran un cierto elemento, alguno de ellos tendría que contenerlo una sola vez por molécula. Por tanto, encontrando la masa de este elemento contenida en un mol de cada compuesto y escogiendo la menor de ellas, se obtendría la masa atómica buscada.

La **Ley de Dulong y Petit** según la cual el producto de la masa molar de un elemento por su calor específico era aproximadamente constante e igual a $25 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$.

El método del **peso equivalente** que calculaba la masa atómica como un múltiplo entero del peso equivalente.

El **método del isomorfismo** que considera que los compuestos isomorfos tienen la misma composición química.

Hoy en día, estos métodos tienen un interés meramente histórico.

2.6. Determinación de masas moleculares

El conocimiento de la masa molecular es siempre imprescindible para conocer la fórmula molecular de una sustancia. Son múltiples las maneras de calcularla pero la **espectrometría de masas** constituye actualmente la manera más precisa de determinarla. En este caso, son abundantes las fracturas moleculares en el momento de la ionización y, por tanto, de las posibles masas moleculares siempre se debe escoger la mayor que corresponderá a la molécula íntegra.

Entre los métodos tradicionales aplicables a gases, se debe citar:

a) El **método de las masas relativas**. En volúmenes iguales de dos gases, existirá el mismo número de moléculas, según el principio de Avogadro. Por tanto, si un volumen V de un gas A pesa n veces más que el mismo volumen de un gas B será porque una molécula de A pesa n veces más que una molécula de B. Si una de las masas moleculares es conocida, se podrá calcular la otra con facilidad:

$$\frac{\text{Masa de V litros de A}}{\text{Masa de V litros de B}} = \frac{\text{Masa molecular de A}}{\text{Masa molecular de B}} \quad [1.5]$$

b) El **método del volumen molar**. Se basa en que 1 mol de cualquier sustancia gaseosa ocupa un volumen de 22,4 litros en condiciones nor-

males (0 °C y 1 atm). Para calcular la masa molecular, se pesan 22,4 litros de la sustancia en cuestión, en condiciones normales.

c) Determinaciones a partir de la **ecuación de estado** de los gases. Si se conoce la presión, la temperatura, el volumen y la masa de un gas (o la densidad en lugar de estas dos últimas magnitudes) se puede determinar su masa molecular MM.

$$P \cdot V = \frac{m}{MM} \cdot R \cdot T \quad [1.6]$$

$$MM = \frac{d \cdot R \cdot T}{P} \quad [1.7]$$

donde $d = \frac{m}{V}$

Otros métodos son aplicables a sustancias en disolución, como los que derivan de los valores experimentales de las propiedades coligativas. Estas propiedades serán estudiadas en el apartado 1.5.3.

3. Estados de agregación de la materia

3.1. Estados de la materia

A temperatura común, la materia está constituida directamente por átomos o por moléculas que, a su vez, están formadas por átomos.

Las *fuerzas de cohesión* que tienden a mantener unidos los átomos o moléculas integrantes de una sustancia responden a los diferentes tipos de enlaces químicos. En el tema 4, se procurará dar una descripción detallada de estas interacciones.

En función de las fuerzas de cohesión, los átomos y moléculas que forman la materia se presentan en tres estados de agregación fundamentales: sólido, líquido y gaseoso.

En el **estado sólido**, las fuerzas de cohesión son suficientemente importantes para mantener las partículas constituyentes en unas posiciones fijas u oscilando ligeramente alrededor de estas posiciones, de manera que la distancia entre unas y otras y sus posiciones relativas no varíen. Esto hace que los sólidos tengan una forma propia y un volumen constante, si no varía la temperatura.

En los sólidos **cristalinos**, las partículas están ordenadas regularmente, por ejemplo, en el cloruro sódico o en el cinc metálico. A veces, una misma sustancia puede presentar ordenaciones cristalinas diferentes, por ejemplo, el azufre rómbico y el monoclínico. En los sólidos **amorfos**, como el vidrio o los plásticos sintéticos, no existe este ordenamiento regular.

A temperaturas superiores a los 10^5 K, la materia se presenta en estado de **plasma**. Este estado es comparable a un gas formado por una mezcla de núcleos atómicos y electrones libres. Es un estado muy abundante debido a su preponderancia en las estrellas. Se calcula que cerca del 99 % de la materia del universo está en estado de plasma.

La llegada a la atmósfera terrestre de las emisiones de plasma de nuestro Sol, son la causa de las auroras boreales.



Fig. 1.8. El plasma es el estado físico predominante en las estrellas.



Fig. 1.9. La evaporación de las moléculas de un líquido se produce a cualquier temperatura, si bien con diferente intensidad.

Las fuerzas de cohesión en el **estado líquido** no son tan fuertes y permiten que las partículas constituyentes se muevan las unas respecto a las otras, pero todavía son suficientes para mantenerlas globalmente cohesionadas y que la distancia media no varíe. La consecuencia es que los líquidos no tienen forma propia, pero sí tienen un volumen constante mientras la temperatura sea constante.

En el **estado gaseoso**, las fuerzas de cohesión son tan débiles que no pueden mantener las partículas unidas. Éstas se separan indefinidamente ocupando todo el espacio que tengan disponible. Por tanto, los gases tienen forma y volumen variables.

Mientras que los sólidos son rígidos, líquidos y gases son *fluidos* gracias a la posibilidad de desplazamiento de sus partículas.

3.2. Cambios de estado

a) Paso de líquido a gas. Evaporación

Percibimos el olor del agua de colonia, del alcohol o de la gasolina porque llegan a nosotros algunas moléculas de estas sustancias que abandonan el estado líquido y pasan al estado gaseoso. Del mismo modo, si se deja un vaso de agua o de alcohol destapado, al cabo de cierto tiempo habrá desaparecido todo el líquido.

Este paso paulatino de un líquido a un gas se denomina **evaporación** y es un fenómeno que se produce a cualquier temperatura, si bien es más acusada cuanto más elevada sea ésta.

Presión de vapor

Si un líquido se deja en un recipiente cerrado herméticamente, se produce igualmente evaporación y se van acumulando moléculas gaseosas en la parte libre de líquido del recipiente (se acostumbra denominar **vapor** al gas en equilibrio con la misma sustancia líquida). Sin embargo, llega un momento en que las moléculas en estado gaseoso son tan abundantes que el número de las que pierden energía y retornan al estado líquido iguala el número de las que se evaporan. En este punto, la presión que ejerce el gas o vapor sobre las paredes del recipiente ya no crece más. Esta presión de un vapor en equilibrio con su líquido, a una determinada temperatura, se denomina **presión de vapor**.

Cuanto más volátil sea un líquido mayor será su presión de vapor. Además, dicha presión de vapor aumenta con la temperatura.

No siempre las condiciones permiten llegar a un equilibrio entre el líquido y su vapor. Por ejemplo, el vapor de agua presente en la atmósfera no es siempre el máximo que puede corresponder a cada temperatura. La **humedad relativa** expresa la relación entre la cantidad de vapor de agua presente en el aire y la máxima que puede haber a una determinada temperatura. Se calcula como cociente entre la presión parcial del agua en el aire y la presión de vapor del agua a la temperatura en cuestión (que representa la máxima presión parcial posible):

$$\text{Humedad relativa} = \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P_{\text{vH}_2\text{O}}} \cdot 100 \% \quad [1.8]$$



Fig. 1.10. Psicrómetro. En uno de los dos termómetros envuelto con un material húmedo, la temperatura es más baja debido a la evaporación. Como la evaporación depende de la humedad ambiental, ésta se puede calcular a partir de la diferencia de temperaturas.

Ejercicio 1.4

Calcular la humedad, a 0 y a 25 °C, de un aire que tiene una presión parcial de agua igual a 2 mm de Hg. A 0 °C y a 25 °C la presión de vapor del agua es 4,6 y 23,8 mm de Hg, respectivamente.

Solución:

$$\text{Humedad relativa a } 0\text{ °C} = \frac{2\text{ mm Hg}}{4,6\text{ mm Hg}} \cdot 100\% = 43,48\%$$

$$\text{Humedad relativa a } 25\text{ °C} = \frac{2\text{ mm Hg}}{23,8\text{ mm Hg}} \cdot 100\% = 8,40\%$$

Está claro cómo la temperatura condiciona el valor de la humedad relativa.

b) Paso de gas a líquido. Licuación. Condensación

Es el proceso inverso a la evaporación. Se produce cuando la presión de un gas o vapor es superior a la que corresponde a una cierta temperatura. Entonces, las moléculas gaseosas pasan a líquido hasta que se restablece el equilibrio. Esto se produce por disminución de la temperatura o por aumento de la presión en que se encuentra un gas.

Se denomina *licuación* en el caso de una sustancia que sea gas a temperatura ambiente y *condensación* cuando se trata del vapor de una sustancia que a temperatura ambiente es líquida.

La lluvia, el rocío o el vapor condensado en los cristales de las ventanas son conocidos ejemplos de condensación.

Cuando una masa de aire se enfría, la presión de vapor disminuye con la temperatura y, por tanto, para una misma cantidad de vapor de agua, aumenta el porcentaje de saturación correspondiente. Si se llega al 100 %, comienza a condensarse agua líquida. Las nubes están formadas por enormes cantidades de gotas muy pequeñas (de un diámetro de unos 0,01 mm) que, cuando crecen, caen en forma de lluvia. El crecimiento de las gotas necesita partículas que actúen como núcleos de

El valor de la humedad relativa es muy importante para los seres vivos. A humedades bajas, 20-30 % o inferiores, hay peligro de desecación, mientras que a humedades elevadas, 75-80 % o superiores, se produce sensación de bochorno y calor.



Fig. 1.11. El rocío se produce cuando el descenso de temperatura reduce la presión de vapor del agua en el aire.

En el fondo de los océanos, a profundidades superiores a los 2 000 metros, el agua en contacto con las dorsales oceánicas alcanza los 350 °C sin que se llegue a la ebullición debido a la presión a que está sometida.

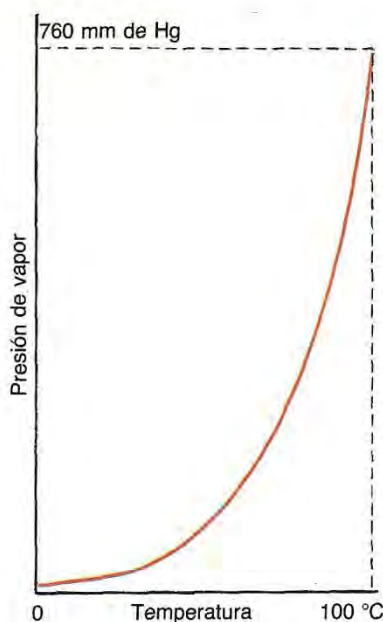


Fig. 1.12. Variación de la presión de vapor del agua con la temperatura.

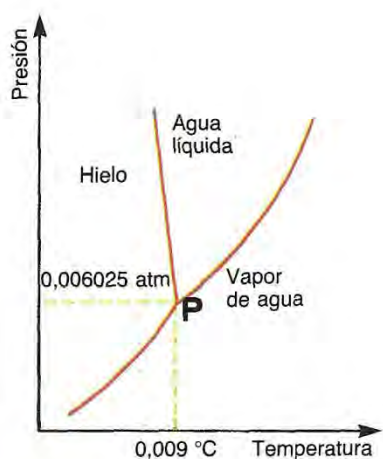


Fig. 1.13. Diagrama de fases del agua.

condensación. De manera natural estos núcleos son proporcionados por motas de polvo o cristales de hielo que se forman en la parte superior fría de las mismas nubes. Las estrategias para provocar la lluvia utilizan el sembrado de nubes con AgI (tiene una estructura parecida a la de los cristales de hielo) y también nieve carbónica (CO_2 sólido) para enfriar las nubes y favorecer la formación de cristales de hielo que actúen de núcleos de condensación.

Como para licuar un gas es preciso que la energía de atracción entre las partículas supere la energía de dispersión derivada de la agitación térmica, existe una temperatura por encima de la cual es imposible licuar un gas, por mucho que se incremente la presión. Esta temperatura se conoce como **temperatura crítica**.

c) Ebullición

Si se calienta un líquido en un recipiente abierto, la presión de vapor va aumentando con la temperatura y la evaporación es cada vez más intensa. Cuando la presión de vapor llega al valor de la presión atmosférica, el paso a gas se produce no sólo en la superficie, sino en toda la masa líquida. En puntos interiores, la aparición de vapor provoca burbujas que escapan debido a su densidad más pequeña que la del líquido. El líquido hierve.

Durante todo el proceso de ebullición, la temperatura no varía ya que toda la energía administrada se invierte en el paso de las moléculas de líquido a gas.

Está claro que *la temperatura de ebullición depende de la presión ambiental*. Por ejemplo, a 1 atm de presión (760 mm Hg), el agua hierve a 100 °C pero si la presión se reduce hasta 17,5 mm de Hg, basta con calentarla hasta 20 °C para que hierva. Sin llegar a valores tan exagerados, los excursionistas y montañeros saben muy bien que en lugares elevados, debido a la baja presión atmosférica, el agua hierve antes de los 100 °C, lo cual comporta dificultades en la cocción de los alimentos, preparación de café, etc. Por el contrario, el fundamento de las ollas a presión domésticas consiste en una ebullición a temperatura superior a los 100 °C debido a la presión a que se confina el vapor. Este hecho disminuye el tiempo de cocción de los alimentos.

d) Sublimación

Es el paso directo de sólido a gas o al revés. Es un proceso que depende directamente de la presión. Se produce en algunas sustancias, por ejemplo, el yodo y el dióxido de carbono (nieve carbónica).

e) Fusión-Solidificación

Al aumentar la temperatura, crece el movimiento de vibración de las partículas que forman los sólidos. Al llegar a la *temperatura de fusión*, esta energía cinética de las partículas supera la energía de atracción entre ellas y el sólido pasa a líquido. *La temperatura de fusión depende ligeramente de la presión*. La temperatura de fusión a la presión de 1 atm se denomina *punto de fusión*.

Cuando disminuye la temperatura de un líquido, también lo hace la agitación de las moléculas. Llega un punto en que la atracción entre las partículas es capaz de mantenerlas unidas y se produce la *solidificación*. La solidificación puede denominarse *congelación* cuando se produce a temperaturas bajas comparadas con la ambiental. También se denomina *cristalización*, si se forma un sólido cristalino. A veces, se puede disminuir la temperatura por debajo de la temperatura de solidificación sin abandonar el estado líquido pero es suficiente una pequeña agitación para que se produzca el paso a sólido.

3.3. Calores latentes o calores de transformación

Calor latente o **calor de transformación** es la cantidad de calor que absorbe o cede 1 mol de una determinada sustancia cuando pasa de un estado a otro a la temperatura de transición.

Así, se habla de calor latente de fusión, calor latente de vaporización, etcétera.

SUSTANCIA	Calor de fusión (kJ/mol)	Punto fusión (°C)	Calor de vaporización (kJ/mol)	Punto de ebullición (°C)
H ₂	0,13	-259	0,92	-252
Ne	0,33	-246	1,68	-248
O ₂	0,46	-218	6,81	-183
CH ₄	0,96	-184	8,15	-164
NH ₃	5,98	-178	23,41	- 33
CH ₃ CH ₂ OH	4,81	-114	39,29	78
Cl ₂	6,35	-101	20,27	- 34
Hg	2,42	- 39	64,79	357
CCl ₄	2,68	- 24	29,68	77
H ₂ O	5,98	0	40,55	100
Al	10,87	+658	282,57	2 600
NaCl	28,42	+808	170,54	1 465

Tabla 1.2. Temperaturas y calores de fusión y ebullición de algunas sustancias.

3.4. Diagramas de fases

Son gráficos que representan los cambios de estado. Las curvas representan las presiones y temperaturas a las cuales pueden coexistir diferentes fases. Hay una curva para el equilibrio sólido-líquido, otra para el líquido-vapor y otra para el sólido-vapor. En el punto de unión de las tres curvas, llamado **punto triple**, pueden coexistir la fase sólida, la líquida y la gaseosa. (Fig. 1.13.)

En el caso de que una misma sustancia se pueda presentar bajo más de una forma sólida (*polimorfismo*) como es el caso del hierro o del azufre, el diagrama de fases también puede recoger las líneas de equilibrio entre estas fases diferentes.

4. Leyes de los gases ideales

Se considera que un gas es **ideal** si:

- No hay fuerzas entre sus moléculas.
- El volumen ocupado por las moléculas es despreciable frente al volumen total ocupado por el gas.

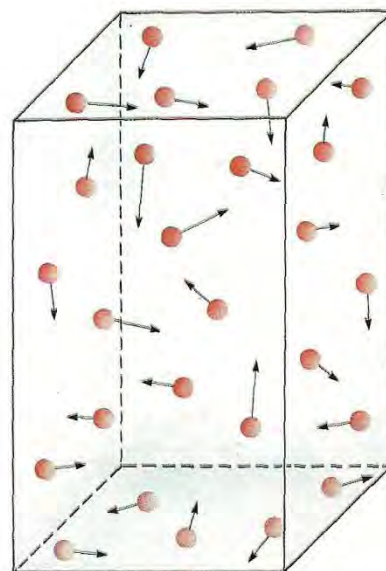


Fig. 1.14. En un gas ideal, el volumen de las moléculas es despreciable y entre ellas no hay atracción.

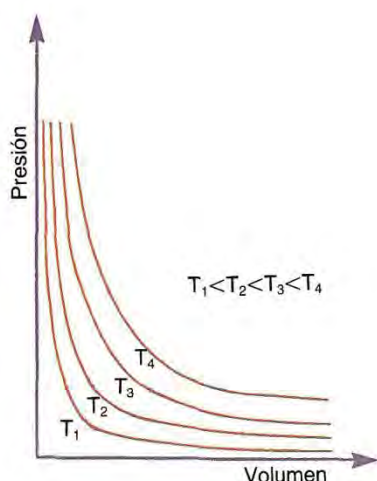


Fig. 1.15. Relación entre la P y el V para un gas ideal.

Los submarinistas que ascienden sin espirar pueden experimentar desafortunadamente la ley de Boyle-Mariotte. El aire de los pulmones se dilata en el ascenso, al disminuir la presión, y puede llegar a reventar los alvéolos pulmonares.

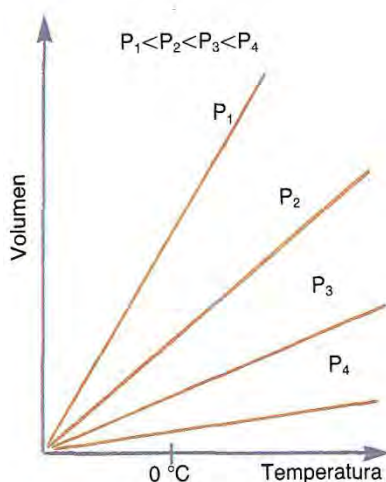


Fig. 1.16. Relación entre el V y la T para un gas ideal.

Los **gases reales** se aproximan al comportamiento ideal cuando la temperatura es suficientemente alta y la presión baja. En cambio, las presiones elevadas y las temperaturas bajas facilitan la manifestación de fuerzas de atracción entre las moléculas y el comportamiento se desvía del ideal.

4.1. Ley de Boyle-Mariotte. Relación entre P y V

Robert Boyle (1627-1691) fue un irlandés que llegó a director de la Compañía de las Indias Occidentales. Pero éste no es el motivo por el cual ha pasado a los libros de química. Robert Boyle, entre otras cosas, fue el primero en diferenciar claramente entre mezcla, compuesto químico y elemento químico; estableció definiciones de ácido y de base; aisló en forma pura los elementos hidrógeno y fósforo. Y, sobre todo, su nombre va asociado a una ley sobre la compresibilidad de los gases:

A temperatura constante, el volumen ocupado por un gas es inversamente proporcional a la presión a que es sometido.

Edme Mariotte (1620-1684), que fue uno de los pioneros en la previsión meteorológica a partir de las mediciones de presión atmosférica, confirmó experimentalmente, en 1676, la ley de Boyle sobre los gases. Matemáticamente, esta ley se puede expresar como:

$$P = \frac{k}{V} \quad [1.9]$$

o también como:

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2 \quad [1.10]$$

siempre que T (temperatura) y n (número de moles) sean constantes, siendo P_1 y V_1 la presión y el volumen en las condiciones 1, mientras que P_2 y V_2 son la presión y el volumen en las condiciones 2.

4.2. Leyes de Charles-Gay-Lussac. Relación entre P y T . Relación entre T y V

Jacques Alexandre Cesar Charles (1746-1823) perfeccionó los globos aerostáticos de los hermanos Montgolfier, utilizando hidrógeno en lugar de aire caliente. Descubrió la ley de variación de la presión de los gases a volumen constante. Jacques Charles no publicó su trabajo, pero sí lo hizo otro aficionado a la aerostática, **Louis Joseph Gay-Lussac** (1778-1850). Gay-Lussac estudió el magnetismo terrestre y la composición del aire, cosa que le condujo a llevar a cabo unas famosas ascensiones en globo en las que estableció un récord de altura, 7 016 m. Las leyes que ambos experimentadores enunciaron fueron:

A presión constante, el volumen ocupado por un gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta a la que se encuentra.

O sea:

$$V = k' \cdot T \quad [1.11]$$

O también:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad [1.12]$$

A volumen constante, la presión de un gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta a la cual se encuentra.

O sea:

$$P = k'' \cdot T \quad [1.13]$$

O también:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad [1.14]$$

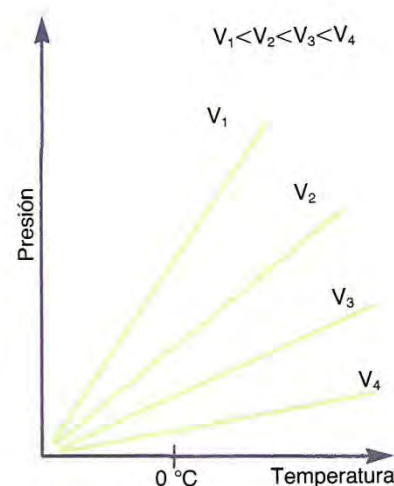


Fig. 1.17. Relación entre la P y T para un gas ideal.

4.3. Ecuación general y ecuación de estado de los gases ideales

Si en un proceso varían la P y el V, manteniendo la T constante, y seguidamente varían la T y el V, quedando la P constante, la aplicación sucesiva de las leyes de Boyle-Mariotte y de Charles-Gay-Lussac proporciona la expresión:

$$\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2} \quad [1.15]$$

denominada **ecuación general de los gases ideales** y aplicable a procesos en los que varían simultáneamente la presión, el volumen y la temperatura.

En **condiciones normales** (0 °C y 1 atm) 1 mol de un gas ideal ocupa un volumen de 22,414 litros. Así resulta que:

$$\frac{P_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 22,414 \text{ l/mol}}{273,16 \text{ K}} = 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{l}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

Este valor es válido en cualesquiera condiciones, aunque se haya deducido en el caso de condiciones normales. Se acostumbra representar por **R** y se conoce como **constante de los gases ideales**. Por tanto, para 1 mol de gas, se puede escribir:

$$\frac{P \cdot V}{T} = R, \quad \text{o también} \quad P \cdot V = R \cdot T$$

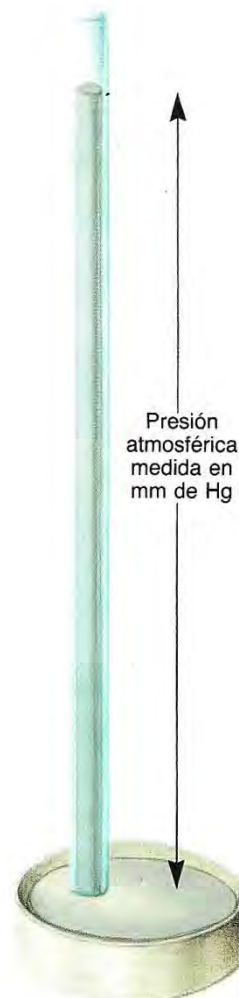


Fig. 1.18. El mercurio de la columna ejerce sobre el mercurio libre del recipiente de la base la misma presión que la atmósfera.

Y, en general, para un número n de moles:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad [1.16]$$

Que se conoce como **ecuación de estado de los gases ideales**.

TEMA II

ESTÁTICA

Fuerzas

1. Introducción

En este capítulo y en el siguiente se suponen las fuerzas aplicadas a cuerpos rígidos libres en el espacio. Cuando las fuerzas actúan sobre los cuerpos, éstos se deforman, pero las deformaciones son tan pequeñas que generalmente no influyen en el equilibrio de los cuerpos. Por consiguiente la hipótesis de considerar los cuerpos como rígidos no lleva consigo ninguna limitación en la resolución de la mayoría de los problemas de equilibrio.

Este capítulo comprende tres partes perfectamente diferenciadas:

Conceptos fundamentales.
Composición de fuerzas.
Equilibrio.

2. Concepto de fuerza

Las *fuerzas* representan las acciones que unos cuerpos ejercen sobre otros. La primera noción de fuerza llega a nosotros a través del esfuerzo muscular, ya que es necesario un esfuerzo muscular para desplazar un cuerpo o para deformarlo. Estos dos efectos, desplazamiento y deformación, son los que producen una fuerza F en un cuerpo (Fig. 2.1), y dependen de las características del cuerpo y de cuatro elementos que definen a la fuerza, a saber:

El *punto de aplicación* A , que es el punto del cuerpo en que se supone concentrada la fuerza.

La *dirección* que es la de la línea recta que pasa por el punto

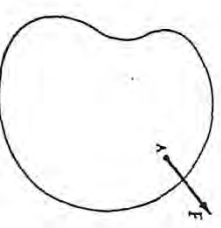


Fig. 2.1

El cuerpo. Esta recta se denomina *línea de acción de la fuerza*. El *sentido*, que coincide con el del desplazamiento o de la deformación que la fuerza tiende a producir en el cuerpo. La *magnitud* o cantidad de fuerza, que se mide adoptando una fuerza como unidad.

Estos cuatro elementos característicos de la fuerza, punto de aplicación, dirección, sentido y magnitud son los mismos que definen un vector, por lo que las fuerzas son magnitudes vectoriales y se representan por vectores.

Las fuerzas se clasifican en *fuerzas de volumen* y *fuerzas de superficie*. Las fuerzas de volumen están distribuidas en el volumen del cuerpo y aplicadas a cada una de sus partículas; son ejemplos de fuerzas de volumen el peso y las fuerzas magnéticas. Las fuerzas de superficie están distribuidas en la superficie del cuerpo, y representan las acciones de contacto de los cuerpos; son ejemplos de fuerzas de superficie el empuje de las tierras sobre un muro, y las fuerzas de rozamiento. En el sistema técnico, la unidad de fuerza es el *kilogramo fuerza* (Kg) que equivale al peso en París de un bloque de platino iridiado que se denomina *kilogramo patrón*. Generalmente las magnitudes de las fuerzas se miden utilizando *dinamómetros* que consisten esencialmente en resortes cuyos alargamientos determinan las magnitudes de las fuerzas que se les aplican.

3. Principios de la estática

Uno de los conceptos fundamentales en mecánica es el de *punto material*. Se designa así a un cuerpo cuyas dimensiones pueden despreciarse cuando se describe su movimiento. A un sistema de puntos materiales cuyas distancias son invariables se le denomina *cuerpo rígido*. Los cuerpos naturales sometidos a la acción de fuerzas cualesquiera se deforman; sin embargo estas deformaciones son normalmente tan pequeñas que no influyen en el estado de reposo o movimiento de los cuerpos, que se consideran a tal efecto como si fueran cuerpos rígidos. La estática del cuerpo rígido se basa en tres axiomas que se denominan principios de la estática:

Principio de las dos fuerzas iguales y directamente opuestas (Fig. 2.2). El estado de un cuerpo rígido no se modifica si se aplican, o se suprimen dos fuerzas iguales y opuestas que tengan la misma línea de acción, es decir dos fuerzas iguales y directamente opuestas. Según este principio, al aplicar a un cuerpo

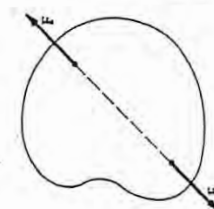
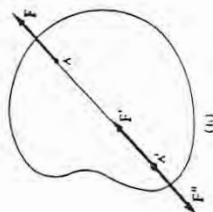
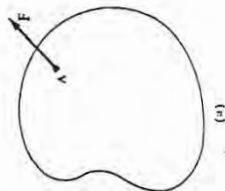


Fig. 2.2

rígido dos fuerzas iguales y directamente opuestas, el cuerpo permanece en reposo o en movimiento con velocidad constante y como además es indeformable, su estado no se modifica. De este principio de la estática, consecuencia de la indeformabilidad del cuerpo rígido, se deduce el llamado *teorema de la transmisibilidad*, según el cual el efecto que una fuerza ejerce sobre un cuerpo rígido no se modifica si se traslada la fuerza a un punto cualquiera de su línea de acción, con tal que dicho



(a)

(b)

Fig. 2.3

punto esté rígidamente unido al cuerpo. En efecto, sea el cuerpo rígido de la figura 2.3a sobre el que actúa una fuerza F aplicada en el punto A . De acuerdo con el principio de las dos fuerzas iguales y directamente opuestas, el estado del cuerpo no se modifica si se aplican en el punto A' dos fuerzas F' y F'' (Fig. 2.3b), de las cuales F' es igual a F en magnitud, dirección y sentido, y F'' es igual y directamente opuesta a F . Sin que se modifique el estado del cuerpo rígido, aplicando de nuevo este principio, se pueden suprimir las fuerzas F y F'' , con lo que el cuerpo queda sometido únicamente a la acción de la fuerza F' (Fig. 2.3c), igual a F pero aplicada en el punto A' . Esto demuestra que se puede trasladar una fuerza F a lo largo de su línea de acción sin modificar el estado del cuerpo rígido. De acuerdo con este teorema, una fuerza aplicada a un cuerpo rígido se representa por un vector deslizante.

Principio de las fuerzas concurrentes (Fig. 2.4). El efecto que produce en un cuerpo rígido la aplicación de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto A es equivalente al de una fuerza única F aplicada en A , llamada *resultante*, representada por un vector igual a la suma de los vectores que representan a todas las fuerzas concurrentes. Según este principio, el efecto de una fuerza F sobre un cuerpo rígido (Fig. 2.5) es igual al

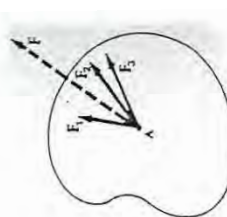


Fig. 2.4

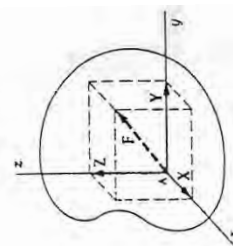


Fig. 2.5

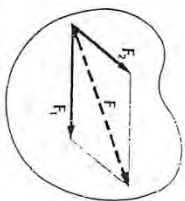


Fig. 2.6

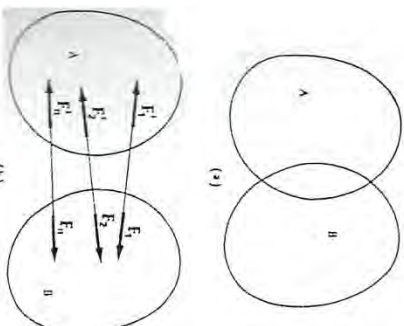


Fig. 2.7

de las fuerzas X, Y, Z obtenidas proyectando la fuerza F sobre los ejes x, y, z de un triédro trirrectángulo; las fuerzas X, Y, Z se denominan *componentes de la fuerza F según los ejes x, y, z* . En el caso de un sistema de dos fuerzas concurrentes, este principio se reduce al llamado *principio del paralelogramo* (Fig. 2.6), según el cual se pueden sustituir dos fuerzas concurrentes por una fuerza única, representada por la diagonal del paralelogramo construido tomando como lados los vectores que representan las dos fuerzas concurrentes.

Principio de la igualdad de la acción y de la reacción (Fig. 2.7a). Dados dos cuerpos A y B , si el cuerpo A ejerce sobre el cuerpo B un sistema de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n , el cuerpo B ejerce a su vez sobre el A un sistema de fuerzas F'_1, F'_2, \dots, F'_n iguales y directamente opuestas a las del sistema anterior (Fig. 2.7b). Las fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n son las *acciones* del cuerpo A , y las fuerzas F'_1, F'_2, \dots, F'_n son las *reacciones* del cuerpo B . Según este principio, la fuerza de atracción que ejerce la tierra sobre un cuerpo, o peso del cuerpo, es igual y directamente opuesta a la fuerza de atracción que ejerce dicho cuerpo sobre la tierra. Análogamente, las fuerzas que ejerce un líquido sobre un depósito son iguales y directamente opuestas a las que el depósito ejerce sobre el líquido.

2.4. Momento de una fuerza respecto a un punto

El *momento de una fuerza F respecto a un punto O* (Fig. 2.8a) es la *magnitud vectorial representada por el vector M_o ligado al punto O y definido por*

$$M_o = \vec{OA} \times F, \quad (2.1)$$

siendo \vec{OA} el vector cuyo origen es el punto O y su extremo el punto A de aplicación de la fuerza. El vector momento M_o es perpendicular al plano determinado por la línea de acción de la fuerza F y el punto O ; su sentido es tal que \vec{OA}, F y M_o constituyen un triédro directo, y su magnitud es

$$M_o = \vec{OA} \cdot F \text{ sen } \theta = F \cdot d, \quad (2.2)$$

siendo d la distancia del punto O a la línea de acción d de la fuerza F . El vector momento se representa por cualquiera de las dos formas indicadas en la figura 2.8b.



Fig. 2.8

De esta definición se deduce que los cuatro elementos característicos del vector ligado M_o son independientes de la posición de la fuerza F sobre su línea de acción d , por lo que la noción de momento es propia de vectores desizantes como son los que representan las fuerzas que actúan sobre los cuerpos rígidos. También se deduce inmediatamente que el momento de una fuerza respecto a un punto cualquiera de su línea de acción es nulo.

El momento $M_{o'}$ de una fuerza F aplicada en el punto A respecto a un punto cualquiera O' (Fig. 2.9) es

$$M_{o'} = \vec{O'A} \times F$$

Si (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) son las coordenadas de O' y A respectivamente y (X, Y, Z) las coordenadas del vector que representa la fuerza F , según (1.26) la expresión analítica del momento de la fuerza F respecto al punto O' es

$$M_{o'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

Desarrollando este determinante, se tiene

$$M_{o'} = i[(y_1 - y_0)Z - (z_1 - z_0)Y] + j[(z_1 - z_0)X - (x_1 - x_0)Z] + k[(x_1 - x_0)Y - (y_1 - y_0)X] \quad (2.4)$$

Si el punto O' coincide con el origen de coordenadas O , $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, y la expresión anterior se reduce a

$$M_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

o bien

$$M_o = i(y_1 Z - z_1 Y) + j(z_1 X - x_1 Z) + k(x_1 Y - y_1 X) \quad (2.6)$$

De la propiedad distributiva del producto vectorial se deducen dos teoremas importantes del momento de una fuerza respecto a un punto:

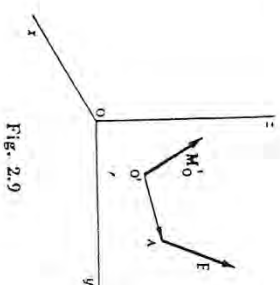


Fig. 2.9

fuerza respecto a un eje Δ ha de ser independiente del punto elegido sobre el eje para calcularlo. En efecto, la diferencia de los momentos $M_{O'}$ y $M_{O''}$ de la fuerza \mathbf{F} respecto a dos puntos O' y O'' situados sobre el eje Δ , según (2.7), es $\overrightarrow{O'O} \times \mathbf{F}$, cuya proyección sobre el eje es nula, por ser un vector perpendicular al eje.

Se deduce inmediatamente de la definición anterior que si la fuerza \mathbf{F} corta o es paralela al eje, el momento de la fuerza respecto al eje es nulo.

Asimismo del teorema de Varignon y del teorema de las proyecciones se deduce que *el momento respecto a un eje de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto, es igual a la suma de los momentos de todas las fuerzas del sistema respecto al eje.*

Consideremos una fuerza \mathbf{F} cualquiera (Fig. 2.12) como resultante de las fuerzas \mathbf{F}' y \mathbf{F}'' , siendo la componente \mathbf{F}' la proyección de la fuerza \mathbf{F} sobre el plano π perpendicular al eje Δ trazado por el punto de aplicación A de la fuerza \mathbf{F} , y la componente \mathbf{F}'' paralela al eje. Según el teorema anterior, el momento de la fuerza \mathbf{F} respecto al eje Δ será igual a la suma de los momentos respecto al mismo eje de las fuerzas \mathbf{F}' y \mathbf{F}'' ; ahora bien, el momento de la fuerza \mathbf{F}'' respecto al eje Δ es nulo por ser ambos paralelos, y el momento de la fuerza \mathbf{F}' respecto al eje Δ será igual al momento de la fuerza \mathbf{F} respecto a dicho eje, que se determina proyectando sobre el eje el momento $\langle \mathbf{M}_O \rangle$ de la fuerza \mathbf{F} respecto al punto O de intersección del plano π y el eje Δ . Este momento \mathbf{M}'_O es paralelo al eje y por tanto su proyección sobre él es igual al valor de su magnitud. Por consiguiente

$$M_d = \pm M'_O = \pm F' \cdot d = \pm F \cdot d \cdot \sin \theta, \quad (2.9)$$

siendo d la distancia del punto O a la línea de acción de la fuerza \mathbf{F}' y θ el ángulo que forman la fuerza \mathbf{F} y el eje Δ . M_d es positivo o negativo según que el sentido del momento de la fuerza \mathbf{F}' respecto al punto O coincida o no con el sentido positivo del eje Δ . La ecuación (2.9) demuestra que el momento respecto a un eje es nulo cuando uno de los tres factores F , d , $\sin \theta$ es nulo, es decir cuando la fuerza es nula o cuando está en un mismo plano con el eje.

Las coordenadas del vector que representa el momento de una fuerza \mathbf{F} respecto al origen de coordenadas son los momentos de la fuerza \mathbf{F} respecto a los tres ejes coordenados. Teniendo en cuenta (2.6), los momentos respecto a los ejes coordena-

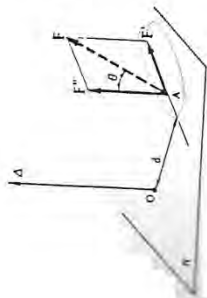


Fig. 2.12

dos de la fuerza \mathbf{F} , de coordenadas X, Y, Z , que pasa por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ son

$$M_x = y_1 Z - z_1 Y, \quad M_y = z_1 X - x_1 Z, \quad M_z = x_1 Y - y_1 X \quad (2.10)$$

Si Δ es un eje cualquiera que pasa por el punto $O'(x_0, y_0, z_0)$ y está representado por el vector unitario \mathbf{u} , el momento respecto al eje Δ de la fuerza \mathbf{F} cuya línea de acción pasa por el punto A , es

$$M_d = (\overrightarrow{O'A} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u},$$

ya que el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{O'A} \times \mathbf{F}$ y \mathbf{u} es igual a la proyección sobre el eje Δ del momento de la fuerza \mathbf{F} respecto al punto O' del eje. De las propiedades del producto mixto, resulta

$$M_d = (\mathbf{u} \times \overrightarrow{O'A}) \cdot \mathbf{F} \quad (2.11)$$

Puesto que las coordenadas del vector $\overrightarrow{O'A}$ son $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, si (u_x, u_y, u_z) son las coordenadas del vector unitario \mathbf{u} , según (1.32), se tiene

$$M_d = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

EXAMPLE 2.3. Sobre un cuerpo rígido en forma de paralelepípedo rectangular actúa una fuerza \mathbf{F} (Fig. 2.13). Calcular los momentos de la fuerza \mathbf{F} respecto a los ejes coordenados y respecto al eje BC . Datos: $F = 5.000 \text{ kg}$, $b = 0.30 \text{ m}$, $h = 0.40 \text{ m}$, $L = \sqrt{2} \text{ m}$.

Solución: Si β es el ángulo que forma la fuerza \mathbf{F} con el eje y , las coordenadas de la fuerza son

$$X = 0, \quad Y = F \cos \beta, \quad Z = -F \sin \beta$$

Como las coordenadas del punto A por el que pasa la fuerza son $(L, \frac{h}{2}, \frac{b}{2})$, según (2.10) los momentos de la fuerza \mathbf{F} respecto a los ejes coordenados son

$$M_x = -\frac{h}{2} (-F \sin \beta) - \frac{b}{2} F \cos \beta, \quad M_y = -L (-F \sin \beta), \quad M_z = L \cdot F \cos \beta$$

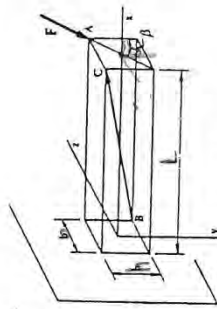


Fig. 2.13

o sea

$$M_x = \frac{F}{2} (h \operatorname{sen} \beta - b \cos \beta), \quad M_y = F \cdot L \operatorname{sen} \beta, \quad M_z = F \cdot L \cos \beta$$

Sustituyendo los valores numéricos, siendo $\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \frac{4}{5}$, resulta

$$M_x = 0, \quad M_y = 4,242 \text{ m.kg}, \quad M_z = 5,656 \text{ m.kg}$$

Se podía haber deducido inmediatamente que M_x es nulo, ya que la fuerza F corta al eje x .

Para calcular el momento de la fuerza F respecto al eje BC es preciso determinar el vector unitario u correspondiente al eje BC . Las coordenadas de los puntos B y C son $B(0, \frac{h}{2}, \frac{b}{2})$ y $C(L, -\frac{h}{2}, -\frac{b}{2})$, y la distancia entre ellos $\overline{BC} = \sqrt{L^2 + b^2 + h^2}$. Según (1.8) las coordenadas del vector unitario son:

$$u_x = \frac{L}{\sqrt{L^2 + b^2 + h^2}}, \quad u_y = \frac{-h}{\sqrt{L^2 + b^2 + h^2}}, \quad u_z = \frac{-b}{\sqrt{L^2 + b^2 + h^2}}$$

De (2.12) se tiene

$$M_d = \begin{vmatrix} L & -h & -b \\ \frac{L}{\sqrt{L^2 + b^2 + h^2}} & \frac{-h}{\sqrt{L^2 + b^2 + h^2}} & \frac{-b}{\sqrt{L^2 + b^2 + h^2}} \\ 0 & 0 & b \\ 0 & F \cos \beta & -F \operatorname{sen} \beta \end{vmatrix} = -\frac{FLb \cos \beta}{\sqrt{L^2 + b^2 + h^2}}$$

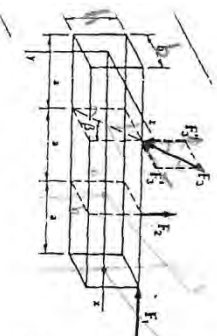
Sustituyendo los datos y $\cos \beta = \frac{4}{5}$, resulta $M_d = -1,121 \text{ m.kg}$.

Ejemplo 2.4. El sistema de fuerzas F_1, F_2 y F_3 actúa sobre un bloque prismático (Fig. 2.14). Calcular la suma de los momentos de todas las fuerzas respecto a los ejes coordenados. Datos: $F_1 = 2,000 \text{ kg}$, $F_2 = 500 \text{ kg}$, $F_3 = 1,000 \text{ kg}$, $b = 0,30 \text{ m}$, $h = 0,40 \text{ m}$, $a = 1,0 \text{ m}$.

Solución: Para determinar los momentos de las distintas fuerzas respecto a los ejes coordenados utilizaremos (2.9). Los momentos de la fuerza F_1 son

$$M_{x1} = 0, \quad M_{y1} = -F_1 \cdot \frac{b}{2}, \quad M_{z1} = -F_1 \cdot \frac{h}{2}$$

Fig. 2.14



Los momentos de la fuerza F_2 son

$$M_{x2} = F_2 \cdot \frac{b}{2}, \quad M_{y2} = 0, \quad M_{z2} = -F_2 \cdot 2a$$

El momento de la fuerza F_3 respecto al eje x es nulo, por cortar al eje x . Para hallar los momentos de F_3 respecto a los otros dos ejes y, z , la consideramos como resultante de las fuerzas F'_3 y F''_3 , paralelas respectivamente a los ejes z e y ; siendo $F'_3 = F_3 \cdot \operatorname{sen} \beta$ y $F''_3 = F_3 \cos \beta$, se tiene

$$M_{y3} = F'_3 \cdot a = F_3 \cdot a \cdot \operatorname{sen} \beta, \quad M_{z3} = F''_3 \cdot a = F_3 \cdot a \cdot \cos \beta$$

Sumando algebraicamente los momentos de las fuerzas del sistema correspondientes a cada uno de los ejes coordenados, se tiene

$$\Sigma M_{x1} = F_2 \cdot \frac{b}{2}, \quad \Sigma M_{y1} = -F_1 \cdot \frac{b}{2} + F_3 \cdot a \cdot \operatorname{sen} \beta, \\ \Sigma M_{z1} = -F_1 \cdot \frac{h}{2} - F_2 \cdot 2a + F_3 \cdot a \cdot \cos \beta$$

sustituyendo los datos y $\operatorname{sen} \beta = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$, resulta

$$\Sigma M_{x1} = 75 \text{ m.kg}, \quad \Sigma M_{y1} = 300 \text{ m.kg}, \quad \Sigma M_{z1} = -600 \text{ m.kg}$$

2.6. Composición de fuerzas. Casos particulares

Se dice que dos sistemas de fuerzas son *equivalentes* cuando ejercen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido. A la operación consistente en sustituir un sistema de fuerzas por otro equivalente más sencillo se le denomina *reducción del sistema de fuerzas* o simplemente *composición de fuerzas*; a la operación inversa se le llama *descomposición de fuerzas*. A continuación se estudia la composición de sistemas particulares de fuerzas:

a) *Sistemas de fuerzas concurrentes.* Si sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de fuerzas concurrentes F_1, F_2, \dots, F_n (Fig. 2.15 a), en virtud del principio de las fuerzas concurrentes se puede sustituir el sistema de fuerzas por una fuerza única R llamada *resultante* aplicada en el punto de concurrencia y representada por un vector igual a la suma de los vectores que representan todas las fuerzas del sistema. Si $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), \dots, (X_n, Y_n, Z_n)$ son las coordenadas de los vectores que representan las fuerzas concurrentes, las coordenadas del vector que representa la fuerza resultante serán

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \end{aligned} \quad (2.13)$$

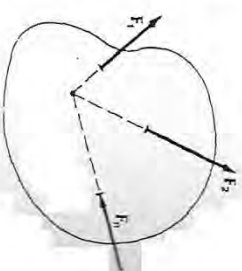


Fig. 2.15

y la magnitud de la fuerza resultante

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (2.14)$$

Los ángulos que la fuerza resultante forma con los ejes coordenados se determinan mediante las expresiones

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R} \quad (2.15)$$

Llevando a partir de un punto cualquiera O (Fig. 2.15 b), una continuación de otro, los vectores que representan las fuerzas, se obtiene el contorno poligonal $O, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n$, que se llama *polígono de fuerzas*; el vector $\overrightarrow{OC_n}$, lado de cierre del polígono de fuerzas, representa en magnitud, dirección y sentido la resultante R del sistema de fuerzas. En el caso de que las fuerzas concurrentes sean a la vez coplanarias, la construcción del polígono de fuerzas determina gráficamente la resultante con gran sencillez.

b) *Sistemas de fuerzas coplanarias.* Cuando sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de fuerzas coplanarias cualesquiera (Fig. 2.16) se hallará primeramente la resultante parcial $R_{1,2}$ de las fuerzas F_1 y F_2 , mediante la regla del paralelogramo, trasladándolas previamente a su punto de concurrencia. A continuación hallaremos la resultante $R_{1,2,3}$ de la fuerza $R_{1,2}$ y de una tercera fuerza F_3 , y operando sucesivamente de esta forma se reduce el sistema de fuerzas coplanarias a sistemas cada vez más sencillos. En el capítulo 3 se estudia la composición de fuerzas coplanarias utilizando el método del *polígono funicular*.

c) *Sistemas de fuerzas paralelas.* Consideremos un cuerpo rígido sobre el que actúa un sistema de dos fuerzas paralelas y del mismo sentido (Fig. 2.17). La resultante de este sistema es una fuerza paralela a las fuerzas componentes, del mismo sentido que ellas, de magnitud igual a la suma de sus magnitudes, y situada entre ambas fuerzas a distancias inversamente proporcionales a sus magnitudes respectivas. Para demostrarlo se realizan las siguientes operaciones: Sobre la recta A_1A_2 que une dos puntos de las líneas de acción de las fuerzas F_1 y F_2 se añaden al sistema las fuerzas Q_1 y Q_2 iguales y directamente opuestas, que no modifican el estado del cuerpo rígido; aplicando la regla del paralelogramo se componen las fuerzas F_1 y Q_1 , obteniéndose R_1 . Análogamente se componen

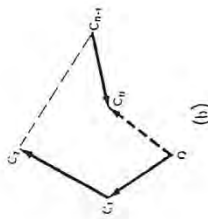


Fig. 2.15

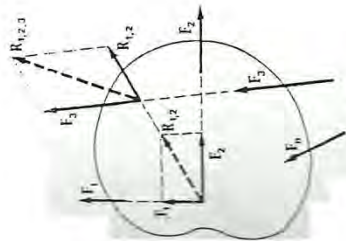


Fig. 2.16

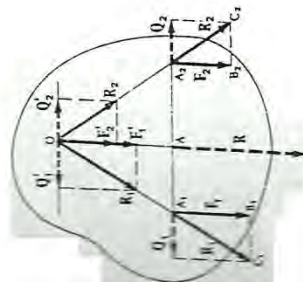


Fig. 2.17

nen F_3 y Q_2 , obteniéndose R_2 . Las fuerzas R_1 y R_2 se descomponen, en su punto de concurrencia O , según direcciones paralelas a A_1A_2 y a F_1 , obteniéndose el sistema equivalente formado por F'_1, Q'_1, F'_2, Q'_2 ; suprimiendo las fuerzas Q'_1 y Q'_2 que son iguales y directamente opuestas, resulta el sistema equivalente formado por las fuerzas F'_1 y F'_2 cuya composición da lugar a la fuerza resultante $R = F'_1 + F'_2$.

De las semejanzas de los triángulos OAA_1 y $A_1B_1C_1$ y de los triángulos OAA_2 y $A_2B_2C_2$ se deduce

$$\frac{A_1A}{OA} = \frac{C_1B_1}{A_1B_1}, \quad \frac{A_2A}{OA} = \frac{C_2B_2}{A_2B_2}$$

puesto que

$$\overline{A_1B_1} = F_1, \quad \overline{A_2B_2} = F_2, \quad \overline{C_1B_1} = Q_1 = Q_2 = \overline{C_2B_2}$$

resulta

$$\frac{A_1A}{A_2A} = \frac{F_2}{F_1}, \quad (2.16)$$

ecuación que determina analíticamente la posición del punto A situado en la línea de acción de la resultante. Se puede obtener el punto A gráficamente mediante la construcción de la figura 2.18, que consiste en trazar a partir del punto A_1 un vector $\overrightarrow{A_1C_1}$ igual y opuesto a F_2 y a partir del punto A_2 un vector $\overrightarrow{A_2C_2}$ igual a F_1 . La intersección de la recta C_1C_2 con la recta A_1A_2 determina el punto A de la línea de acción de la resultante, ya que de la semejanza de los triángulos AA_1C_1 y AA_2C_2 se deduce (2.16).

Si sobre un cuerpo rígido se aplica un sistema de dos fuerzas paralelas y de sentidos opuestos (Fig. 2.19), su resultante es una fuerza paralela a las fuerzas componentes, del mismo sentido que la mayor, de magnitud igual a la diferencia de sus magnitudes, situada fuera del espacio comprendido entre ambas fuerzas, más próxima a la fuerza de mayor magnitud, y a distancias de las fuerzas inversamente proporcionales a sus magnitudes respectivas. Esto se puede demostrar realizando las mismas operaciones que en el caso anterior, pero es más sencillo descomponer la fuerza F_1 en dos fuerzas F'_1 y R paralelas a F_1 , de las cuales la fuerza F'_1 es igual y directamente

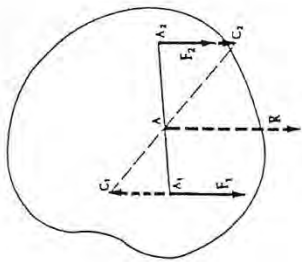


Fig. 2.18

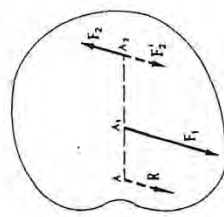


Fig. 2.19

opuesta a F_2 , y la fuerza R , de magnitud $R = F_1 - F'_2 = F_1 - F_2$, está aplicada en un punto A determinado como en el caso anterior por la expresión

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{F'_2}{R} = \frac{F_2}{R}$$

de donde

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1A} + \overline{A_1A_2}} = \frac{F_2}{F_2 + R}$$

o sea

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{F_2}{F_1} \quad (2.17)$$

Las fuerzas F_2 y F'_2 iguales y directamente opuestas pueden suprimirse, y el sistema de fuerzas F_1 y F_2 se reduce a la fuerza resultante R cuya línea de acción pasa por el punto A , determinado analíticamente por (2.17) y gráficamente por la construcción de la figura 2.20, consecuencia de la ecuación anterior.

Si las magnitudes de las fuerzas F_1 y F_2 de un sistema de dos fuerzas paralelas y de sentidos opuestos son iguales, la magnitud de la resultante R se anula y el punto A se aleja indefinidamente; a este sistema se le denomina *par de fuerzas*.

Por último, supongamos que sobre el cuerpo rígido actúa un sistema de fuerzas paralelas cualesquiera. El sistema se reduce componiendo primero dos fuerzas, y a continuación su resultante parcial con una tercera fuerza, y así sucesivamente. Procediendo de este modo el sistema se reduce bien a una fuerza única paralela a las fuerzas del sistema, bien a dos fuerzas iguales y opuestas sobre líneas de acción diferentes, es decir a un par de fuerzas, o bien a dos fuerzas iguales y directamente opuestas es decir a cero.

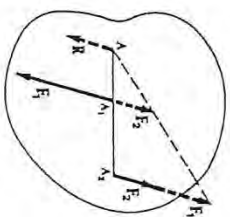


Fig. 2.20

EXAMPLE 2.5. Sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de fuerzas F_1 , F_2 , F_3 y F_4 concurrentes en un punto O que se toma como origen de coordenadas. Calcular la resultante y los ángulos que forma con los ejes coordenados. Datos: Las coordenadas de los vectores que representan las fuerzas, expresadas en kilogramos, son $F_1(5.000, 4.000, 2.000)$, $F_2(0, -2.000, -1.000)$, $F_3(-3.000, -1.000, 7.000)$, $F_4(1.000, -1.000, -4.000)$.

Solución: Las coordenadas del vector que representa la resultante son:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 3.000 \text{ kg} \\ Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 0 \\ Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 4.000 \text{ kg} \end{aligned}$$

La magnitud de la resultante es

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 5.000 \text{ kg}$$

Los ángulos que forma con los ejes coordenados se determinan mediante las expresiones

$$\cos \alpha = \frac{X}{R} = 0,6 \quad \cos \beta = \frac{Y}{R} = 0 \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R} = 0,8$$

de donde

$$\alpha = 53^\circ 8', \quad \beta = 90^\circ, \quad \gamma = 36^\circ 52'$$

EXAMPLE 2.6. Sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de cinco fuerzas coplanares concurrentes (Fig. 2.21a). Determinar analíticamente y gráficamente la resultante del sistema de fuerzas y el ángulo que forma con el eje x . Datos: $F_1 = 1.500 \text{ kg}$, $F_2 = 1.500 \text{ kg}$, $F_3 = 3.000 \text{ kg}$, $F_4 = 1.000 \text{ kg}$, $F_5 = 4.000 \text{ kg}$. Los ángulos que las fuerzas forman con el eje x son $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $\alpha_3 = 120^\circ$, $\alpha_4 = 225^\circ$, $\alpha_5 = 330^\circ$.

Solución analítica: Las coordenadas de los vectores que representan las fuerzas concurrentes son $X_i = F_i \cos \alpha_i$, $Y_i = F_i \sin \alpha_i$, $Z_i = 0$. Sustituyendo los datos resulta:

$$\begin{aligned} X_1 &= 1.500 \text{ kg}, & Y_1 &= 0, & Z_1 &= 0, \\ X_2 &= 1.299 \text{ kg}, & Y_2 &= 750 \text{ kg}, & Z_2 &= 0, \\ X_3 &= -1.500 \text{ kg}, & Y_3 &= 2.598 \text{ kg}, & Z_3 &= 0, \\ X_4 &= -707 \text{ kg}, & Y_4 &= -707 \text{ kg}, & Z_4 &= 0, \\ X_5 &= 3.464 \text{ kg}, & Y_5 &= -2.000 \text{ kg}, & Z_5 &= 0. \end{aligned}$$

Las coordenadas del vector que representa la fuerza resultante son:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 4.056 \text{ kg} \\ Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 = 641 \text{ kg} \\ Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 = 0 \end{aligned}$$

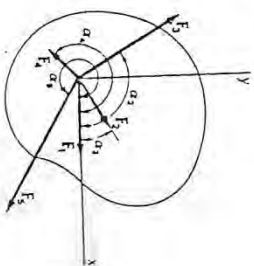
La magnitud de la resultante es

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 4.106 \text{ kg}$$

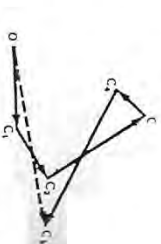
El ángulo que forma la resultante R con el eje x se determina mediante la expresión

$$\cos \alpha = \frac{X}{R} = 0,9878, \quad \alpha = 8^\circ 58'$$

Solución gráfica: Tomando como origen un punto cualquiera O (Fig. 2.21b) se construye el polígono de fuerzas trazando los vectores que representan las fuerzas, uno a continuación de otro. El vector OC_5 representa la resultante R , que es una fuerza de 4.106 kg , que forma un ángulo de 9° con la dirección de la fuerza F_1 , en el sentido indicado en la figura.



(a)



(b)

Fig. 2.21

EJEMPLO 2.7. Sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de tres fuerzas paralelas coplanarias (Fig. 2.22). Determinar gráficamente su resultante. Datos: $F_1 = 2.000 \text{ kg}$, $F_2 = 1.000 \text{ kg}$, $F_3 = 1.500 \text{ kg}$.

Solución: La fuerza resultante será una fuerza paralela a las fuerzas dadas, de magnitud $R = F_1 + F_2 + F_3 = 2.500 \text{ kg}$, del mismo sentido que F_1 y F_2 . Para determinar la posición de la resultante, componemos primeramente las fuerzas F_1 y F_2 , hallando su resultante parcial $R_{1,2} = 3.500 \text{ kg}$. A continuación se compone $R_{1,2}$ y F_3 , obteniéndose la resultante $R = 2.500 \text{ kg}$, que está situada a la derecha de F_1 , a una distancia de $1,4 \text{ m}$.

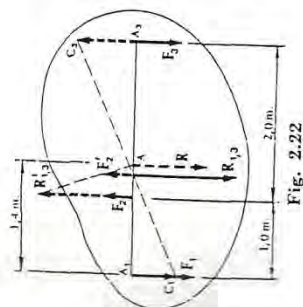


Fig. 2.22

2.7. Par de fuerzas. Composición de pares

Se ha llamado *par de fuerzas* o simplemente *par* (Fig. 2.23 a) al sistema de dos fuerzas de igual magnitud y sentidos opuestos, aplicadas a un cuerpo rígido según dos líneas de acción paralelas.

Sea un par de fuerzas formado por las fuerzas F_1 y F_2 aplicadas respectivamente en los puntos A_1 y A_2 de un cuerpo, rígido (Fig. 2.23 b); el momento del par de fuerzas respecto a un punto cualquiera O es la magnitud vectorial por el vector M_o ligado al punto O

$$M_o = \vec{OA}_1 \times F_1 + \vec{OA}_2 \times F_2$$

Al ser $F_2 = -F_1$, se tiene

$$M_o = \vec{OA}_1 \times F_1 + \vec{OA}_2 - \vec{OA}_1 \times F_1$$

y por tanto

$$M_o = \vec{A_2A_1} \times F_1 \quad (2.18)$$

El vector M_o es un vector perpendicular al plano definido por $\vec{A_2A_1}$ y F_1 , es decir al plano que contiene al par. Su sentido es tal que $\vec{A_2A_1}$, F_1 y M_o forman un triédro directo, o lo que es lo mismo, el sentido de M_o es igual al sentido de avance de un tornillo roscado a derechas que gira en el sentido de rotación señalado por el par. Por último, su magnitud es

$$M_o = F_1 \cdot \vec{A_2A_1} \cdot \sin \theta = F_1 \cdot d \quad (2.19)$$

siendo F_1 la magnitud de las fuerzas del par, y d la distancia entre las dos fuerzas o *brazo del par*.

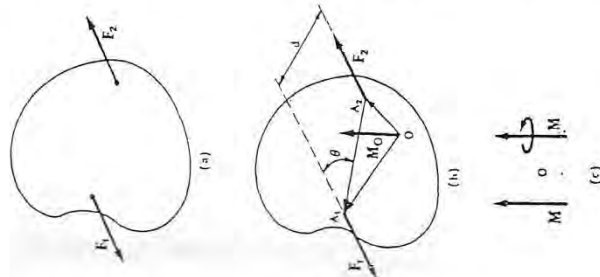


Fig. 2.23

Se observará que el momento del par respecto a un punto cualquiera tiene su magnitud, dirección y sentido independientes del punto elegido. Estos tres elementos definen una magnitud vectorial característica del par llamada *momento del par* que se representa por un vector libre M (Fig. 2.23 c).

Una propiedad importante de la estática del cuerpo rígido establece que *dos pares son equivalentes, es decir, ejercen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido cuando tienen el mismo momento*. Esta propiedad es una consecuencia de la facultad que tienen los pares de moverse libremente en su plano, trasladarse a un plano paralelo, e incluso modificar su brazo con tal de no variar el momento del par. Es decir, que mientras las fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido pueden desplazarse a lo largo de su línea de acción, los pares gozan de una libertad mucho mayor al poder realizar las transformaciones citadas anteriormente. En efecto:

Un par puede trasladarse en la dirección de sus fuerzas (Fig. 2.24). Sobre un cuerpo rígido actúa el par de fuerzas F_1, F_2 de brazo $\vec{A_1A_2}$, que al trasladarse en la dirección de sus fuerzas se transforma en el par de fuerzas F'_1, F'_2 de brazo $\vec{A'_1A'_2}$. La equivalencia de ambos pares es una consecuencia inmediata del teorema de transmisibilidad de las fuerzas.

Un par puede trasladarse en dirección perpendicular a sus fuerzas (Fig. 2.25). El par de fuerzas F_1, F_2 de brazo $\vec{A_1A_2}$ que actúa sobre un cuerpo rígido se traslada perpendicularmente a sus fuerzas transformándose en el par F'_1, F'_2 de brazo $\vec{A'_1A'_2}$. Para demostrar que ambos pares son equivalentes, añadimos al par primitivo en los puntos A_1 y A_2 del cuerpo rígido los dos conjuntos de fuerzas F'_1, F_1 y F'_2, F_2 (iguales y paralelas a las del par primitivo), que por ser iguales y directamente opuestas dos a dos no modifican el estado del cuerpo rígido, por lo que el sistema de fuerzas F_1, F_2, F'_1, F'_2 es equivalente al par de fuerzas F_1, F_2 . Componiendo F_1 con F'_2 , y F_2 con F'_1 , se obtienen dos fuerzas iguales y directamente opuestas aplicadas en el punto A , punto medio de los segmentos $\vec{A_1A'_1}$ y $\vec{A_2A'_2}$; suprimiendo estas dos fuerzas, el sistema queda reducido a las fuerzas F'_1 y F'_2 , que constituyen un par equivalente al par de fuerzas F_1, F_2 .

Un par puede girar en su plano (Fig. 2.26). Supongamos que sobre un cuerpo rígido actúa un par de fuerzas F_1, F_2 que gira en su plano alrededor de un punto A cualquiera, transformándose en el par de fuerzas F'_1, F'_2 . La equivalencia de ambos

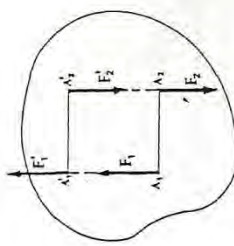


Fig. 2.24

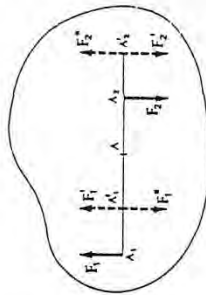


Fig. 2.25

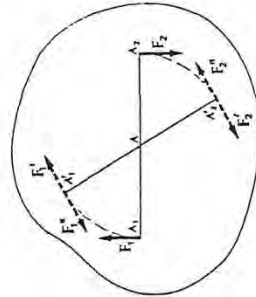


Fig. 2.26

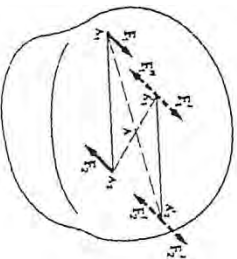


Fig. 2.27

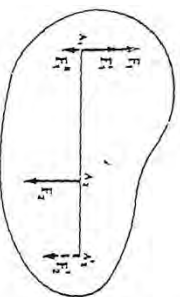


Fig. 2.28

pareas se demuestra añadiendo al par primitivo en los puntos A_1' y A_2' del cuerpo rígido los dos conjuntos de fuerzas F_1', F_2' y F_2', F_1' (de magnitud igual que las fuerzas del par primitivo), que por ser iguales y directamente opuestas dos a dos no modifican el estado del cuerpo rígido, por lo que el sistema de fuerzas $F_1, F_2, F_1', F_2', F_1', F_2'$ es equivalente al par de fuerzas F_1, F_2 . Componiendo F_1 con F_1' y F_2 con F_2' se obtienen dos fuerzas iguales y directamente opuestas que pasan por A y pueden suprimirse. El anterior sistema queda reducido a las fuerzas F_1' y F_2' , que constituyen un par equivalente al par de fuerzas F_1, F_2 . Esta propiedad combinada con las dos anteriores permite a un par moverse libremente en su plano.

Un par puede trasladarse a un plano paralelo (Fig. 2.27). Sobre un cuerpo rígido actúa el par de fuerzas F_1, F_2 que se trasladada fuera de su plano transformándose en el par F_1', F_2' . Para demostrar que ambos pares son equivalentes, se añaden al par primitivo en los puntos A_1' y A_2' del cuerpo rígido dos conjuntos de fuerzas F_1', F_1' y F_2', F_2' (iguales y paralelas a las del par primitivo), que no modifican el estado del cuerpo rígido por ser iguales y directamente opuestas dos a dos. Si componemos F_1 con F_1' y F_2 con F_2' se obtienen dos fuerzas iguales y directamente opuestas aplicadas en A , punto medio de los segmentos A_1A_1' y A_2A_2' ; estas dos fuerzas pueden suprimirse por lo que el sistema queda reducido a las fuerzas F_1' y F_2' , que constituyen un par equivalente al par de fuerzas F_1, F_2 . Un par puede modificar su brazo permaneciendo invariable su momento (Fig. 2.28). Supongamos que queremos transformar el par de fuerzas F_1, F_2 de brazo A_1A_2 en un par equivalente de brazo $A_1'A_2'$. Para ello descomponemos la fuerza F_2 en dos fuerzas paralelas F_2' y F_2'' aplicadas respectivamente en A_1 y A_2' , las cuales satisfarán las ecuaciones

$$F_1'' + F_2' = F_2, \quad \frac{A_1A_2'}{A_2'A_2} = \frac{F_2'}{F_2''}$$

de donde

$$\frac{A_1A_2'}{A_1'A_2} = \frac{A_1A_2}{A_1'A_2} = \frac{F_2'}{F_2' + F_1''} = \frac{F_2'}{F_2''}$$

Componiendo F_1 con F_1'' se obtiene una fuerza F_1' igual y opuesta a F_2' , ya que $F_1' = F_1 - F_1'' = F_2 - F_2' = F_2''$. El par de fuerzas F_1', F_2' se ha transformado en el par F_1', F_2' , cuyo

momento tiene la misma magnitud que el del par primitivo, puesto que

$$F_2' \cdot A_1'A_2' = F_2' \cdot A_1A_2$$

siendo además iguales la dirección y el sentido de ambos pares.

Los cinco casos estudiados comprenden todas las transformaciones posibles de un par en otro equivalente, es decir, que ejerza los mismos efectos sobre el cuerpo rígido. En todos los casos los pares equivalentes tienen el mismo momento, lo que demuestra que el momento es la magnitud característica del par de la que dependen sus efectos sobre los cuerpos rígidos.

Como el momento de un par es una magnitud vectorial, un sistema de pares de momentos M_1, M_2, \dots, M_n será equivalente a un par resultante cuyo momento será la suma de los momentos de los pares componentes. Es decir,

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n \quad (2.20)$$

Esta propiedad puede demostrarse también componiendo los pares, dos a dos. Para ello dos pares situados en planos cualesquiera (Fig. 2.29) se transforman hasta hacer coincidir sus brazos en la recta A_1A_2 , recta de intersección de los dos planos. Componiendo las fuerzas F_1 y F_1' y las fuerzas F_2 y F_2' se obtienen las fuerzas R_1 y R_2 , que constituyen otro par de momento igual a la suma de los momentos de los dos pares componentes; para comprobar esto basta aplicar el teorema de Varignon tomando como origen de momentos el punto A_1 . Si los planos que contienen los pares son paralelos, para componerlos será preciso trasladar los pares a un mismo plano y a continuación hacer las transformaciones necesarias para que tengan el mismo brazo. También en este caso, y por la misma razón, el momento del par resultante es igual a la suma de los momentos de los pares componentes.

En el caso de pares de fuerzas situadas en el mismo plano o en planos paralelos, se acostumbra a representar el momento de un par por una flecha curvada en sentido dextrógiro o sinérgico, según el sentido de dicho momento (Fig. 2.30).

Ejem p l o 2.8. Sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de tres pares de fuerzas situados en el mismo plano (Fig. 2.31). Calcular el momento del par resultante. Datos: $F_1 = 4,000 \text{ kg}$, $d_1 = 1,0 \text{ m}$, $F_2 = 3,000 \text{ kg}$, $d_2 = 4,0 \text{ m}$, $F_3 = 1,500 \text{ kg}$, $d_3 = 6,0 \text{ m}$.

Solución: El momento M del par resultante, según (2.20) será

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

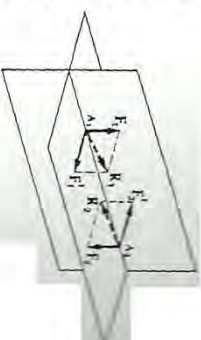


Fig. 2.29

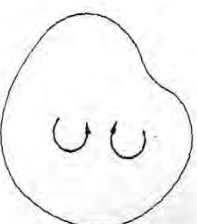


Fig. 2.30

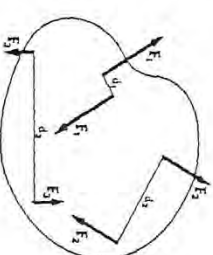


Fig. 2.31

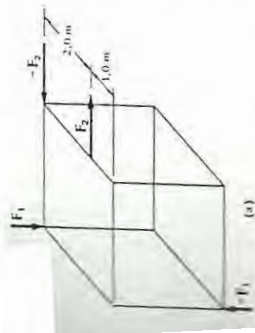
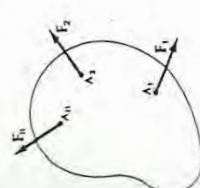


Fig. 2.32



(*)

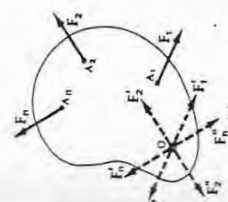


Fig. 2.33

siendo M_1 , M_2 y M_3 los momentos de los pares componentes cuyas direcciones son paralelas por ser perpendiculares al plano que contiene las fuerzas. Tomando como sentido positivo de los momentos de los pares el correspondiente a un giro dextrórum, se tiene

$$M_1 = F_1 \cdot d_1 = 4,000 \text{ m.kg}, \quad M_2 = F_2 \cdot d_2 = 12,000 \text{ m.kg}, \\ M_3 = -F_3 \cdot d_3 = -9,000 \text{ m.kg}$$

El momento del par resultante es

$$M = 4,000 + 12,000 - 9,000 = 7,000 \text{ m.kg}$$

EJEMPLO 2.9. Sobre un cuerpo rígido de forma cúbica actúan los pares de fuerzas $F_1, -F_1$ y $F_2, -F_2$ (Fig. 2.32a). Calcular el momento del par resultante. Datos: $F_1 = 4,000 \text{ kg}$, $F_2 = 8,000 \text{ kg}$.

Solución: El momento M_1 del par de fuerzas $F_1, -F_1$ tiene una magnitud $M_1 = 4,000 \cdot 3 = 12,000 \text{ m.kg}$ y la dirección y sentido representados en la Fig. 2.32b. En la misma figura está representado también con su dirección y sentido el momento del par de fuerzas $F_2, -F_2$, cuya magnitud es $M_2 = 8,000 \cdot 2 = 16,000 \text{ m.kg}$. La magnitud del momento M del par resultante será

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} = 20,000 \text{ m.kg}$$

El ángulo θ que forma el momento M con el momento M_1 se determina mediante la expresión

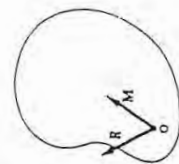
$$\cos \theta = \frac{M_1}{M} = 0,6$$

de donde

$$\theta = 53^\circ 8'$$

2.8. Composición de fuerzas. Caso general

Un sistema de fuerzas cualesquiera que actúa sobre un cuerpo rígido puede siempre reducirse a una fuerza resultante aplicada en un punto elegido arbitrariamente y a un par resultante. En efecto, sea un sistema de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n , aplicadas a un cuerpo rígido en los puntos A_1, A_2, \dots, A_n (Fig. 2.33a). En un punto O cualquiera del cuerpo rígido se aplican dos fuerzas F_1' y F_1'' (Fig. 2.33b) iguales y directamente opuestas, de la misma magnitud y dirección que F_1 , lo que no modifica el estado del cuerpo; de este modo se ha sustituido la acción de la fuerza F_1 aplicada en el punto A_1 por la acción conjunta de una fuerza igual F_1' aplicada en un punto O y de un par formado por las fuerzas F_1 y F_1'' . Si realizamos análogas sustituciones con las restantes fuerzas, el sistema de fuerzas dado se transforma en un sistema equivalente formado



(c)

Fig. 2.33

por las fuerzas F_1', F_2', \dots, F_n' aplicadas en el punto O y los pares $F_1 F_1'', F_2 F_2'', \dots, F_n F_n''$. Componiendo las fuerzas F_1', F_2', \dots, F_n' concurrentes en O , se obtiene su fuerza resultante R aplicada en O , y componiendo los pares se obtiene su par resultante de momento M (Fig. 2.33c). De este modo, se ha reemplazado el sistema de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n por un sistema equivalente formado por una fuerza R , llamada **resultante general**, aplicada en el punto O elegido arbitrariamente y un par cuyo momento M se llama **momento resultante relativo al punto O** . La composición de fuerzas realizada de esta forma se denomina **reducción del sistema de fuerzas al punto O** . La resultante general está determinada por la ecuación vectorial

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n \quad (2.21)$$

Se observa que la magnitud, dirección y sentido de la resultante general son independientes del punto O elegido.

El momento resultante será la suma de los momentos de los pares componentes. Es decir

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum M_i \quad (2.22)$$

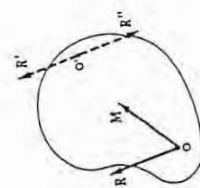
Siendo M_i el momento del par formado por las dos fuerzas F_i y F_i'' , que es igual, en magnitud, dirección y sentido al momento de la fuerza F_i respecto al punto O , por esta razón, el momento resultante M depende del punto O elegido. Con el fin de dejar establecida esta dependencia supondremos el momento resultante relativo al punto O aplicado en dicho punto, lo que permite definir el **momento resultante relativo al punto O , como la suma de los momentos respecto a O de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo rígido**. Es decir,

$$M = \sum \vec{OA}_i \times F_i \quad (2.23)$$

Para reducir el sistema de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n a otro punto O' (Fig. 2.34a) basta reducir al punto O' el sistema equivalente R, M relativo al punto O . La resultante general R' aplicada en el punto O' será igual a la resultante general R , es decir,

$$R' = R \quad (2.24)$$

El momento resultante M' relativo al punto O' se obtendrá componiendo el par resultante de momento M relativo al



(*)

Fig. 2.34

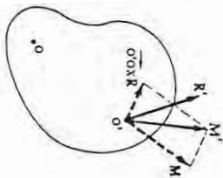


Fig. 2.34

punto O y el par de fuerzas R, R' . Por consiguiente, el momento resultante relativo al punto O' es igual a la suma del momento resultante relativo al punto O y del momento respecto al punto O' de la resultante general R aplicada en el punto O (Fig. 2.34b). Es decir

$$M' = M + \vec{O'O} \times R \quad (2.25)$$

Eligiendo el punto O como origen de un sistema de ejes coordenados, sean X, Y, Z las coordenadas del vector que representa la fuerza R , y x', y', z' las coordenadas del punto de aplicación de dicha fuerza; de la ecuación (2.21) se deduce que las coordenadas X, Y, Z del vector que representa la resultante general son

$$X = \sum X_i, \quad Y = \sum Y_i, \quad Z = \sum Z_i \quad (2.26)$$

De las ecuaciones (2.22) y (2.10) se deducen las coordenadas M_x, M_y, M_z del vector que representa el momento resultante relativo al punto O

$$\begin{aligned} M_x &= \sum M_{xi} = \sum (y_i z_i - z_i y_i) \\ M_y &= \sum M_{yi} = \sum (z_i x_i - x_i z_i) \\ M_z &= \sum M_{zi} = \sum (x_i y_i - y_i x_i) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Si el sistema de fuerzas se reduce al punto O' de coordenadas x', y', z' , de acuerdo con (2.24) las coordenadas del vector que representa la resultante general R' aplicada en el punto O' son

$$\begin{aligned} X' &= X = \sum X_i \\ Y' &= Y = \sum Y_i \\ Z' &= Z = \sum Z_i \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.25) las coordenadas del vector que representa el momento resultante relativo al punto O' son

$$\begin{aligned} M'_x &= M_x - (y'z - z'y) \\ M'_y &= M_y - (z'x - x'z) \\ M'_z &= M_z - (x'y - y'x) \end{aligned} \quad (2.28)$$

ecuaciones que relacionan las coordenadas de los vectores que representan los momentos resultantes relativos a un punto cualquiera O' y al punto O origen de coordenadas.

COMPOSICIÓN

Multiplicando escalarmente las ecuaciones (2.25) y (2.24) miembro a miembro, se tiene

$$M' \cdot R' = M \cdot R + (\vec{O'O} \times R) \cdot R$$

y por ser nulo el producto mixto $(\vec{O'O} \times R) \cdot R$, la igualdad anterior se reduce a

$$M' \cdot R' = M \cdot R \quad (2.29)$$

ecuación que expresa que el producto escalar del momento resultante relativo a un punto cualquiera y de la resultante general es constante. Puesto que la resultante R y su producto escalar por el momento resultante M son constantes, la proyección del momento resultante, relativo a cualquier punto, sobre la resultante general también será constante. A las magnitudes R y $M \cdot R$ se les llama invariantes del sistema de fuerzas. Cualquiera que sea el origen de coordenadas y las orientaciones de los ejes rectangulares, son constantes las expresiones

$$X^2 + Y^2 + Z^2, \quad M_x \cdot X + M_y \cdot Y + M_z \cdot Z$$

El primero de estos invariantes $X^2 + Y^2 + Z^2$ es el cuadrado de la magnitud de la resultante general R . El segundo invariante se denomina *autonomomento* del sistema de fuerzas y es igual al producto escalar del momento resultante relativo a un punto cualquiera y de la resultante general.

A continuación se determina la posición de un punto $O'(x', y', z')$ tal que el momento resultante M' relativo a ese punto sea paralelo a la resultante general R . Para que esto se verifique es necesario, de acuerdo con (1.28), que las coordenadas M'_x, M'_y, M'_z de M' sean proporcionales a las coordenadas X, Y, Z de R . Es decir,

$$\frac{M_x - (y'z - z'y)}{X} = \frac{M_y - (z'x - x'z)}{Y} = \frac{M_z - (x'y - y'x)}{Z} \quad (2.30)$$

Estas ecuaciones establecen que el lugar geométrico de los puntos O' es una recta paralela a la resultante general que se llama *eje central* del sistema de fuerzas.

Si el sistema de fuerzas se reduce a un punto O' cualquiera del eje central, la resultante general y el momento resultante están dirigidos según dicho eje, ambos en el mismo sentido o

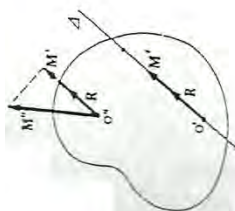


Fig. 2.35

en sentido opuesto, según que $M_x X + M_y Y + M_z Z$ sea positivo o negativo. Mientras que el momento M' relativo a un punto cualquiera O' del eje central Δ tiene su magnitud constante M' y su dirección coincidente con la del eje Δ (Fig. 2.35), el momento resultante M'' relativo a un punto cualquiera O'' , situado fuera del eje central, tiene su componente según la dirección del eje central igual a M' . Ello demuestra que la magnitud M' del momento resultante relativo a un punto cualquiera O' del eje central es mínima, por lo que a M' se le denomina *momento mínimo* y se representa por M_m . Según (2.29) la magnitud de M_m es

$$M_m = \frac{M_x \cdot X + M_y \cdot Y + M_z \cdot Z}{R} = \frac{M_x \cdot X + M_y \cdot Y + M_z \cdot Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \quad (2.31)$$

Un sistema de fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido se reduce a un par único o a una fuerza única, cuando el automomento es nulo. En efecto:

Un sistema de fuerzas se reduce a un par único cuando el automomento $M \cdot R$ es nulo, siendo la resultante general R nula y el momento resultante M relativo a un punto cualquiera distinto de cero. Las condiciones $M \cdot R = 0$, $R = 0$, $M \neq 0$ se expresan analíticamente por las ecuaciones

$$\begin{aligned} M_x X + M_y Y + M_z Z &= 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= 0 \\ M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 &> 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Cuando el sistema de fuerzas se reduce a un par único, la resultante general R es nula y también es nulo el automomento $M \cdot R$, pero en cambio el momento resultante M relativo a un punto cualquiera es constante y distinto de cero. Recíprocamente, si son nulos el automomento $M \cdot R$ y la resultante general R y no lo es el momento resultante relativo a un punto cualquiera O , según (2.25) el momento resultante M' relativo a cualquier otro punto O' es igual a M , lo que significa que el sistema es equivalente a un par. En este caso no existe eje central.

Un sistema de fuerzas se reduce a una fuerza única cuando el automomento $M \cdot R$ es nulo, siendo la resultante general R no nula, es decir, cuando el momento resultante relativo a un

punto cualquiera es perpendicular a la resultante general. Estas condiciones $M \cdot R = 0$ y $R \neq 0$ se expresan analíticamente por las ecuaciones

$$\begin{aligned} M_x X + M_y Y + M_z Z &= 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &> 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Cuando el sistema de fuerzas se reduce a una fuerza única, como el eje central coincide con la línea de acción de dicha fuerza, el momento mínimo es nulo y, por consiguiente, según (2.31) el automomento será también nulo. Recíprocamente, si el automomento es nulo y no lo es la resultante general, el momento mínimo será nulo y por tanto, si reducimos el sistema a un punto cualquiera del eje central obtendremos un sistema equivalente formado sólo por la fuerza resultante, ya que el par resultante es nulo por serlo su momento, que es el momento mínimo.

Cuando un sistema de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n aplicadas a un cuerpo rígido se reduce a una fuerza única R , el momento resultante M relativo a un punto cualquiera O será el mismo si sobre el cuerpo rígido actúa el sistema de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n (Fig. 2.36a) que si actúa el sistema equivalente constituido por la resultante R (Fig. 2.36b). Por tanto, si el sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido se reduce a una fuerza resultante R única, la suma de los momentos respecto a un punto cualquiera O de todas las fuerzas del sistema es igual al momento respecto al mismo punto O de la fuerza R resultante del sistema (Teorema de Varignon generalizado).

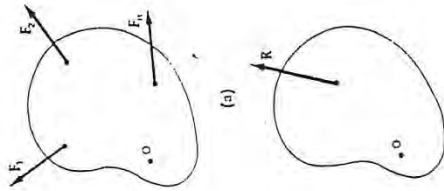


Fig. 2.36

EJEMPLO 2.10. Reducir al punto O el sistema de cinco fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido (Fig. 2.37). Datos: $F_1 = 100$ kg, $F_2 = 500$ kg, $F_3 = 200$ kg, $F_4 = 400$ kg, $F_5 = 200$ kg.

Solución: Las proyecciones de las fuerzas según los ejes, y las coordenadas de un punto cualquiera de su línea de acción son, respectivamente

$$\begin{aligned} F_1: & (X_1 = 100 \text{ kg}, Y_1 = 0, Z_1 = 0), \quad A(0, 0, 2) \\ F_2: & (X_2 = -500 \cdot \frac{3}{5} = -300 \text{ kg}, Y_2 = 500 \cdot \frac{4}{5} = 400 \text{ kg}, Z_2 = 0), \quad B(0, 4, 2) \\ F_3: & (X_3 = 0, Y_3 = 0, Z_3 = 200 \text{ kg}), \quad E(0, 4, 0) \\ F_4: & (X_4 = 0, Y_4 = 400 \text{ kg}, Z_4 = 0), \quad E(0, 4, 0) \\ F_5: & (X_5 = 0, Y_5 = 0, Z_5 = -200 \text{ kg}), \quad G(3, 4, 0) \end{aligned}$$

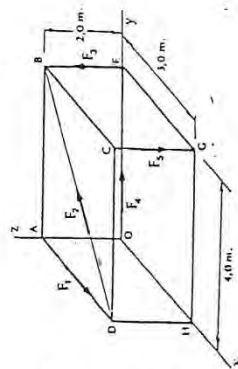


Fig. 2.37

Según (2.26), las proyecciones según los ejes x, y, z de la resultante general son

$$\begin{aligned} X &= \sum X_i = 100 - 300 + 0 + 0 + 0 = -200 \text{ kg} \\ Y &= \sum Y_i = 0 + 400 + 0 + 400 + 0 = 800 \text{ kg} \\ Z &= \sum Z_i = 0 + 0 + 200 + 0 - 200 = 0 \end{aligned}$$

La magnitud de la resultante general es

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(-200)^2 + 800^2 + 0} = 824,6 \text{ kg}$$

Los ángulos que forma la resultante general con los ejes coordenados se determinan mediante las expresiones

$$\cos \alpha = \frac{X}{R} = -0,2425, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R} = 0,9702, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R} = 0$$

o sea

$$\alpha = 104^\circ 2', \quad \beta = 14^\circ 2', \quad \gamma = 90^\circ$$

Según (2.27), las proyecciones según los ejes x, y, z del momento resultante relativo al punto O son

$$\begin{aligned} M_x &= \sum M_{xi} = 0 - 2 \cdot 400 + 4 \cdot 200 + 0 + 4(-200) = -800 \text{ m.kg} \\ M_y &= \sum M_{yi} = 2 \cdot 100 + 2(-300) + 0 + 0 - 3(-200) = 200 \text{ m.kg} \\ M_z &= \sum M_{zi} = 0 - 4(-300) + 0 + 0 + 0 = 1.200 \text{ m.kg} \end{aligned}$$

La magnitud del momento resultante relativo al punto O es

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 1.456 \text{ m.kg}$$

Los ángulos que forma M con los ejes coordenados se determinan mediante las expresiones

$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= \frac{M_x}{M} = -0,5492, & \cos \beta' &= \frac{M_y}{M} = 0,1377 \\ \cos \gamma' &= \frac{M_z}{M} = 0,8238 \end{aligned}$$

de donde

$$\alpha' = 123^\circ 19', \quad \beta' = 82^\circ 6', \quad \gamma' = 34^\circ 32'$$

Ejemplo 2.11. Sobre un bloque prismático actúa el sistema de fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5 (Fig. 2.38). Reducir el sistema al punto O . Datos: $F_1 = 5.000 \text{ kg}$, $F_2 = 3.000 \text{ kg}$, $F_3 = 1.000 \text{ kg}$, $F_4 = 3.000 \text{ kg}$, $b = 0,30 \text{ m}$, $h = 0,40 \text{ m}$, $a = 1,0 \text{ m}$.

Solución: Las coordenadas de los vectores que representan las fuerzas del sistema son:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, & Y_1 &= F_1 \cos \beta_1 = 5.000 \cdot \frac{4}{5} = 4.000 \text{ kg}, \\ Z_1 &= -F_1 \sin \beta_1 = -5.000 \cdot \frac{3}{5} = -3.000 \text{ kg} \\ X_2 &= -F_2 = -3.000 \text{ kg}, & Y_2 &= 0, & Z_2 &= 0 \\ X_3 &= 0, & Y_3 &= -F_3 = -1.000 \text{ kg}, & Z_3 &= 0 \\ X_4 &= 0, & Y_4 &= 0, & Z_4 &= F_4 = 3.000 \text{ kg} \end{aligned}$$

Las coordenadas del vector que representa la resultante general son

$$\begin{aligned} X &= \sum X_i = -3.000 \text{ kg} \\ Y &= \sum Y_i = 3.000 \text{ kg} \\ Z &= \sum Z_i = 0 \end{aligned}$$

La magnitud de la resultante general es

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 4.242 \text{ kg}$$

Los ángulos que forma la resultante general con los ejes coordenados se determinan mediante las expresiones

$$\cos \alpha = \frac{X}{R} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R} = 0$$

de donde

$$\alpha = 135^\circ, \quad \beta = 45^\circ, \quad \gamma = 90^\circ$$

Las coordenadas del vector que representa el momento resultante relativo al punto O se obtienen directamente hallando los momentos respecto a los ejes de todas las fuerzas y sumando algebraicamente los correspondientes a cada eje. Para ello es conveniente descomponer cada fuerza en sus componentes según los ejes, ya que del teorema de Varignon se deduce que el momento respecto a un eje de una fuerza es igual a la suma de los momentos respecto al mismo eje de sus fuerzas componentes. En este ejemplo todas las fuerzas son paralelas a algún eje coordenado, excepto F_1 , cuyas componentes según los ejes x e y son F_1' y F_1'' respectivamente. Utilizando la ecuación (2.9)

$$\begin{aligned} M_{x1} &= 0, & M_{y1} &= F_1' \cdot 3a, & M_{z1} &= F_1'' \cdot 3a \\ M_{x2} &= 0, & M_{y2} &= F_2 \cdot \frac{b}{2}, & M_{z2} &= -F_2 \cdot \frac{h}{2} \\ M_{x3} &= -F_3 \cdot \frac{b}{2}, & M_{y3} &= 0, & M_{z3} &= -F_3 \cdot 2a \\ M_{x4} &= -F_4 \cdot \frac{h}{2}, & M_{y4} &= -F_4 \cdot a, & M_{z4} &= 0 \end{aligned}$$

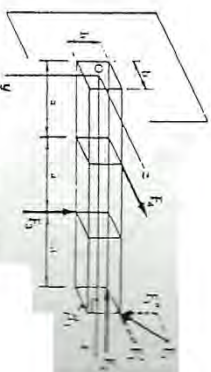


Fig. 2.38

Sumando algebraicamente los momentos correspondientes a cada eje, se obtiene

$$\begin{aligned}M_x &= \sum M_{xi} = -F_3 \frac{b}{2} - F_4 \frac{h}{2} \\M_y &= \sum M_{yi} = F_1' \cdot 3a + F_2 \cdot \frac{b}{2} - F_4' \cdot a \\M_z &= \sum M_{zi} = F_1'' \cdot 3a - F_2 \cdot \frac{h}{2} - F_3 \cdot 2a\end{aligned}$$

Sustituyendo los datos y $F_1' = 3.000$ kg, $F_1'' = 4.000$ kg resulta

$$M_x = -750 \text{ m.kg}, \quad M_y = 6.450 \text{ m.kg}, \quad M_z = 9.400 \text{ m.kg}$$

EjemPlo 2.12. Determinar el eje central, el automomento y el momento mínimo del sistema de fuerzas del ejemplo 2.11.

Solución: Sustituyendo los valores

$$\begin{aligned}X &= -3.000 \text{ kg}, \quad Y = 3.000 \text{ kg}, \quad Z = 0 \\M_x &= -750 \text{ m.kg}, \quad M_y = 6.450 \text{ m.kg}, \quad M_z = 9.400 \text{ m.kg}\end{aligned}$$

en las ecuaciones (2.30), se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{-750 - (y' \cdot 0 - z' \cdot 3.000)}{-3.000} &= \frac{6.450 - [z'(-3.000) - x' \cdot 0]}{3.000} \\&= \frac{9.400 - [x' \cdot 3.000 - y'(-3.000)]}{0}\end{aligned}$$

de donde

$$z' = -0,95, \quad x' + y' = 3,13$$

que son las ecuaciones del eje central del sistema de fuerzas. El automomento del sistema es $M_x X + M_y Y + M_z Z$; sustituyendo los valores numéricos se tiene

$$(-750)(-3.000) + 6.450 \cdot 3.000 + 9.400 \cdot 0 = 21,6 \cdot 10^4 \text{ m.kg}^2$$

El momento mínimo del sistema es

$$M_m = \frac{M_x X + M_y Y + M_z Z}{R} = \frac{21,6 \cdot 10^4}{4,242} = 5,092 \text{ m.kg}^2$$

EjemPlo 2.13. Sobre las aristas de un bloque prismático actúa el sistema de fuerzas F_1 , F_2 , F_3 y F_4 (Fig. 2.39). Siendo $F_1 = 1.000$ kg, $F_2 = 500$ kg, $F_3 = 2.000$ kg, determinar la magnitud de la fuerza F_4 para que el sistema se reduzca a una fuerza resultante única. Hallar la magnitud de la fuerza resultante, los ángulos que forma con los ejes coordenados y su distancia al punto O.

COMPOSICION DE FUERZAS. CASO GENERAL

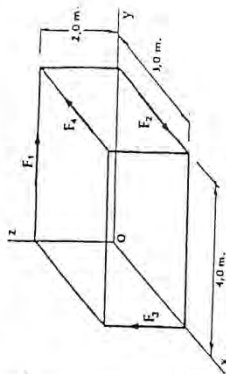


Fig. 2.39

Solución: Según (2.26) las coordenadas del vector que representa la resultante general son

$$\begin{aligned}X &= \sum X_i = 0 + 500 + 0 - F_4 = 500 - F_4 \\Y &= \sum Y_i = 1.000 + 0 + 0 + 0 = 1.000 \\Z &= \sum Z_i = 0 + 0 + 2.000 + 0 = 2.000\end{aligned}$$

Utilizando (2.9), las coordenadas del vector que representa el momento resultante relativo al punto O son

$$\begin{aligned}M_x &= -F_1 \cdot 2 = -2.000 \\M_y &= -F_2 \cdot 3 - F_4 \cdot 2 = -6.000 - 2F_4 \\M_z &= -F_3 \cdot 4 + F_4 \cdot 4 = -2.000 + 4F_4\end{aligned}$$

La condición para que este sistema de fuerzas se reduzca a una fuerza única es que su automomento sea nulo. Es decir que $M_x X + M_y Y + M_z Z = 0$, lo que exige que $-2.000(500 - F_4) + (-6.000 - 2F_4) \cdot 1.000 + (-2.000 + 4F_4) \cdot 2.000 = 0$, de donde

$$F_4 = 1.375 \text{ kg}$$

Las coordenadas del vector que representa la resultante son

$$\begin{aligned}X &= 500 - 1.375 = -875 \text{ kg}, \quad Y = 1.000 \text{ kg}, \quad Z = 2.000 \text{ kg} \\ \text{su magnitud es}\end{aligned}$$

$$R = \sqrt{(-875)^2 + (1.000)^2 + (2.000)^2} = 2.401 \text{ Kg}$$

y los ángulos que forma con los ejes se determinan mediante las expresiones

$$\cos \alpha = \frac{X}{R} = -0,3644, \quad \cos \beta = \frac{Y}{R} = 0,4164, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{R} = 0,8328$$

de donde

$$\alpha = 111^\circ 22', \quad \beta = 65^\circ 23', \quad \gamma = 33^\circ 37'$$

Según el teorema de Varignon generalizado, el momento resultante relativo al punto O es igual al momento de la resultante respecto al punto O. Si M es el momento resultante relativo al punto O, se verifica

$$M = R \cdot d$$

siendo d la distancia de la resultante al punto O. Es decir

$$d = \frac{M}{R} = \frac{\sqrt{(-2.000)^2 + (-8.750)^2 + (3.500)^2}}{2.401} = 4,01 \text{ m}$$

EjemPlo 2.14. Sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de fuerzas paralelas (Fig. 2.40). Demostrar que el sistema se reduce a una fuerza

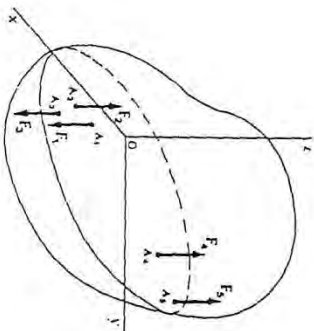


Fig. 2.40

resultante y determinarla. Datos: $F_1 = 2.000 \text{ kg}$, $A_1(2, 1, 0)$, $F_2 = 1.500 \text{ kg}$, $A_2(3, 1, 0)$, $F_3 = 4.000 \text{ kg}$, $A_3(4, 2, 0)$, $F_4 = 6.000 \text{ kg}$, $A_4(-2, 3, 0)$, $F_1 = 3.500 \text{ kg}$, $A_1(-3, 4, 0)$.

Las coordenadas de los puntos de aplicación están expresadas en metros.

Solución: Componiendo las fuerzas paralelas dos a dos, el sistema se reduce bien a una fuerza única, bien a un par o bien a cero. Las coordenadas del vector que representa la resultante son

$$X = 0, Y = 0,$$

$$Z = \sum Z_i = -2.000 + 1.500 - 4.000 + 6.000 + 3.500 = 5.000 \text{ kg}$$

Al ser $R \neq 0$, el sistema se reduce a una fuerza única, cuya magnitud es $R = 5.000 \text{ kg}$. Su dirección es paralela a la de las fuerzas dadas, y su sentido coincide con el del semieje positivo z , ya que $Z > 0$.

Del teorema de Varignon generalizado se deduce que

$$\sum Z_i y_i = Z y_R, \quad -\sum Z_i x_i = -Z x_R$$

Siendo x_i, y_i y x_R, y_R , respectivamente, las coordenadas x, y del punto de aplicación A_i de la fuerza F_i y de un punto cualquiera A' , situado en la línea de acción de la resultante. Sustituyendo los valores dados y la magnitud de la resultante, se tiene

$$-2.000 \cdot 1 + 1.500 \cdot 1 - 4.000 \cdot 2 + 6.000 \cdot 3 + 3.500 \cdot 4 = 5.000 y_R$$

$$2.000 \cdot 2 - 1.500 \cdot 3 + 4.000 \cdot 4 - 6.000 \cdot (-2) - 3.500 \cdot (-3) = -5.000 x_R$$

de donde

$$y_R = 4,7 \text{ m}, \quad x_R = -7,6 \text{ m}$$

2.9. Condiciones de equilibrio

Se llaman *fuerzas internas* de un sistema de cuerpos a las acciones que mutuamente se ejercen los diferentes puntos materiales del sistema. Según el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, las fuerzas internas son iguales y opuestas dos a dos, y por consiguiente, si el punto material A' del mismo sistema, el punto A' ejerce sobre el punto material A del mismo sistema una fuerza F sobre el punto material A' igual y directamente opuesta a F . En la figura 2.41 se observa que los puntos materiales A y A' pueden pertenecer al mismo cuerpo o bien a dos cuerpos diferentes del mismo sistema. Por otra parte, se llaman *fuerzas externas* a un sistema de cuerpos, a las acciones que ejercen sobre los puntos materiales del sistema los puntos materiales de otro sistema.

Un sistema de cuerpos se halla en *equilibrio* cuando su estado no se modifica con el tiempo, es decir, cuando no se

deforma y permanece en reposo o en movimiento con velocidad constante. Para que un sistema de cuerpos esté en equilibrio, es necesario que el sistema de fuerzas externas aplicadas al sistema de cuerpos sea equivalente a cero. En efecto, si el sistema de cuerpos se halla en equilibrio, cada uno de sus puntos materiales también estará en equilibrio, lo que hace que la suma de las fuerzas externas e internas aplicadas a cada uno de ellos sea igual a cero. Componiendo todas las fuerzas que actúan sobre todos los puntos materiales del sistema de cuerpos, obtendremos un sistema equivalente a cero; como las fuerzas internas son iguales y opuestas dos a dos, el sistema de fuerzas internas será siempre equivalente a cero, lo que obliga a que, cuando el sistema de cuerpos esté en equilibrio, el sistema de fuerzas externas sea equivalente a cero.

En el caso de un sistema constituido por un solo cuerpo rígido, la condición anterior, necesaria para el equilibrio, es también suficiente. En efecto, si el sistema de fuerzas externas es equivalente a cero, como el sistema de fuerzas internas es siempre equivalente a cero, resulta que el sistema formado por todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo rígido es equivalente a cero, por lo que su efecto sobre el cuerpo es el mismo que si actuasen sobre él dos fuerzas iguales y directamente opuestas; estas dos fuerzas no modifican el estado del cuerpo rígido y por tanto la condición anterior, además de ser necesaria, es suficiente. Por el contrario, si el cuerpo no fuese rígido, su estado se modificaría deformándose al tener aplicadas dos fuerzas iguales y directamente opuestas. Por consiguiente, la condición necesaria y suficiente para que un cuerpo rígido esté en equilibrio, es que el sistema de fuerzas externas aplicadas al cuerpo sea equivalente a cero. Esta condición exige que el sistema de fuerzas externas aplicadas al cuerpo rígido tenga nulos la resultante general R y el momento resultante M relativo a cualquier punto O . Es decir

$$R = 0, \quad M = 0 \quad (2.34)$$

Tomando el punto O como origen de un sistema de ejes rectangulares, respecto a los cuales X, Y, Z y M_x, M_y, M_z son las proyecciones de R y M , respectivamente, las ecuaciones vectoriales (2.34) se expresan en la forma

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0 \quad (2.35)$$

Teniendo en cuenta (2.26) y (2.27) las ecuaciones anteriores equivalen a

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0, \\ \sum M_{xi} &= 0, \quad \sum M_{yi} = 0, \quad \sum M_{zi} = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Estas seis ecuaciones son las *ecuaciones generales de equilibrio* del cuerpo rígido.

Si sobre el cuerpo rígido actúa un sistema de fuerzas externas concurrentes en una recta, tomando esa recta como eje z se anulan las proyecciones M_{xi} , y las ecuaciones de equilibrio se reducen a

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0 \\ \sum M_{xi} &= 0, \quad \sum M_{yi} = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Cuando las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rígido son concurrentes en un punto O , tomando ese punto como origen de coordenadas se anulan M_{xi} , M_{yi} , M_{zi} y las ecuaciones de equilibrio se reducen a

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0 \quad (2.38)$$

Por último, si sobre el cuerpo rígido actúa un sistema de fuerzas coplanarias, tomando el plano que contiene las fuerzas como plano xy , son nulas las proyecciones Z_i , M_{xi} , M_{yi} y las ecuaciones de equilibrio se reducen a

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_{zi} = 0 \quad (2.39)$$

En el caso de un sistema de cuerpos rígidos, la condición necesaria y suficiente para que el sistema de cuerpos esté en equilibrio es que sea equivalente a cero el sistema de fuerzas externas aplicadas a cada cuerpo, sistema de fuerzas que incluye las acciones que sobre cada cuerpo ejercen los cuerpos de su mismo sistema.

EJEMPLO 2.15 Sobre un cuerpo rígido en forma de paralelepípedo rectangular actúa el sistema de fuerzas F_0 , F_1 , F_2 , F_3 y un par de momento M_A (Fig. 2.42). Siendo $F_1 = 2.000$ kg, $F_2 = 1.500$ kg y $F_3 = 1.000$ kg, determinar la fuerza F_0 y el momento M_A del par necesarios para que el cuerpo esté en equilibrio. Datos: $a = 2.0$ m, $b = 5.0$ m, $c = 4.0$ m.

Solución: Sean X_0 , Y_0 , Z_0 y M_{Ax} , M_{Ay} , M_{Az} , respectivamente, las proyecciones según los ejes x , y , z de la fuerza F_0 aplicada en el punto O y del momento M_A del par. De (2.36) se deduce

$$\begin{aligned} X_0 - F_2 &= 0, \quad Y_0 + F_1 = 0, \quad Z_0 + F_3 = 0 \\ M_{Ax} + F_3 \cdot b &= 0, \quad M_{Ay} - F_3 \cdot c - F_1 \cdot a = 0, \quad M_{Az} = 0 \end{aligned}$$

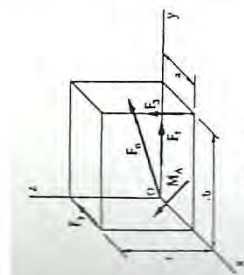


Fig. 2.42

Sustituyendo los datos se obtiene

$$\begin{aligned} X_0 &= 1.500 \text{ kg}, \quad Y_0 = -2.000 \text{ kg}, \quad Z_0 = -1.000 \text{ kg}, \\ M_{Ax} &= -5.000 \text{ m kg}, \quad M_{Ay} = 8.000 \text{ m kg}, \quad M_{Az} = 0 \end{aligned}$$

La magnitud de F_0 es

$$F_0 = \sqrt{(1.500)^2 + (-2.000)^2 + (-1.000)^2} = 2.692 \text{ kg}$$

Los ángulos que F_0 forma con los ejes coordenados se obtienen de

$$\cos \alpha_0 = \frac{X_0}{F_0} = 0.5571, \quad \cos \beta_0 = \frac{Y_0}{F_0} = -0.7428, \quad \cos \gamma_0 = \frac{Z_0}{F_0} = -0.3714$$

de donde

$$\alpha_0 = 56^\circ 9', \quad \beta_0 = 137^\circ 58', \quad \gamma_0 = 111^\circ 48'$$

La magnitud de M_A es

$$M_A = \sqrt{(-5.000)^2 + (8.000)^2} + 0 = 9.433 \text{ m kg}$$

Los ángulos que M_A forma con los ejes coordenados se obtienen de

$$\cos \alpha' = \frac{M_{Ax}}{M_A} = -0.5299, \quad \cos \beta' = \frac{M_{Ay}}{M_A} = 0.8480, \quad \cos \gamma' = \frac{M_{Az}}{M_A} = 0$$

de donde

$$\alpha' = 122^\circ, \quad \beta' = 32^\circ, \quad \gamma' = 90^\circ$$

EJEMPLO 2.16. Un cuerpo rígido prismático (Fig. 2.43) está en equilibrio sometido a la acción de la fuerza F_0 aplicada a lo largo de la arista EH y de seis fuerzas más, cuyas líneas de acción son las rectas AA' , BB' , CC' , DD' y AD' . Determinar la magnitud y sentido de estas seis fuerzas. Datos: $F_0 = 2.000$ kg, $a = 3.0$ m, $b = 4.0$ m, $c = 2.0$ m, $d = 3.0$ m.

Solución: Se elige el punto B' como origen de un sistema de ejes coordenados, cuyo eje z coincide con la arista $B'E$ y los ejes x , y son paralelos a las aristas BA' y BC' del cuerpo. A las fuerzas F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , F_5 y F_6 se les supone el sentido representado en la figura. Por estar el cuerpo en equilibrio, según (2.36) serán nulas las sumas algebraicas de las proyecciones según los ejes coordenados de las fuerzas externas aplicadas, así como las sumas algebraicas de sus momentos respecto a los mismos ejes. Es decir

$$\begin{aligned} -F_1 \cos \alpha &= 0 \\ -F_2 \cos \beta - F_3 \cos \beta + F_6 &= 0 \\ F_1 + F_2 + F_3 \sin \beta + F_4 \sin \alpha + F_5 + F_6 \sin \beta &= 0 \\ F_3 \sin \beta \cdot b + F_4 \sin \alpha \cdot b + F_1 \cdot b + F_2 \sin \beta \cdot b - F_6(c+d) &= 0 \\ -F_1 a - F_2 \sin \alpha \cdot a - F_4 a - F_5 \sin \beta \cdot a &= 0 \\ F_4 \cos \alpha \cdot b - F_5 \cos \beta \cdot a + F_6 \cdot a &= 0. \end{aligned}$$

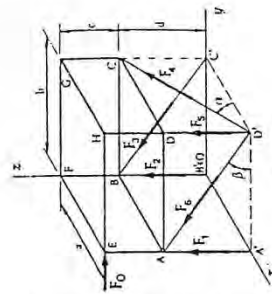


Fig. 2.43

Sustituyendo los datos y $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \beta = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$, del sistema de ecuaciones se obtiene

$$F_1 = -2,500 \text{ kg}, F_2 = 0, F_3 = 0, F_4 = 0, F_5 = 1,000 \text{ kg}, F_6 = 2,500 \text{ kg}$$

El signo negativo de F_1 significa que el sentido de esta fuerza es contrario al que se ha supuesto en la figura 2.43.

PROBLEMAS

2.1. Hallar el momento respecto al origen de coordenadas de la fuerza $F(X=300 \text{ kg}, Y=500 \text{ kg}, Z=200 \text{ kg})$ que pasa por el punto A de coordenadas $x_A=0, y_A=-3,0 \text{ m}, z_A=2,0 \text{ m}$.

2.2. Hallar el momento respecto al punto $O'(3, -1, 2)$ de la fuerza $F(200, 0, 100)$, que pasa por el punto $A(-1, 0, 4)$. La fuerza está expresada en kilogramos y las longitudes en metros.

2.3. Hallar el momento respecto al origen de coordenadas de la resultante del sistema de fuerzas $F_1(X_1=1,000 \text{ kg}, Y_1=-2,000 \text{ kg}, Z_1=0)$, $F_2(X_2=0, Y_2=500 \text{ kg}, Z_2=-1,000 \text{ kg})$, $F_3(X_3=1,500 \text{ kg}, Y_3=0, Z_3=4,000 \text{ kg})$ concurrentes en el punto A de coordenadas $x_A=-5 \text{ m}, y_A=3 \text{ m}, z_A=-2 \text{ m}$.

2.4. Hallar el momento de la resultante del sistema de fuerzas del problema anterior respecto al punto O' de coordenadas $x_{O'}=4 \text{ m}, y_{O'}=-2 \text{ m}, z_{O'}=1 \text{ m}$.

2.5. Hallar la suma de los momentos respecto al punto O de un sistema de fuerzas coplanarias. Datos: $F_1=150 \text{ kg}, F_2=300 \text{ kg}, F_3=500 \text{ kg}, F_4=400 \text{ kg}, OA_1=2,0 \text{ m}, OA_2=2,5 \text{ m}, OA_3=3,0 \text{ m}, OA_4=2,0 \text{ m}, \theta_1=60^\circ, \theta_2=180^\circ, \theta_3=45^\circ, \theta_4=90^\circ$.

2.6. Hallar la suma de los momentos respecto al punto O de un sistema de fuerzas paralelas coplanarias. Datos: $F_1=1,000 \text{ kg}, F_2=400 \text{ kg}, F_3=600 \text{ kg}, F_4=800 \text{ kg}, F_5=2,000 \text{ kg}$.

2.7. Sobre un cuerpo rígido en forma de paralelepípedo rectangular actúan dos fuerzas F_1 y F_2 de magnitudes iguales a $4,000 \text{ kg}$. Hallar la suma de sus momentos respecto a O' . Datos: $OO'=6,0 \text{ m}, OO''=4,0 \text{ m}, OO'''=2,0 \text{ m}$.

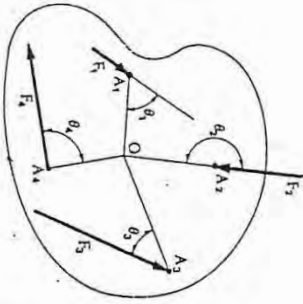


Fig. P-2.5

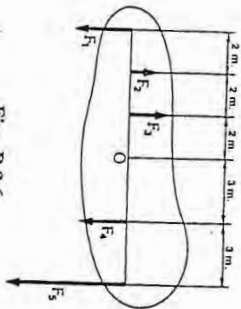


Fig. P-2.6

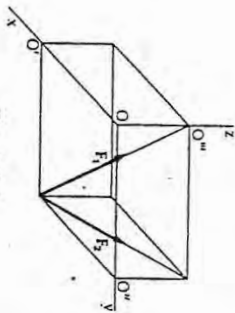


Fig. P-2.7

2.8. Sobre un cuerpo rígido en forma de paralelepípedo rectangular actúan las fuerzas F_1, F_2 y F_3 . Hallar la suma de sus momentos respecto al punto O . Datos: $F_1=3,000 \text{ kg}, F_2=2,000 \text{ kg}, F_3=1,000 \text{ kg}, a=1,0 \text{ m}, b=0,50 \text{ m}, h=0,40 \text{ m}$.

2.9. Sobre un cuerpo rígido en forma de paralelepípedo rectangular actúan las fuerzas F_1, F_2 y F_3 . Hallar la suma de sus momentos respecto al punto O . Datos: $F_1=5,000 \text{ kg}, F_2=2,000 \text{ kg}, F_3=3,000 \text{ kg}, a=1,0 \text{ m}, b=0,50 \text{ m}, h=0,40 \text{ m}$.

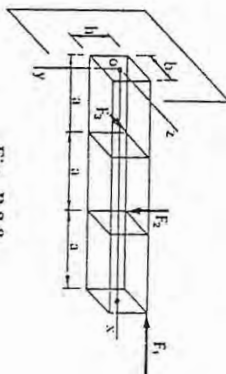


Fig. P-2.8

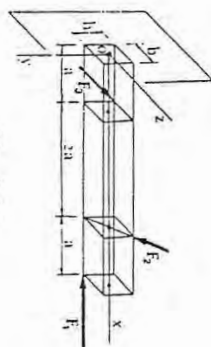


Fig. P-2.9

2.10. Hallar el momento de la fuerza F_1 respecto al eje z y el momento de la fuerza F_2 respecto al eje BC . Datos: $F_1=1,000 \text{ kg}, F_2=500 \text{ kg}, a=1,0 \text{ m}$.

2.11. Hallar los momentos de la fuerza F respecto a los ejes AB y AB' . Datos: $F=3,000 \text{ kg}, a=1,0 \text{ m}$.

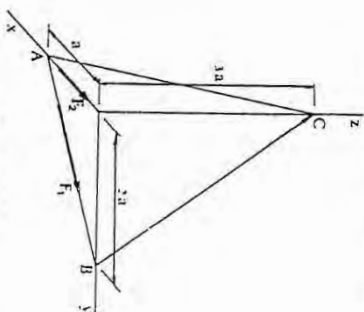


Fig. P-2.10

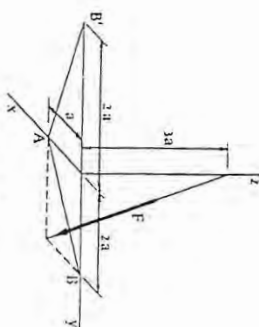


Fig. P-2.11

2.12. Hallar la suma de momentos respecto a los ejes x, y, z de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo rígido del problema 2.7.

2.13. Hallar la suma de momentos respecto a los ejes x, y, z de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo rígido del problema 2.8.

- 2.14. Hallar la suma de momentos respecto a los ejes x , y , z de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo rígido del problema 2.9.
- 2.15. Determinar los momentos respecto a los ejes x , y , z de la fuerza F . Datos: $F = 1.000 \text{ kg}$, $b = 0,30 \text{ m}$, $h = 0,40 \text{ m}$, $L = \sqrt{2} \text{ m}$.

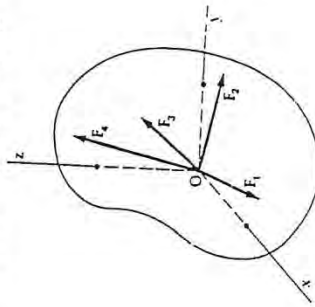
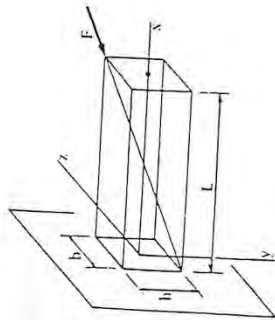


Fig. P-2.15

Fig. P-2.16

- 2.16. Sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de cuatro fuerzas concurrentes en un punto O . Determinar la fuerza resultante. Datos: $F_1(X_1 = 100 \text{ kg}, Y_1 = -200 \text{ kg}, Z_1 = -300 \text{ kg})$, $F_2(X_2 = -500 \text{ kg}, Y_2 = -200 \text{ kg}, Z_2 = -300 \text{ kg})$, $F_3(X_3 = 0, Y_3 = 400 \text{ kg}, Z_3 = 100 \text{ kg})$, $F_4(X_4 = -300 \text{ kg}, Y_4 = 0, Z_4 = 500 \text{ kg})$.
- 2.17. Sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de cinco fuerzas concurrentes en O y coplanarias. Determinar analítica y gráficamente su resultante. Datos: $F_1 = 1.000 \text{ kg}$, $F_2 = 3.000 \text{ kg}$, $F_3 = 2.000 \text{ kg}$, $F_4 = 2.500 \text{ kg}$, $F_5 = 2.000 \text{ kg}$, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $\alpha_3 = 135^\circ$, $\alpha_4 = 240^\circ$, $\alpha_5 = 315^\circ$.

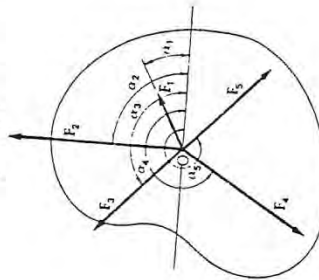
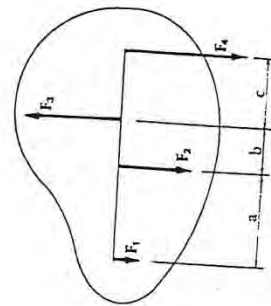


Fig. P-2.17

Fig. P-2.18

- 2.18. Sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de cuatro fuerzas paralelas coplanarias. Hallar su resultante. Datos: $F_1 = 500 \text{ kg}$, $F_2 = 1.500 \text{ kg}$, $F_3 = 2.000 \text{ kg}$, $F_4 = 2.500 \text{ kg}$, $a = 2,0 \text{ m}$, $b = 1,0 \text{ m}$, $c = 1,5 \text{ m}$.



- 2.19. Sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de cinco fuerzas coplanarias. Hallar su resultante. Datos: $F_1 = 2.000 \text{ kg}$, $F_2 = 3.000 \text{ kg}$, $F_3 = 1.000 \text{ kg}$, $F_4 = 1.500 \text{ kg}$, $F_5 = 2.500 \text{ kg}$.

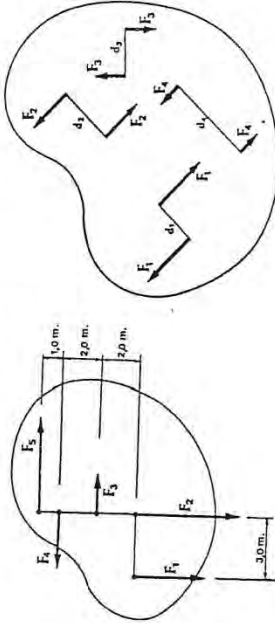
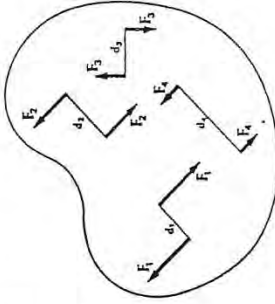


Fig. P-2.19

Fig. P-2.20

- 2.20. Sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de cuatro pares de fuerzas situados en el mismo plano. Determinar el par resultante. Datos: $F_1 = 1.500 \text{ kg}$, $d_1 = 3,0 \text{ m}$, $F_2 = 1.000 \text{ kg}$, $d_2 = 4,0 \text{ m}$, $F_3 = 750 \text{ kg}$, $d_3 = 3,0 \text{ m}$, $F_4 = 500 \text{ kg}$, $d_4 = 6,0 \text{ m}$.



- 2.21. Sobre un cuerpo rígido actúa un sistema de fuerzas coplanarias constituido por una fuerza F_0 y dos pares. Calcular su fuerza resultante. Datos: $F_0 = 4.000 \text{ kg}$, $F_1 = 2.000 \text{ kg}$, $F_2 = 3.000 \text{ kg}$, $OA = 1,0 \text{ m}$, $OB = 2,0 \text{ m}$, $OC = 4,0 \text{ m}$, $OD = 2,0 \text{ m}$, $OE = 3,0 \text{ m}$, $\alpha = \beta = 45^\circ$.

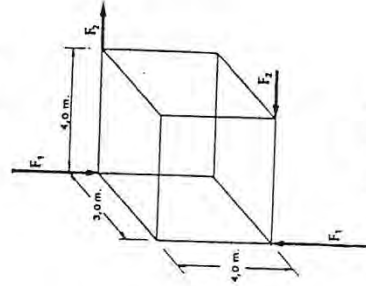


Fig. P-2.21

- 2.22. Sobre un cuerpo rígido en forma de paralelepípedo actúan dos pares. Calcular el par resultante. Datos: $F_1 = 200 \text{ kg}$, $F_2 = 100 \text{ kg}$.

- 2.23. Sobre un cuerpo rígido en forma de paralelepípedo actúan tres pares. Calcular el par resultante. Datos: $F_1 = 400 \text{ kg}$, $F_2 = 200 \text{ kg}$, $F_3 = 300 \text{ kg}$.

- 2.24. Componer la fuerza F_1 y el par F_2 , $-F_3$ que actúan sobre un cuerpo rígido de forma cúbica en una sola fuerza R y hallar la distancia al punto A de la fuerza R . Datos: $F_1 = 400 \text{ kg}$, $F_2 = 1.000 \text{ kg}$, $\theta = 30^\circ$.

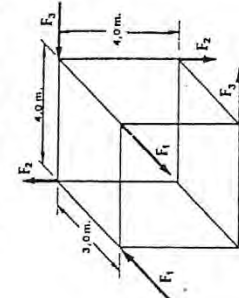


Fig. P-2.23

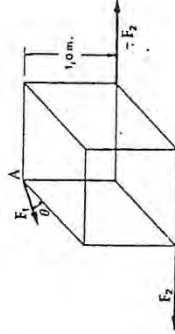


Fig. P-2.24

Fuerzas distribuidas

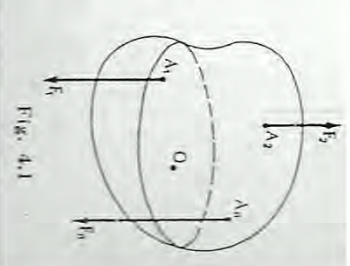
4.1. Introducción

Las fuerzas estudiadas en los capítulos anteriores actúan sobre los cuerpos según líneas de acción bien definidas y se llaman *fuerzas concentradas*. En realidad las fuerzas están aplicadas sobre elementos de volumen o de superficie de los cuerpos. Cuando una fuerza actúa sobre un elemento de volumen o de superficie que es pequeño en relación con las dimensiones del cuerpo se le considera una fuerza concentrada. Por el contrario, si las fuerzas están repartidas sobre los elementos de volumen o de superficie del cuerpo se llaman *fuerzas distribuidas*, que según su naturaleza serán fuerzas de volumen o de superficie.

En este capítulo se estudian aquellas fuerzas distribuidas que aparecen con más frecuencia: entre las fuerzas de volumen las fuerzas gravitatorias y entre las fuerzas de superficie las fuerzas que ejercen los líquidos sobre las paredes que los contienen y las tierras sobre los muros de sostenimiento.

4.2. Centro de fuerzas paralelas

Sea un cuerpo rígido (Fig. 4.1) sobre el que actúa el sistema de fuerzas paralelas F_1, F_2, \dots, F_n aplicadas en los puntos A_1, A_2, \dots, A_n , respectivamente; el momento de cada fuerza F_i respecto a un punto cualquiera O es perpendicular a la dirección de las fuerzas, y por tanto el momento resultante M relativo al punto O si no es nulo ha de ser perpendicular a dicha dirección. Asimismo la resultante general R si no es nula ha de ser paralela a la dirección de las fuerzas. Por consiguiente el automomento $M \cdot R$ será nulo y por ello un sistema de



fuerzas paralelas es equivalente a una fuerza única, o a un par único o bien a cero. A esta conclusión se llega también componiendo sucesivamente las fuerzas paralelas dos a dos.

En el caso de que la resultante general $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$ sea distinta de cero, el sistema de fuerzas paralelas se reduce a la resultante \mathbf{R} , paralela a la dirección de las fuerzas, aplicada según una recta que coincide con el eje central del sistema de fuerzas. Para determinar la posición de la resultante se utiliza el teorema de Varignon generalizado, según el cual el momento de la resultante \mathbf{R} respecto a un punto cualquiera O es igual a la suma de los momentos respecto a O de todas las fuerzas del sistema. Es decir

$$\overrightarrow{OO'} \times \mathbf{R} = \sum \overrightarrow{OA_i} \times \mathbf{F}_i \quad (4.1)$$

siendo O' un punto cualquiera del eje central.

Si $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ son las magnitudes de las fuerzas paralelas y \mathbf{u} el vector unitario paralelo a las fuerzas del sistema, se tiene

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{F}_2 = F_2 \cdot \mathbf{u}, \quad \dots, \quad \mathbf{F}_n = F_n \cdot \mathbf{u}$$

La resultante \mathbf{R} es

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum F_i \cdot \mathbf{u}$$

y la ecuación (4.1) se transforma en

$$\overrightarrow{OO'} \times \sum F_i \cdot \mathbf{u} = \sum \overrightarrow{OA_i} \times F_i \cdot \mathbf{u}$$

o sea

$$(\overrightarrow{OO'} \cdot \sum F_i) \times \mathbf{u} = (\sum F_i \cdot \overrightarrow{OA_i}) \times \mathbf{u}$$

igualdad que se verifica, independientemente de la dirección del vector \mathbf{u} , para la posición G del punto O' del eje central definida por la relación

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} \sum F_i &= \sum F_i \cdot \overrightarrow{OA_i} \\ \overrightarrow{OG} &= \frac{\sum F_i \cdot \overrightarrow{OA_i}}{\sum F_i} \end{aligned} \quad (4.2)$$

es decir, para

El punto fijo G por el que pasa la resultante del sistema de fuerzas paralelas cualquiera que sea su dirección, se denomina centro de fuerzas paralelas. Si las fuerzas paralelas giran un cierto ángulo alrededor de sus puntos de aplicación, su resultante girará ese mismo ángulo alrededor del punto fijo G , que será el punto de aplicación de la resultante.

Tomando el punto O como origen de un sistema de ejes coordenados, las coordenadas x_G, y_G, z_G del vector \overrightarrow{OG} que define la posición del punto G , son

$$x_G = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad y_G = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad z_G = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i} \quad (4.3)$$

siendo x_i, y_i, z_i las coordenadas del punto de aplicación A_i . De la forma de estas ecuaciones se deduce que la posición del centro de fuerzas paralelas no se modifica si se multiplican por el mismo factor las magnitudes de todas las fuerzas, lo que significa que el centro de fuerzas paralelas depende solamente de las posiciones de los puntos de aplicación A_i y de las magnitudes relativas de las fuerzas.

En el caso de que el sistema de fuerzas sea coplanario, la determinación del centro de fuerzas paralelas puede hacerse gráficamente. Sea por ejemplo (Fig. 4.2a) el sistema de fuerzas paralelas y coplanarias $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ y \mathbf{F}_4 aplicadas en los puntos A_1, A_2, A_3 y A_4 de un cuerpo rígido. Construido el polígono

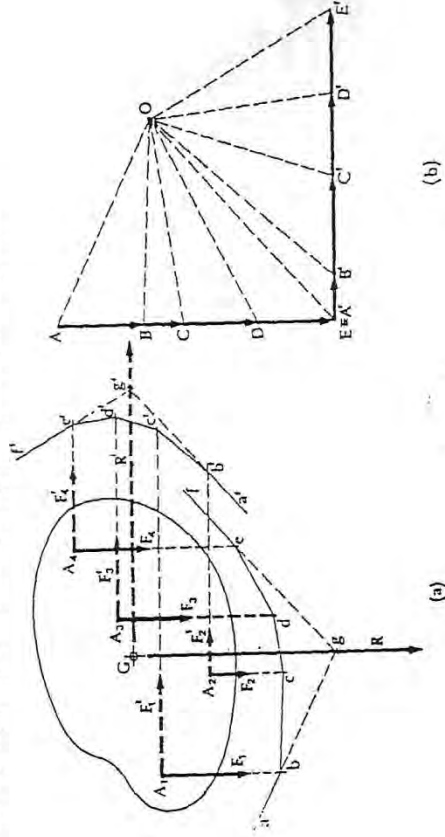


Fig. 4.2

de fuerzas $ABCDE$ (Fig. 4.2b), se traza el polígono funicular $abedef$ (Fig. 4.2a); la intersección de los lados primero y último ab y ef determina el punto g situado sobre la línea de acción de la resultante R , la cual ha de pasar por el centro de fuerzas paralelas. Si se giran las fuerzas un ángulo cualquiera, que por conveniencia del dibujo haremos que sea igual a 90° , se tiene de abajo arriba el sistema de fuerzas F'_2, F'_1, F'_3 y F'_4 , cuya resultante R' ha de pasar también por el centro de fuerzas paralelas. Por consiguiente, se construye el polígono de fuerzas $A'B'C'D'E'$ (Fig. 4.2b) correspondiente al sistema de fuerzas obtenido girando 90° el sistema inicial, y se traza el polígono funicular $a'b'c'd'e'f'$ (Fig. 4.2a), cuyos lados primero y último se cortan en el punto g' situado sobre la línea de acción de la resultante R' . La intersección de las líneas de acción de las resultantes R y R' determina la posición del centro de fuerzas paralelas G .

EjemPlo 4.1. Determinar el centro de un sistema de cuatro fuerzas paralelas que actúa sobre un cuerpo rígido (Fig. 4.3). Datos: $F_1 = 300$ kg, $F_2 = 100$ kg, $F_3 = 200$ kg, $F_4 = 150$ kg, $A_1(2, 2, 1)$, $A_2(3, 4, 0)$, $A_3(4, 5, 2)$, $A_4(4, 3, -2)$.

Solución: Considerando positivo el sentido de las fuerzas F_1 y F_3 , de las ecuaciones (4.3) se deduce

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{300 \cdot 2 - 100 \cdot 3 + 200 \cdot 4 - 150 \cdot 4}{300 - 100 + 200 - 150} = 2 \\y_G &= \frac{300 \cdot 2 - 100 \cdot 4 + 200 \cdot 5 - 150 \cdot 3}{300 - 100 + 200 - 150} = 3 \\z_G &= \frac{300 \cdot 1 - 100 \cdot 0 + 200 \cdot 2 - 150(-2)}{300 - 100 + 200 - 150} = 4\end{aligned}$$

Las coordenadas del centro de fuerzas paralelas G son (2, 3, 4).

4.3. Peso y masa

Cada uno de los puntos materiales que constituyen un cuerpo está sometido a la acción de la *fuerza de la gravedad* o fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre cada punto material, fuerza que se denomina *peso del punto material*. Según esto, la acción de la Tierra sobre un cuerpo es un ejemplo de fuerzas distribuidas verticales; dadas las dimensiones ordinarias de los cuerpos, estas fuerzas distribuidas serán paralelas y su resultante o *peso del cuerpo* será la suma de los pesos de sus diferentes puntos materiales. El peso de un cuerpo depende

de su altitud y latitud, es decir de la posición que ocupa respecto a la Tierra.

Se deduce experimentalmente, con la ayuda de una balanza, que *la razón de los pesos de dos cuerpos situados en un mismo lugar, es independiente del lugar en que se hace la experiencia*; esta razón es una magnitud que depende exclusivamente de los cuerpos y se denomina razón de las masas de los dos cuerpos. Si P_1 y P_2 son los pesos de los dos cuerpos en un cierto lugar y P'_1 y P'_2 son los pesos de los mismos cuerpos en otro lugar, el hecho experimental antes enunciado se expresa en la forma

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{P'_1}{P'_2} = \frac{M_1}{M_2},$$

siendo M_1 y M_2 las masas de los dos cuerpos, que son magnitudes escalares características de los mismos. De esta igualdad se deduce

$$\frac{P_1}{M_1} = \frac{P_2}{M_2} = g,$$

de donde

$$P = Mg \quad (4.4)$$

El peso de un cuerpo en un lugar determinado es proporcional a su masa. El coeficiente de proporcionalidad es una magnitud vectorial g que se denomina *intensidad del campo gravitatorio*, y está representada por un vector vertical dirigido hacia el centro de la tierra cuya magnitud g varía de un lugar a otro, dependiendo su valor numérico de las unidades elegidas para medir las fuerzas y las masas. Esta elección de unidades se realiza de forma que la intensidad del campo gravitatorio se mida por el mismo número que la aceleración del movimiento de caída de los cuerpos que estudiaremos en dinámica.

En el sistema de unidades CGS la masa es una magnitud básica cuya unidad es el *gramo* (g-masa) y la fuerza es una magnitud derivada cuya unidad es la *dina* (dyn). La intensidad del campo gravitatorio en París es 981 dyn/g-masa. Según la relación (4.4), el peso de un kilogramo en París equivale a una fuerza de 1.000 g-masa-981 dyn/g-masa=981.000 dyn.

En el sistema internacional SI la masa es una magnitud básica cuya unidad es el *kilogramo* (kg-masa) y la fuerza es

son las coordenadas del elemento de volumen dV y dM su masa, las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo son

$$x_G = \frac{\int x dM}{\int dM}, y_G = \frac{\int y dM}{\int dM}, z_G = \frac{\int z dM}{\int dM} \quad (4.7)$$

Se llama *densidad de un elemento de volumen* dV , de masa dM , a la relación

$$\rho = \frac{dM}{dV},$$

de donde $dM = \rho dV$, que sustituida en las ecuaciones (4.7), resulta

$$x_G = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV}, y_G = \frac{\int y \rho dV}{\int \rho dV}, z_G = \frac{\int z \rho dV}{\int \rho dV} \quad (4.8)$$

En el caso de que el cuerpo sea una placa de espesor t uniforme (Fig. 4.6), si dA es el área de la base del elemento de volumen dV , resulta $dV = t \cdot dA$. Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones (4.7) se obtiene

$$x_G = \frac{\int x \rho dA}{\int \rho dA}, y_G = \frac{\int y \rho dA}{\int \rho dA}, z_G = \frac{\int z \rho dA}{\int \rho dA} \quad (4.9)$$

que son las coordenadas del centro de gravedad de una placa de espesor uniforme.

Por último, si el cuerpo es una barra de sección A uniforme (Fig. 4.7), se tiene $dV = A \cdot ds$, siendo ds la longitud del elemento de volumen dV , y por tanto

$$x_G = \frac{\int x \rho ds}{\int \rho ds}, y_G = \frac{\int y \rho ds}{\int \rho ds}, z_G = \frac{\int z \rho ds}{\int \rho ds} \quad (4.10)$$

que son las coordenadas del centro de gravedad de una barra de sección uniforme.

Si un cuerpo tiene un centro de simetría, su centro de gravedad estará situado en ese punto. En efecto, cada dos elementos de volumen simétricos tienen el mismo peso por lo que su resultante parcial estará aplicada en el centro de simetría. El peso del cuerpo es la resultante o suma de todas las resul-

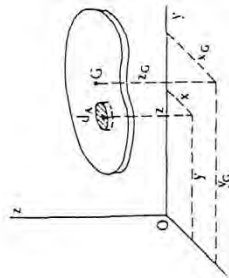


Fig. 4.6

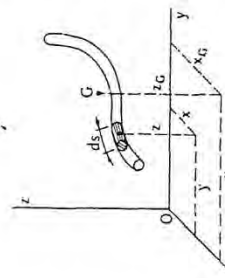


Fig. 4.7

tantes parciales y estará también aplicado en el centro de simetría que será a la vez centro de gravedad del cuerpo. Análogamente se demuestra que si un cuerpo tiene un eje o un plano de simetría, su centro de gravedad estará situado sobre el eje o plano de simetría.

Cuando el cuerpo es homogéneo, la densidad ρ tiene el mismo valor en todos los elementos de volumen, por lo que será un factor constante que puede eliminarse en las expresiones anteriores; las ecuaciones (4.8), que determinan las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo se reducen a

$$x_G = \frac{\int x dV}{\int dV}, y_G = \frac{\int y dV}{\int dV}, z_G = \frac{\int z dV}{\int dV} \quad (4.11)$$

Estas ecuaciones no dependen de las propiedades físicas del cuerpo sino únicamente de su forma geométrica. Por ello definen también las coordenadas de un punto característico del volumen que ocupa el cuerpo que se denomina *centro de gravedad de volumen*.

Asimismo las ecuaciones (4.9) que determinan las coordenadas del centro de gravedad de una placa de espesor uniforme se reducen a

$$x_G = \frac{\int x dA}{\int dA}, y_G = \frac{\int y dA}{\int dA}, z_G = \frac{\int z dA}{\int dA} \quad (4.12)$$

Estas ecuaciones dependen exclusivamente de la forma de la superficie media de la placa y definen también un punto característico de esa superficie, que se denomina *centro de gravedad de superficie*. Si la superficie es plana, tomando ese plano como xy la coordenada z_G será nula y las ecuaciones (4.12) quedan reducidas a las dos primeras.

Por último, las ecuaciones (4.10) que determinan las coordenadas del centro de gravedad de una barra de sección uniforme se reducen a

$$x_G = \frac{\int x ds}{\int ds}, y_G = \frac{\int y ds}{\int ds}, z_G = \frac{\int z ds}{\int ds} \quad (4.13)$$

Estas ecuaciones dependen exclusivamente de la forma del eje de la barra y definen también las coordenadas de un punto característico de ese eje o línea que se denomina *centro de gravedad de línea*. Si la línea es recta y se toma esa recta como

eje x , las coordenadas y_c y z_c serían nulas y las ecuaciones (4.13) se reducen a la primera.

En los numeradores de las ecuaciones (4.7), (4.11), (4.12) y (4.13) figuran las expresiones

$$\int x dM, \int x dV, \int x dA, \int x ds \quad (4.14)$$

que se llaman *momentos estáticos respecto al plano yz* de masa, de volumen, de superficie y de línea, respectivamente. De su propia definición se deduce que el momento estático respecto a un plano que pasa por el centro de gravedad es nulo. Asimismo fíjese o de una línea respecto a un plano cualquiera es el mismo que si se considera la totalidad de la masa, del volumen, de la superficie, o de la línea concentrada en su correspondiente centro de gravedad. Análogamente, en el caso de superficies y líneas contenidas en un plano xy , se definen los *momentos estáticos respecto al eje y* y de superficies y de líneas por las relaciones $\int x dA$, y $\int x ds$, respectivamente.

De la relación existente entre el centro de fuerzas paralelas y el centro de gravedad se deduce que el método de determinación gráfica del centro de fuerzas paralelas puede utilizarse para hallar el centro de gravedad de superficies y líneas contenidas en un plano.

Ejemplo 4.2. Determinar la posición del centro de gravedad del sistema formado por los cuatro puntos materiales A, B, C, D (Fig. 4.8). Datos: $m_A = 100$ g, $m_B = 200$ g, $m_C = 150$ g, $m_D = 50$ g.

Solución: Aplicando las ecuaciones (4.5) se tiene

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{200 \cdot 30}{100 + 200 + 150 + 50} = 12 \text{ cm} \\ y_g &= \frac{150 \cdot 20}{100 + 200 + 150 + 50} = 6 \text{ cm} \\ z_g &= \frac{50 \cdot 10}{100 + 200 + 150 + 50} = 1 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3. Determinar la posición del centro de gravedad de un cuerpo en forma de cono recto que tiene una densidad que varía proporcionalmente a su distancia a la base (Fig. 4.9). Dato: Altura del cono es h .

Solución: El eje del cono es un eje de simetría del cuerpo y por tanto en él estará situado el centro de gravedad; elegimos dicho eje como eje z , y como plano xy el plano de la base. Las coordenadas x_g, y_g del centro de gravedad serán nulas, y sólo es necesario calcular la coordenada z_g , para lo que se utiliza la tercera de las ecuaciones (4.8). Se toma como elemento de volumen dV un cilindro diferencial de altura dz situado a una

distancia z del plano xy . Si A es el área de la base del cono, el área $A(z)$ de la base del cilindro diferencial es $A(z) = A \frac{(h-z)^2}{h^2}$. El volumen dV es

$$dV = A(z) \cdot dz = A \frac{(h-z)^2}{h^2} \cdot dz$$

Puesto que la densidad es proporcional a la distancia a la base, se tiene $\varrho = kz$ y sustituyendo en (4.8) resulta

$$z_g = \frac{\int_0^h z k z \frac{A(h-z)^2}{h^2} dz}{\int_0^h k z \frac{A(h-z)^2}{h^2} dz} = \frac{\int_0^h z^2(h-z)^2 dz}{\int_0^h z(h-z)^2 dz} = \frac{2}{5} h$$

Ejemplo 4.4. Determinar la posición del centro de gravedad de una barra recta de sección uniforme (Fig. 4.10), que tiene una densidad que varía proporcionalmente a la raíz cuadrada de la distancia a uno de los extremos de la barra. Datos: longitud de la barra L .

Solución: Sea O el extremo de la barra respecto al cual varía la densidad según se indica. El centro de gravedad estará situado sobre el eje de la barra a una distancia del extremo O dada por la primera de las ecuaciones (4.10). Sustituyendo $\varrho = k\sqrt{x}$, $ds = dx$ se obtiene

$$x_g = \frac{\int_0^L x k \sqrt{x} dx}{\int_0^L k \sqrt{x} dx} = \frac{3}{5} L$$

Ejemplo 4.5. Determinar el centro de gravedad de un cono recto (Fig. 4.11).

Solución: El eje del cono es eje de simetría, por lo que el centro de gravedad estará situado sobre él. Elijiendo el mismo sistema de ejes coordenados que en el ejemplo 4.3, y considerando elementos de volumen cilíndricos $dV = A(z) \cdot dz$ que distan z de la base, se tiene

$$dV = \frac{A(h-z)^2}{h^2} \cdot dz;$$

de la ecuación (4.11) resulta

$$z_g = \frac{\int_0^h z \frac{A(h-z)^2}{h^2} \cdot dz}{\int_0^h \frac{A(h-z)^2}{h^2} \cdot dz} = \frac{\int_0^h z(h-z)^2 dz}{\int_0^h (h-z)^2 dz} = \frac{h}{4}$$

El centro de gravedad de un cono recto está situado sobre su eje a una distancia de la base igual a $\frac{h}{4}$.

Ejemplo 4.6. Determinar el centro de gravedad de una semiesfera de radio R (Fig. 4.12).

CENTROS DE GRAVEDAD

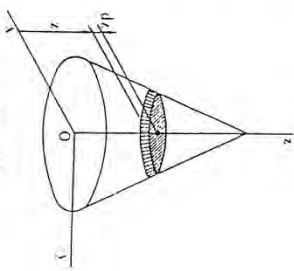


Fig. 4.9

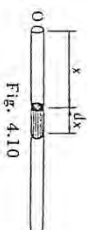


Fig. 4.10

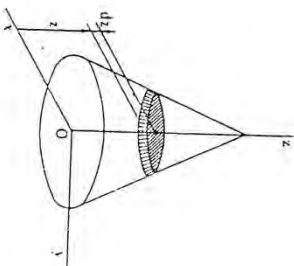


Fig. 4.11

Solución: Sobre el eje de simetría estará situado el centro de gravedad. Elijiendo como eje z el eje de simetría y como plano xy el plano diametral perpendicular, la coordenada z_0 del centro de gravedad está determinada por la ecuación (4.11). Como elemento de volumen se toma un cilindro diferencial de altura dz , situado a una distancia z del plano xy . El radio del elemento de volumen es $r = \sqrt{R^2 - z^2}$, y por tanto

$$dV = \pi(R^2 - z^2) \cdot dz$$

Sustituyendo en la expresión de z_0 se obtiene

$$z_0 = \frac{\int_0^R z \cdot \pi(R^2 - z^2) \cdot dz}{\int_0^R \pi(R^2 - z^2) \cdot dz} = \frac{3}{8} \cdot R$$

EJEMPLO 4.7. Determinar el centro de gravedad de un romboide (Fig. 4.13).

Solución: Se toma la base del romboide como eje x y se considera como elemento de superficie la franja diferencial paralela al eje x de altura dy , situada a una distancia y del eje x ; el área de este elemento de superficie es $dA = b \cdot dy$. Utilizando la segunda de las ecuaciones (4.12) resulta

$$y_0 = \frac{\int_0^h yb \cdot dy}{\int_0^h b \cdot dy} = \frac{b}{b} \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}$$

El centro de gravedad estará situado sobre la recta MN que une los puntos medios de los lados AD y CB . Análogamente, el centro de gravedad estará situado sobre la recta $M'N'$ que une los puntos medios de los lados AB y CD . Por consiguiente, el centro de gravedad G del romboide se hallará en el punto de intersección de ambas rectas, que es también el punto de intersección de las diagonales.

EJEMPLO 4.8. Determinar el centro de gravedad de un triángulo (Fig. 4.14).

Solución: Se toma el eje x coincidente con la base del triángulo y como elemento de superficie una franja diferencial paralela al eje x de altura dy ; el área de esta franja es $dA = b_1 \cdot dy = b \cdot \frac{h-y}{h} \cdot dy$, siendo y su distancia a la base. Utilizando la segunda de las ecuaciones (4.12) se tiene

$$y_0 = \frac{\int_0^h y \frac{b(h-y)}{h} \cdot dy}{\int_0^h \frac{b(h-y)}{h} \cdot dy} = \frac{\frac{bh^2}{2} - \frac{bh^3}{3}}{\frac{bh}{h} - \frac{bh^2}{2h}} = \frac{h}{3}$$

Si se considera como base del triángulo otro cualquiera de los lados se obtiene análogo resultado, lo que demuestra que el centro de gravedad del triángulo es el punto de intersección de sus medianas o baricentro.

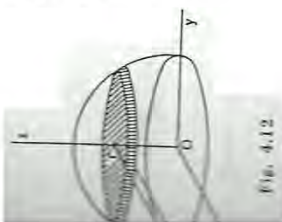


Fig. 4.12

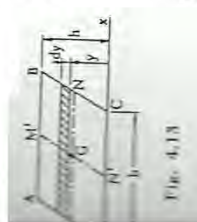


Fig. 4.13

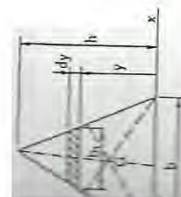


Fig. 4.14

EJEMPLO 4.9. Determinar gráficamente el centro de gravedad del trapecio (Fig. 4.15a).

Solución: Si descomponemos el trapecio en franjas diferenciales paralelas a la base, el centro de gravedad de cada franja está situada sobre la recta MN que une los puntos medios de las bases. Tomando la recta MN como eje y , la coordenada x del centro de gravedad de cada franja es nula, y también será nula la coordenada x_0 según la primera de las ecuaciones (4.12). Por consiguiente, el centro de gravedad del trapecio estará situado sobre la recta MN . Consideremos el trapecio formado por el romboide $ABFD$ y el triángulo $B'BC$ (Fig. 4.15b), cuyos centros de gravedad son G_1 y G_2 respectivamente. Tomando ahora la recta G_1G_2 como eje y y se tiene que las coordenadas x_1 y x_2 de los centros de gravedad G_1 y G_2 de las superficies componentes son nulas por lo que x_0 también será nula y el centro de gravedad del trapecio estará situado sobre la recta G_1G_2 . La intersección de las rectas MN y G_1G_2 determina la posición del centro de gravedad G del trapecio.

EJEMPLO 4.10. Hallar el centro de gravedad de un sector circular (Fig. 4.16).

Solución: Se elige como origen O de coordenadas el centro del círculo, y como eje x el eje de simetría, con lo que se anula y_0 . Se toma como elemento de superficie el triángulo diferencial de vértice el centro del círculo y base la longitud de arco ds ; el área de este elemento de superficie es

$$dA = \frac{1}{2} \cdot ds \cdot R = \frac{1}{2} R d\theta \cdot R = \frac{1}{2} R^2 \cdot d\theta$$

La coordenada x del elemento de superficie es la correspondiente a su centro de gravedad. Puesto que $\overline{OG}_1 = \frac{2}{3} R$, será $x = \overline{OG}_1 = \frac{2}{3} R \cos \theta$. De la primera de las ecuaciones (4.12) se deduce

$$x_0 = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{2}{3} R \cos \theta \cdot \frac{1}{2} R^2 d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{2} R^2 \cdot d\theta} = \frac{\frac{2}{3} R \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta} = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

Cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ resulta $x_0 = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}$, que define la posición del centro de gravedad del semicírculo.

EJEMPLO 4.11. Determinar el centro de gravedad de la superficie limitada por la parábola $y^2 = kx$ y las rectas $y = a$, $x = a$. Datos: Las coordenadas a y b del punto A (Fig. 4.17a).

Solución: La constante k de la parábola es $k = \frac{b^2}{a}$. Tomando como elemento de superficie una franja diferencial vertical, el área del elemento de superficie y las coordenadas del correspondiente centro de gravedad son

$$dA = y \, dx = \sqrt{kx} \, dx, \quad x_1 = x, \quad y_1 = \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{kx}}{2}$$

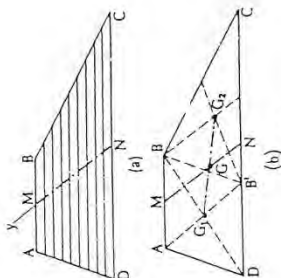


Fig. 4.15

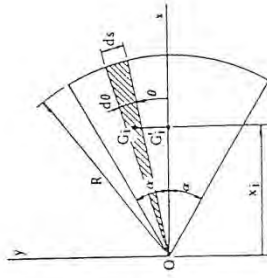
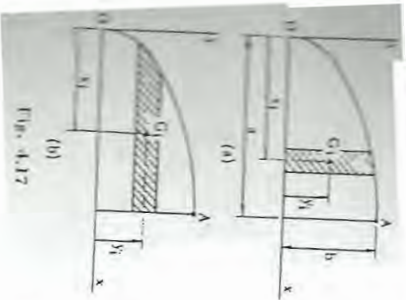


Fig. 4.16



Sustituyendo estas expresiones en las dos primeras ecuaciones (4.12), se tiene

$$x_G = \frac{\int_A x_1 dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^a x \sqrt{kx} dx}{\int_0^a \sqrt{kx} dx} = \frac{3}{5} a$$

$$y_G = \frac{\int_A y_1 dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^a \frac{1}{2} \sqrt{kx} \sqrt{kx} dx}{\int_0^a \sqrt{kx} dx} = \frac{3}{8} \sqrt{k} a = \frac{3}{8} b$$

Si se considera como elemento de superficie una franja diferencial horizontal (Fig. 4.17b), el área del elemento de superficie y las coordenadas del correspondiente centro de gravedad son

$$dA = (a - x) dy = \left(a - \frac{y^2}{k}\right) dy, \quad x_1 = \frac{a + x}{2} = \frac{a + \frac{y^2}{k}}{2}, \quad y_1 = y$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones que determinan x_G e y_G , se obtiene

$$x_G = \frac{\int_0^b \frac{1}{2} \left(a + \frac{y^2}{k}\right) \left(a - \frac{y^2}{k}\right) dy}{\int_0^b \left(a - \frac{y^2}{k}\right) dy} = \frac{3}{5} a$$

$$y_G = \frac{\int_0^b y \left(a - \frac{y^2}{k}\right) dy}{\int_0^b \left(a - \frac{y^2}{k}\right) dy} = \frac{3}{8} b$$

Ejemplo 4.12. Determinar el centro de gravedad de la superficie rayada (Fig. 4.18).

Solución: Consideremos la superficie rayada compuesta de un rectángulo, un triángulo y una superficie negativa que es un cuadrante de círculo. En este caso, en que las superficies componentes no son elementos diferenciales, las coordenadas del centro de gravedad estarán definidas por indicio en la figura, las áreas y las coordenadas de los centros de gravedad de las superficies componentes son

$$A_1 = 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}^2, \quad x_1 = 2 \text{ cm}, \quad y_1 = 6 \text{ cm}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9 \text{ cm}^2, \quad x_2 = 4 + \frac{1}{3} \cdot 3 = 5 \text{ cm}, \quad y_2 = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \text{ cm}$$

$$A_3 = -\pi \cdot \frac{2^2}{4} = -3.141 \text{ cm}^2, \quad x_3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{\pi} = 0.848 \text{ cm},$$

$$y_3 = 12 - 0.848 = 11.152 \text{ cm}$$

Las coordenadas x_G , y_G del centro de gravedad de la superficie compuesta son

$$x_G = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{48 \cdot 2 + 9 \cdot 5 - 3.141 \cdot 0.848}{48 + 9 - 3.141} = 2.57 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{48 \cdot 6 + 9 \cdot 2 - 3.141 \cdot 11.152}{48 + 9 - 3.141} = 5.05 \text{ cm}$$

Ejemplo 4.13. Determinar el centro de gravedad de la superficie compuesta (Fig. 4.19).

Solución: Se descompone la superficie en las tres superficies indicadas. Las coordenadas de los centros de gravedad de las superficies componentes, así como sus áreas y los términos $\sum A_i x_i$, $\sum A_i y_i$, figuran en la tabla siguiente:

Componentes	A_i (cm ²)	x_i (cm)	y_i (cm)	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	56	16	1	896	56
2	36	1	9	36	324
3	20	5	19	100	380
Total	112			1032	760

Las coordenadas del centro de gravedad de la superficie compuesta son

$$x_G = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{1032}{112} = 9.21 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{760}{112} = 6.78 \text{ cm}$$

Ejemplo 4.14. Determinar el centro de gravedad de un arco de circunferencia (Fig. 4.20).

Solución: Se elige como origen O de coordenadas el centro de la circunferencia, y como eje x el eje de simetría con lo que se anula y_G . Como elemento de longitud se toma un arco de longitud $d\theta = R d\theta$ cuya abscisa es $x_1 = R \cos \theta$. De la primera de las ecuaciones (4.13), se obtiene

$$x_G = \frac{\int_S x_1 d\theta}{\int_S d\theta} = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R \cos \theta \cdot R d\theta}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R d\theta} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

Ejemplo 4.15. Determinar gráficamente el centro de gravedad de la superficie compuesta (Fig. 4.21a).

Solución: Se descompone la superficie en las tres superficies indicadas en la figura cuyas áreas son

$$A_1 = 28 \cdot 2 = 56 \text{ cm}^2, \quad A_2 = 18 \cdot 2 = 36 \text{ cm}^2, \quad A_3 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ cm}^2$$

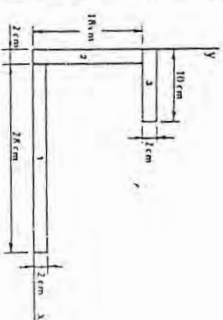


Fig. 4.19

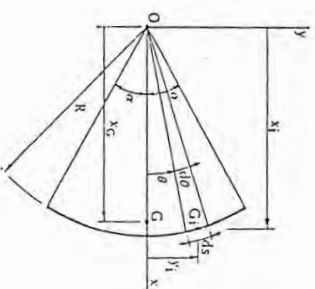


Fig. 4.20

En los centros de gravedad G_1 , G_2 y G_3 de las tres superficies componentes se suponen aplicadas las fuerzas paralelas F_1 , F_2 y F_3 , cuyas magnitudes son proporcionales a sus respectivas áreas, y sus direcciones se consideran verticales para facilitar el dibujo. El centro de gravedad de la superficie compuesta será el centro de las fuerzas paralelas y para determinarlo se trazan los polígonos de fuerzas $ABCD$ y $A'B'C'D'$ (Fig. 4.21b) correspondientes a las fuerzas verticales y a las mismas fuerzas giradas 90° . Construidos los respectivos polígonos funiculares, la intersección de las resultantes R y R' determina el punto G , centro de las fuerzas paralelas y, por consiguiente, centro de gravedad de la superficie compuesta.

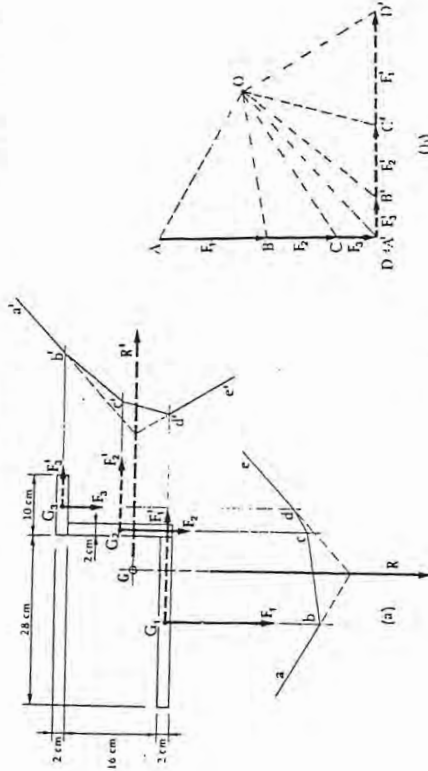


Fig. 4.21

4.5. Teoremas de Guldin

Para determinar el área o el volumen de un cuerpo de revolución pueden utilizarse los teoremas de Guldin. El primer teorema establece que *el área engendrada por una curva plana al girar alrededor de un eje es igual al producto de la longitud de la curva generatriz por la longitud recorrida por el centro de gravedad de dicha curva*. En efecto, sea una curva plana de longitud L , y una recta BB' situada en el plano de la curva (Fig. 4.22). Un elemento de curva de longitud ds , al girar alrededor de la recta BB' , que se elige como eje x , genera un anillo cuya área es

$$dA = 2\pi y ds,$$

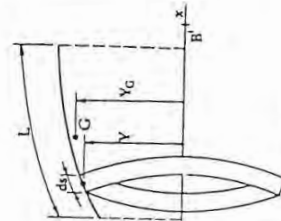


Fig. 4.22

donde y es la ordenada del elemento ds . El área engendrada por la curva de longitud L será

$$A = \int_0^L 2\pi y ds$$

Según la segunda de las ecuaciones (4.13)

$$\int y ds = y_G L$$

y por tanto

$$A = 2\pi y_G L, \quad (4.15)$$

siendo $2\pi y_G$ la longitud recorrida por el centro de gravedad de la curva generatriz. Para poder aplicar este teorema es necesario que la curva no atraviese el eje alrededor del cual gira, ya que en caso contrario las partes de curva situadas a ambos lados del eje engendrarán áreas de signos opuestos.

El segundo teorema de Guldin establece que *el volumen engendrado por una superficie plana al girar alrededor de un eje es igual al producto del área de la superficie generatriz por la longitud recorrida por el centro de gravedad de dicha superficie*. En efecto, sea una superficie plana de área A y una recta BB' situada en el plano de la superficie (Fig. 4.23). Un elemento de superficie de área dA al girar alrededor de la recta BB' considerada como eje x , genera un cuerpo cuyo volumen es

$$dV = 2\pi y dA,$$

donde y es la ordenada del elemento de superficie dA . El volumen engendrado por la superficie de área A será

$$V = \int 2\pi y dA$$

Según la segunda de las ecuaciones (4.12)

$$\int y dA = y_G A$$

y por tanto

$$V = 2\pi y_G A, \quad (4.16)$$

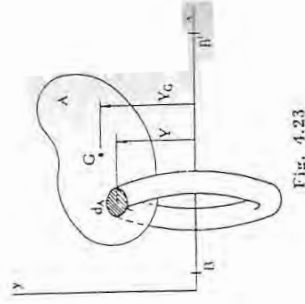


Fig. 4.23

En los centros de gravedad G_1 , G_2 y G_3 de las tres superficies componentes se suponen aplicadas las fuerzas paralelas F_1 , F_2 y F_3 , cuyas magnitudes son proporcionales a sus respectivas áreas y sus direcciones se consiguen trazando los polígonos de fuerzas paralelas y para determinar se pondrán las fuerzas verticales y a las mismas fuerzas giradas 90° construidos los respectivos polígonos funiculares, la intersección de las resultantes R y R' determina el punto G , centro de las fuerzas paralelas y , por consiguiente, centro de gravedad de la superficie compuesta.

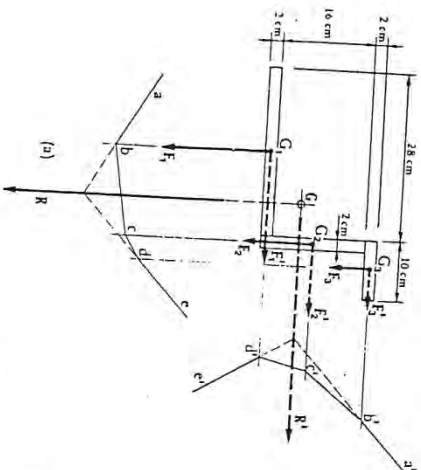


Fig. 4.21

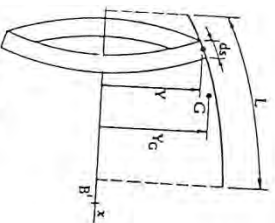
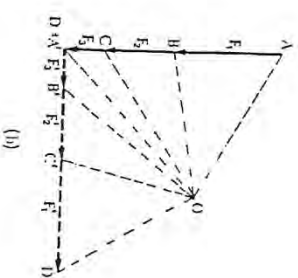


Fig. 4.22

4.5. Teoremas de Guldin

Para determinar el área o el volumen de un cuerpo de revolución pueden utilizarse los teoremas de Guldin. El primer teorema establece que *el área engendrada por una curva plana al girar alrededor de un eje es igual al producto de la longitud de la curva generatriz por la longitud recorrida por el centro de gravedad de dicha curva*. En efecto, sea una curva plana de longitud L , y una recta BB' situada en el plano de la curva (Fig. 4.22). Un elemento de curva de longitud ds , al girar alrededor de la recta BB' , que se elige como eje x , genera un anillo

$$dA = 2\pi y ds,$$

donde y es la ordenada del elemento ds . El área engendrada por la curva de longitud L será

$$A = \int_0^L 2\pi y ds$$

Según la segunda de las ecuaciones (4.13)

$$\int y ds = y_G \int ds = y_G L$$

y por tanto

$$A = 2\pi y_G L, \quad (4.15)$$

siendo $2\pi y_G L$ la longitud recorrida por el centro de gravedad de la curva generatriz. Para poder aplicar este teorema es necesario que la curva no atraviese el eje alrededor del cual gira, ya que en caso contrario las partes de curva situadas a ambos lados del eje engendrarán áreas de signos opuestos.

El segundo teorema de Guldin establece que *el volumen engendrado por una superficie plana al girar alrededor de un eje es igual al producto del área de la superficie generatriz por la longitud recorrida por el centro de gravedad de dicha superficie*. En efecto, sea una superficie plana de área A y una recta BB' situada en el plano de la superficie (Fig. 4.23). Un elemento de superficie de área dA al girar alrededor de la recta BB' considerada como eje x , genera un cuerpo cuyo volumen es

$$dV = 2\pi y dA,$$

donde y es la ordenada del elemento de superficie dA . El volumen engendrado por la superficie de área A será

$$V = \int 2\pi y dA$$

Según la segunda de las ecuaciones (4.12)

$$\int y dA = y_G \int dA = y_G A,$$

y por tanto

$$V = 2\pi y_G A, \quad (4.16)$$

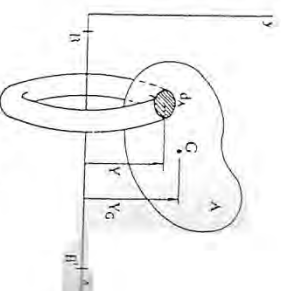


Fig. 4.23

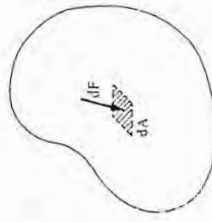


Fig. 4.26

equilibrio (Fig. 4.26), los elementos de volumen de líquido contiguos a dicha superficie ejercen sobre ella una fuerza dF , normal a la superficie, que se puede representar por la expresión

$$dF = p dA \quad (4.17)$$

siendo dA un vector perpendicular al elemento de superficie dA y p una magnitud escalar igual al cociente de la fuerza dF por la superficie dA sobre la cual actúa, que se denomina *presión sobre la superficie* dA .

La unidad de presión en el sistema CGS es la *baria* o presión que ejerce una fuerza de una dina sobre una superficie de un centímetro cuadrado. En el sistema técnico la unidad de presión es la correspondiente a una fuerza de un kilogramo fuerza aplicada sobre una superficie de un metro cuadrado.

Supongamos que en el interior de un líquido en equilibrio se aísla un tetraedro elemental de líquido de volumen dV (Fig. 4.27), si sobre el líquido actúa una fuerza por unidad de volumen Q , el tetraedro elemental estará en equilibrio sometido a la fuerza de volumen $Q dV$ y a las fuerzas de superficie obtenidas multiplicando las presiones en cada cara del tetraedro por las áreas correspondientes. Sean p_1, p_2, p_3 las presiones sobre las caras CDO, DBO, BCO y sea p la presión sobre la cara BCD cuya normal forma con los ejes x, y, z los ángulos α, β, γ , respectivamente. Si A es el área de la superficie BCD , las áreas de las otras tres superficies del tetraedro serán $A \cos \alpha, A \cos \beta, A \cos \gamma$. Del equilibrio del tetraedro elemental se deduce que han de ser nulas las componentes según los ejes x, y, z de las fuerzas que actúan sobre él; siendo X, Y, Z las coordenadas de la fuerza por unidad de volumen Q , se tiene

$$\begin{aligned} p_1 A \cos \alpha - p A \cos \alpha + X dV &= 0 \\ p_2 A \cos \beta - p A \cos \beta + Y dV &= 0 \\ p_3 A \cos \gamma - p A \cos \gamma + Z dV &= 0 \end{aligned}$$

Cuando el volumen del tetraedro se hace tender a cero manteniéndolo semejante a sí mismo, pueden desprejiciarse los términos $X dV, Y dV, Z dV$, ya que las fuerzas de volumen son infinitesimales de tercer orden, mientras que las fuerzas de superficie lo son de segundo orden. Las ecuaciones de equilibrio se reducen a

$$p_1 = p_2 = p_3 = p \quad (4.18)$$

siendo $2\pi y_G$ la longitud recorrida por el centro de gravedad de la superficie generatriz. Para poder aplicar este teorema es necesario que la superficie no atraviese el eje alrededor del cual gira, ya que en caso contrario las superficies situadas a ambos lados del eje engendrarían volúmenes de signos opuestos.

EJEMPLO 4.16. Utilizando el segundo teorema de Guldin, hallar el volumen de un cono de revolución (Fig. 4.24). Datos: R, h .

Solución: El volumen del cono se engendra al girar el triángulo OAB alrededor del eje OA . Según el segundo teorema de Guldin

$$V = 2\pi y_G A$$

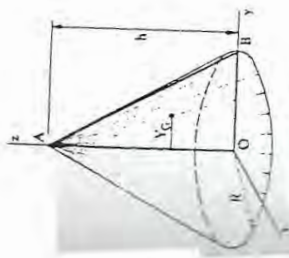
siendo

$$y_G = \frac{1}{3} R, \quad A = \frac{1}{2} R h$$

Por tanto

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Fig. 4.24



EJEMPLO 4.17. Utilizando los teoremas de Guldin, determinar el centro de gravedad de una semicircunferencia y de un semicírculo (Fig. 4.25).

Solución: Aplicando el primer teorema de Guldin a una semicircunferencia (Fig. 4.25a) cuyo diámetro se elige como eje de giro, el área de la superficie esférica engendrada es $A = 2\pi y_G L$, siendo $A = 4\pi R^2$ y $L = \pi R$. Por consiguiente

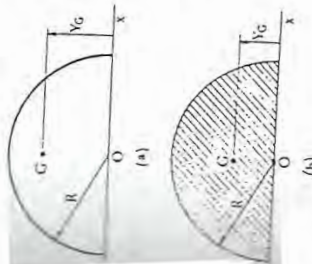
$$y_G = \frac{A}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi \pi R} = \frac{2R}{\pi}$$

Aplicando el segundo teorema de Guldin a un semicírculo (Fig. 4.25b) cuyo diámetro se elige como eje de giro, el volumen de la esfera engendrada es $V = 2\pi y_G A$, siendo $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ y $A = \frac{\pi R^2}{2}$. Por tanto

$$y_G = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{2\pi \cdot \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

4.6. Presión hidrostática

Otro ejemplo de fuerzas distribuidas son las *fuerzas hidrostáticas*, o fuerzas que ejercen los elementos de volumen de los líquidos sobre los elementos de volumen contiguos o sobre las superficies en contacto con ellos. Sobre cada elemento de superficie de área dA situado en el interior de un líquido en



les a una fuerza única o resultante aplicada en un punto de la pared que se denomina *centro de presiones*.

Sea, por ejemplo, un líquido de peso específico γ que está en equilibrio limitado por una pared plana oblicua, cuya sección transversal es OD (Fig. 4.30a). La presión atmosférica actúa sobre las dos caras de la pared, bien directamente, bien a través del líquido, por lo que será nula su influencia en el equilibrio de la pared, y únicamente deberán tenerse en cuenta las presiones relativas p_r cuyo valor a una profundidad h es

$$p_r = \gamma h. \quad (4.23)$$

La presión relativa varía linealmente con la profundidad h , y su representación o *diagrama de presiones* es el diagrama triangular ODD' , en el que DD' representa a γh . Considerando una parte de pared situada totalmente por debajo de la superficie libre (Fig. 4.30b), el diagrama de presiones se reduce a $BB'C'C$, siendo $\overline{BB'} = \gamma h_B$ y $\overline{CC'} = \gamma h_C$. Sobre un elemento de pared de área dA , situada a una profundidad h , actúa la fuerza $dF = \gamma h dA$; como todas las fuerzas dF son normales a la superficie de la pared, constituyen un sistema de fuerzas paralelas equivalentes a una fuerza resultante

$$R = \int_A dF = \int_A \gamma h dA = \int_A \gamma y \sin \alpha dA, \quad (4.24)$$

o sea

$$R = \gamma \sin \alpha Q_x, \quad (4.25)$$

donde Q_x es el momento estático de la superficie de área A respecto al eje x . De las propiedades de los momentos estáticos se deduce que $R = \gamma \sin \alpha A y_E$, y por tanto

$$R = \gamma h_G A. \quad (4.26)$$

siendo y_E y h_G , respectivamente, la ordenada y y la profundidad h del centro de gravedad de la superficie de pared considerada; γh_G es la presión en el centro de gravedad de dicha superficie y representa la presión media en ella.

Se obtiene la ordenada y_E del centro de presiones E aplicando el teorema de Varignon generalizado, según el cual

$$R y_E = \int_A y dF = \int_A \gamma y h dA = \gamma \sin \alpha \int_A y^2 dA,$$

Sustituyendo el valor de R dado por (4.24), resulta

$$y_E = \frac{\int_A y^2 dA}{\int_A y dA}, \quad (4.27)$$

que puede expresarse en la forma

$$y_E = \frac{I_x}{Q_x}. \quad (4.28)$$

siendo $I_x = \int_A y^2 dA$ el momento de inercia de la superficie de área A respecto al eje x , cuyas propiedades se estudian en el Apéndice.

En una pared vertical OD (Fig. 4.31a) cuya superficie de contacto con el agua es un rectángulo de base b y altura H (Fig. 4.31b), el diagrama de presiones es ODD' y su resultante R , según (4.26), es

$$R = \gamma \frac{H}{2} \cdot bH = \gamma \frac{bH^2}{2}. \quad (4.29)$$

Para determinar el centro de presiones, se toma como elemento de superficie de área dA una franja diferencial de base b y altura dy , situada a una distancia y del eje x . De (4.27) se deduce la ordenada y_E del centro de presiones

$$y_E = \frac{\int_0^H y^2 b dy}{\int_0^H y b dy} = \frac{b \frac{H^3}{3}}{b \frac{H^2}{2}} = \frac{2}{3} H. \quad (4.30)$$

El área del diagrama de presiones es $\frac{1}{2} DD' \cdot OD = \frac{1}{2} \gamma H \cdot H$

$= \gamma \frac{H^2}{2}$. Por consiguiente, la resultante de las fuerzas que un líquido ejerce sobre una pared vertical de superficie rectangular es una fuerza horizontal de magnitud igual al área del diagrama de presiones multiplicada por el ancho de la superficie, y cuya línea de acción pasa por el centro de gravedad del diagrama de presiones.

Por último consideremos un líquido en equilibrio limitado por una pared curva cilíndrica. Sea BC (Fig. 4.32a) la sección transversal de una parte de pared cuyo ancho es b ; si p_r es

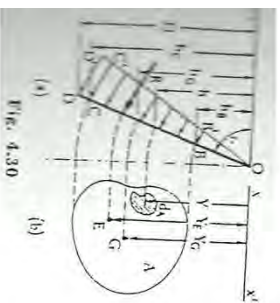


Fig. 4.30

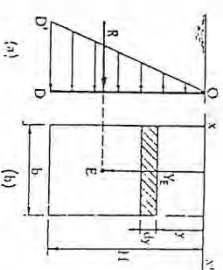


Fig. 4.31

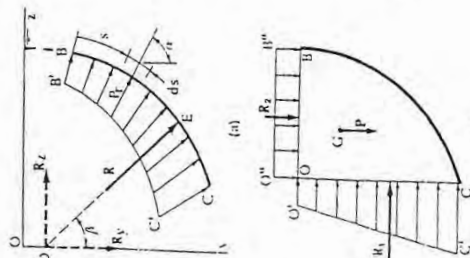


Fig. 4.32

la presión relativa en un elemento de pared de área $dA = b \, ds$, las proyecciones de la resultante R según los ejes y , z son

$$R_y = \int_A p_r \cos \alpha \, dA = \int_L p_r b \cos \alpha \, ds,$$

$$R_z = \int_A p_r \sin \alpha \, dA = \int_L p_r b \sin \alpha \, ds.$$

Sustituyendo $dz = -ds \cos \alpha$, $dy = ds \sin \alpha$, se tiene

$$R_y = -b \int_{z_0}^{z_0} p_r \, dz, \quad R_z = b \int_{y_0}^{y_0} p_r \, dy.$$

Eligiendo el eje z en la superficie libre, la presión relativa es $p_r = \gamma y$, que sustituida en las ecuaciones anteriores, resulta

$$R_y = -\gamma b \int_{z_0}^{z_0} y \, dz, \quad R_z = \frac{\gamma b}{2} (y_0^2 - y_0^2). \quad (4.31)$$

La magnitud de la resultante y el ángulo β que forma con el eje y están definidos, respectivamente, por las ecuaciones

$$R = \sqrt{R_y^2 + R_z^2}, \quad \tan \beta = \frac{R_z}{R_y}. \quad (4.32)$$

La posición de la resultante queda determinada conociendo un punto cualquiera de su línea de acción, por ejemplo el punto D en que corta el eje y . Del teorema de Varignon generalizado, tomando momentos respecto al eje x , se tiene

$$-R_z y_D = \int_A p_r \cos \alpha \, z \, dA - \int_A p_r \sin \alpha \, y \, dA.$$

Sustituyendo $p_r = \gamma y$, $dA = b \, ds$, $ds \cos \alpha = -dz$, $ds \sin \alpha = dy$, resulta

$$R_z y_D = \gamma b \left[\int_{z_0}^{z_0} yz \, dz + \frac{y_0^3 - y_0^3}{3} \right],$$

de donde

$$y_D = \frac{2}{3} \frac{\int_{z_0}^{z_0} yz \, dz + (y_0^3 - y_0^3)}{y_0^2 - y_0^2}. \quad (4.33)$$

El punto de intersección de la línea de acción de la resultante con la pared es el centro de presiones.

Un método más sencillo para hallar la resultante R y el centro de presiones en el caso de paredes curvas, consiste en descomponer la acción de las presiones sobre la pared curva BC (Fig. 4.32b) en tres fuerzas: el peso P del volumen de líquido BCO situado encima de la superficie curva y limitado por las superficies planas OB y OC , la resultante R_1 de las fuerzas ejercidas por el líquido sobre OC cuyo diagrama de presiones es $O'OC'$, y por último la resultante R_2 de las fuerzas ejercidas por el líquido sobre OB cuyo diagrama de presiones es $O'OB'$. La magnitud del peso P se calcula multiplicando el peso específico γ del líquido por el área de la sección BCO y por el ancho b de la pared y su línea de acción ha de pasar por el centro de gravedad G de BCO ; las magnitudes y líneas de acción de R_1 y R_2 son inmediatas, ya que son las resultantes correspondientes a superficies planas. La resultante R se obtiene componiendo las fuerzas P , R_1 y R_2 , y su intersección con la pared curva determina el centro de presiones.

Ejemplo 4.19. Un líquido de peso específico γ está limitado por la pared inclinada OC . Determinar: a) El diagrama de presiones hidrostáticas ejercidas sobre la parte BC de la pared. b) La resultante de las fuerzas que el líquido ejerce sobre BC . c) El centro de presiones. Datos: $OB = 2.0 \, m$, $BC = 4.0 \, m$, ancho de la pared $b = 3.0 \, m$, $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 10^{-3} \, kg/cm^3$ (Fig. 4.33).

Solución: a) Las presiones relativas en los puntos B y C son

$$p_B = \gamma h_B = \gamma OB \sin \alpha = 0.10 \, kg/cm^2$$

$$p_C = \gamma h_C = \gamma OC \sin \alpha = 0.30 \, kg/cm^2$$

El diagrama de presiones es $B'BC'$, representando $B'B' = 0.10 \, kg/cm^2$ y $C'C' = 0.30 \, kg/cm^2$.

b) Puesto que $y_0 = \frac{200 + 600}{2} = 400 \, cm$, $h_B = y_0 \sin \alpha = 200 \, cm$ según (4.26) la resultante R es

$$R = \gamma h_G A = 24,000 \, kg$$

c) Según (4.27), tomando como elemento de superficie una franja diferencial de base b y altura dy situada a una distancia y del eje x , la ordenada y_D del centro de presiones es

$$y_D = \frac{\int_{y_0}^{y_0} y^2 b \, dy}{\int_{y_0}^{y_0} y b \, dy} = \frac{\frac{y_0^3 - y_0^3}{3}}{\frac{y_0^2 - y_0^2}{2}} = \frac{2}{3} \frac{y_0^3 - y_0^3}{y_0^2 - y_0^2}$$

Sustituyendo $y_c = 600$ cm, $y_B = 200$ cm, se tiene

$$y_E = 433 \text{ cm}$$

EJEMPLO 4.20. Determinar el centro de presiones y la resultante de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la superficie cilíndrica de una presa, siendo la ecuación de su curva directriz $y^2 = \frac{H^2}{a^2}(a - z)$. Datos: $a = 6$ m, $H = 10$ m, longitud de la presa $b = 40$ m (Fig. 4.34a).

Solución: Las proyecciones de la resultante según los ejes y , z están determinadas por las ecuaciones (4.31). Diferenciando la ecuación de la curva directriz, se obtiene

$$2y \, dy = -\frac{H^2}{a} \, dz,$$

de donde

$$dz = -\frac{2a}{H^2} y \, dy;$$

sustituyendo en la expresión de R_y ,

$$R_y = -\gamma b \int_{y_B}^{y_C} y \left(-\frac{2a}{H^2} y \, dy \right) = \frac{2\gamma b}{H^2} \left[\frac{y_C^3}{3} - \frac{y_B^3}{3} \right]$$

Teniendo en cuenta que $y_C = H$, $y_B = 0$, resulta

$$R_y = \frac{2}{3} \gamma a b H = 1,600,000 \text{ kg}$$

La expresión de R_z para $y_C = H$, $y_B = 0$ se transforma en

$$R_z = \frac{\gamma b H^2}{2} = 2,000,000 \text{ kg}$$

La magnitud de la resultante R y la tangente del ángulo β que forma R con el eje y son:

$$R = \sqrt{R_y^2 + R_z^2} = 2,561,000 \text{ kg.}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R_z}{R_y} = 1,25$$

Utilizando (4.33), la coordenada y_B del punto de intersección de la línea de acción de la resultante con el eje y es

$$y_B = \frac{2}{3} \frac{\int_a^c y^3 \left(1 - \frac{y^2}{H^2} \right) \left(-\frac{2a}{H^2} y \, dy \right) + H^3}{H^2} = \frac{2}{3} H \left[1 - \frac{4}{5} \left(\frac{a}{H} \right)^2 \right]$$

Sustituyendo los datos, se tiene $y_B = 4,74$ m.

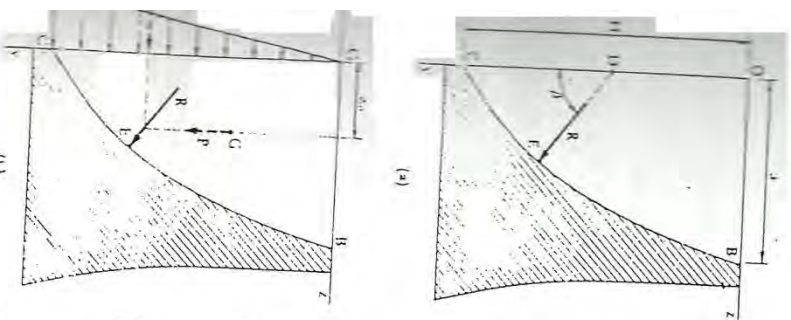


Fig. 4.34

La ecuación de la línea de acción de la resultante es $z = \operatorname{tg} \beta (y - y_B)$, es decir, $z = 1,25y - 5,93$. De la intersección de esta recta con la curva directriz $y^2 = \frac{H^2}{a^2}(a - z)$, se obtienen las coordenadas del centro de presiones

$$y_E = 7,11 \text{ m}, \quad z_E = 2,96 \text{ m}$$

Utilizando el segundo método (Fig. 4.34b), el peso P del volumen OBC de líquido es

$$P = \gamma b. \text{Área } OBC = \gamma b \int_0^{\frac{2}{3}a} a \, H = 1,600,000 \text{ kg}$$

La línea de acción de la fuerza P es una recta vertical que pasa por el centro de gravedad G de la superficie OBC , cuya coordenada z , según el ejemplo 4.11, es $z_G = a - \frac{3}{5}a = 0,4a = 2,4$ m. La resultante R , de las fuerzas que el líquido ejerce sobre OC , es

$$R_1 = \frac{\gamma b H^2}{2} = 2,000,000 \text{ kg}$$

Según (4.30), la línea de acción de la fuerza R_1 es una recta horizontal situada a una profundidad $y_G = \frac{2}{3}H = 6,66$ m. La resultante R de las fuerzas P y R_1 es una fuerza de magnitud $R = \sqrt{R_1^2 + P^2} = 2,561,000$ kg; su línea de acción forma con el eje y un ángulo β definido por $\operatorname{tg} \beta = \frac{R_1}{P} = 1,25$, y pasa por el punto de coordenadas $y_G = 6,66$ m, $z_G = 2,40$ m. La ecuación de la línea de acción de la resultante R será $z - z_G = \operatorname{tg} \beta (y - y_G)$, es decir, $z - 2,40 = 1,25(y - 6,66)$, o sea $z = 1,25y - 5,93$, que coincide con la ecuación obtenida mediante el primer método.

4.8. Presiones sobre cuerpos sumergidos

Consideremos un cuerpo sólido de peso P , volumen V y superficie A , que está en equilibrio sumergido en el seno de un líquido de peso específico γ (Fig. 4.35). Sobre cada elemento de superficie del cuerpo de área dA actúa la presión hidrostática p , y sobre toda la superficie del cuerpo el líquido ejerce una fuerza llamada *empuje*, definida por la expresión

$$E = \int_A p \, dA \quad (4.34)$$

Para determinar el empuje imaginemos que el cuerpo se retira del líquido y se sustituye por un volumen igual de líquido. Sobre este volumen V de líquido actúa su peso γV y la acción

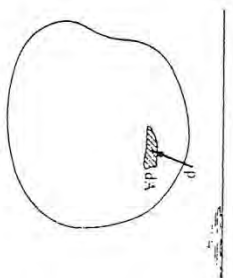


Fig. 4.35

TABLA I

Clase de terreno	$G_b(\text{kg/m}^3)$	φ	$\text{tg}(45 - \varphi/2)$
Arena gruesa seca	1.500	35°	0,270
Arena fina seca	1.600	35°	0,270
Arena fina ligeramente húmeda	1.800	40°	0,217
Arena fina saturada	2.000	25°	0,405
Gravilla angulosa	1.800	45°	0,171
Gravilla rodada	1.900	30°	0,332
Grava húmeda	1.600	30° a 40°	0,332 a 0,217
Arcilla esponjada, seca	1.600	40°	0,217
Arcilla esponjada, húmeda	2.000	20°	0,490
Arcilla densa con humedad normal	2.500	70°	0,031

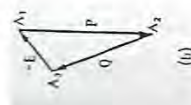
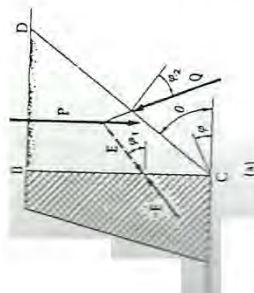


Fig. 4.40

Según la teoría de Coulomb, si el muro cediese las tierras deslizarían sobre una superficie plana CD definida por un ángulo θ superior al ángulo de talud natural (Fig. 4.40a); el prisma de tierras BCD está en equilibrio sometido a su propio peso P , a la fuerza $-E$ que el muro ejerce sobre el prisma de tierras y a la fuerza Q que ejerce sobre el prisma el resto de las tierras. Según las hipótesis de Coulomb, la fuerza $-E$ forma con la normal al parámetro del muro un ángulo φ_1 que depende de su rugosidad y del grado de humedad de las tierras; asimismo la fuerza Q forma un ángulo φ_2 con la normal a la superficie de deslizamiento CD , que depende exclusivamente de la clase de terreno. Conociendo las direcciones de las tres fuerzas P , $-E$, Q , y la magnitud de la fuerza P se construye el polígono de fuerzas cerrado $A_1A_2A_3$ (Fig. 4.40b) que determina la magnitud de la fuerza $-E$. Según el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, las tierras ejercen sobre el muro una fuerza o empuje E que será igual y directamente opuesta a la fuerza $-E$. La posición del plano de deslizamiento CD está definida por el ángulo θ para el cual el empuje E es máximo y para obtener el valor del ángulo θ es preciso proceder por tanteos. La teoría de Coulomb considera las tierras sin cohesión; en los terrenos naturales la cohesión no es nula y la superficie de deslizamiento se aleja bastante de la

forma plana, sin embargo la teoría de Coulomb puede seguir aplicándose, ya que las diferencias que se obtienen son despreciables.

Ejemplo 4.22. Un muro de sostenimiento de tierras de altura H tiene su paramento interior inclinado un ángulo β (Fig. 4.41). Calcular el diagrama de presiones y el empuje de las tierras. Datos: $H = 10,0$ m, $\beta = 30^\circ$. Las tierras son arenas finas ligeramente húmedas.

Solución: Utilizando la teoría de Rankine las tierras serán equivalentes a un líquido de peso específico $\gamma = G_s \text{tg}^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right)$. Según la tabla I la arena fina ligeramente húmeda tiene un peso específico aparente $G_s = 1.800 \text{ kg/m}^3$ y un ángulo de talud natural $\varphi = 40^\circ$, y, por tanto, $\gamma = 390,6 \text{ kg/m}^3$. Sustituyendo los datos en la ecuación (4.38), el empuje de las tierras por unidad de longitud de muro ($b = 1,0$ m) es

$$E = 19.530 \text{ kg}$$

y está aplicado en el punto O definido por la relación

$$\frac{OC}{BC} = \frac{1}{3}$$

PROBLEMAS

4.1. Sobre los puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y A_6 de un cuerpo rígido actúan las fuerzas paralelas F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5 , respectivamente. Determinar el centro de fuerzas paralelas. Datos: $A_1(0, 2, -4)$, $A_2(-3, 1, 2)$, $A_3(-4, 0, 2)$, $A_4(-1, -1, -1)$, $A_5(0, 0, 0)$, $F_1 = 500 \text{ kg}$, $F_2 = 300 \text{ kg}$, $F_3 = 600 \text{ kg}$, $F_4 = 1.000 \text{ kg}$, $F_5 = 400 \text{ kg}$.

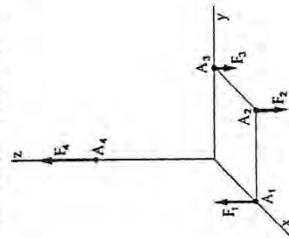


Fig. P-4.2

4.2. Determinar el centro de fuerzas paralelas F_1, F_2, F_3 y F_4 . Datos: $A_1(2, 0, 0)$, $A_2(3, 0, 3)$, $A_3(0, 3, 0)$, $A_4(0, 0, 4)$, $F_1 = 1.000 \text{ kg}$, $F_2 = 800 \text{ kg}$, $F_3 = 600 \text{ kg}$, $F_4 = 2.000 \text{ kg}$.

4.3. Determinar analítica y gráficamente el centro de fuerzas paralelas y coplanarias F_1, F_2, F_3 y F_4 . Datos: $A_1(0, 2)$, $A_2(1, 0)$, $A_3(2, 1)$, $A_4(4, 3)$, $F_1 = F_2 = 600 \text{ kg}$, $F_3 = 300 \text{ kg}$, $F_4 = 500 \text{ kg}$.

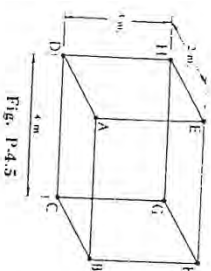


Fig. P-4.5

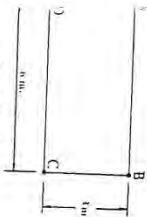


Fig. P-4.6

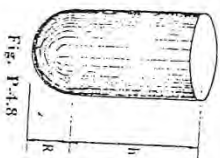


Fig. P-4.8

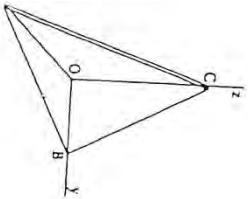


Fig. P-4.13

4.4. Determinar el centro de gravedad del sistema formado por los puntos materiales A , B y C , de masas $m_A = 10$ g, $m_B = 20$ g, $m_C = 30$ g y coordenadas $A(4, 3, -4)$, $B(1, 6, 2)$ y $C(0, 3, -1)$.

4.5. Determinar el centro de gravedad del sistema formado por ocho puntos materiales situados en los vértices de un paralelepípedo rectangular. Datos: $m_A = 50$ kg, $m_B = 30$ kg, $m_C = m_D = m_E = 60$ kg, $m_F = m_G = m_H = 20$ kg.

4.6. Determinar el centro de gravedad del sistema formado por los puntos materiales A , B , C y D , de masas $m_A = m_C = 120$ g, $m_B = 100$ g, $m_D = 200$ g.

4.7. Un cuerpo en forma de cono recto tiene una densidad $2g$ en la parte comprendida entre la base y un plano paralelo a ella, situado a una distancia igual a la mitad de la altura; en el resto del cuerpo la densidad es g . Hallar la posición del centro de gravedad del cuerpo.

4.8. El cuerpo representado tiene en su parte cilíndrica una densidad igual a la mitad de la correspondiente a la parte semiesférica. Hallar la posición del centro de gravedad del cuerpo. Datos: $R = 1,0$ m, $h = 3,0$ m.

4.9. Una placa triangular de espesor uniforme tiene una densidad que varía según la expresión $\rho = kxy^2$. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la placa.

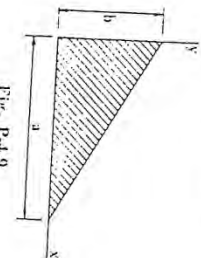


Fig. P-4.9

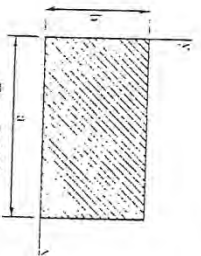


Fig. P-4.10

4.10. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de una placa rectangular homogénea cuyo espesor varía según la expresión $t = t_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)$.

4.11. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la placa triangular del problema 4.9 si el espesor t de la placa varía según la expresión $t = t_0(1 + x)$.

4.12. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un depósito cilíndrico homogéneo, de espesor uniforme, abierto por su parte superior. Datos: Altura del depósito $H = 2,0$ m, radio de la base $R = 1,0$ m, espesor $t = 2$ cm.

4.13. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la placa ABC , homogénea y de espesor constante. Datos: $OA = 6,0$ m, $OB = 2,0$ m, $OC = 4,0$ m.

4.14. Determinar el centro de gravedad de una placa homogénea de espesor uniforme, doblada en ángulo recto.

4.15. Determinar el centro de gravedad del alambre $ABCDE$, de sección uniforme, siendo la densidad de los tramos AB y BC tres veces mayor que la de los tramos CD y DE .

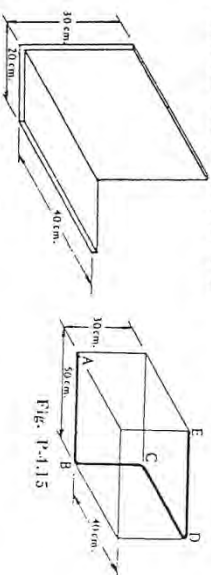


Fig. P-4.14

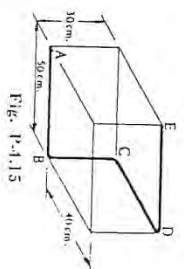


Fig. P-4.15

4.16. Determinar el centro de gravedad del alambre homogéneo de sección uniforme representado.

4.17. Demostrar que el centro de gravedad de una pirámide se halla situado a una distancia de la base igual a un cuarto de su altura.

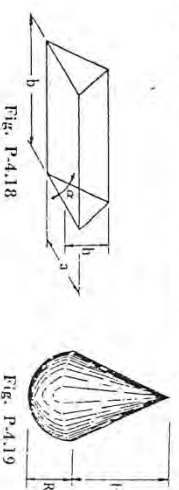


Fig. P-4.18

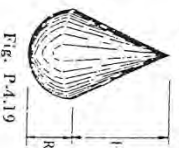


Fig. P-4.19

4.18. Hallar la posición del centro de gravedad de una cuña. Datos: a , b , h , a .

4.19. Determinar el centro de gravedad de la figura geométrica formada por un cono unido en su base a una semiesfera.

4.20 a 4.24. Determinar el centro de gravedad de las superficies rayadas.

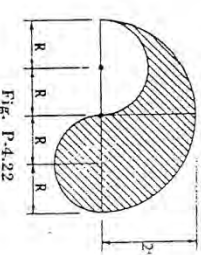


Fig. P-4.22

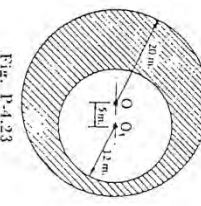


Fig. P-4.23

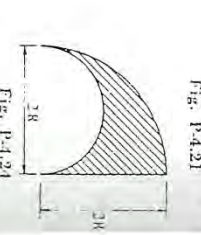


Fig. P-4.21

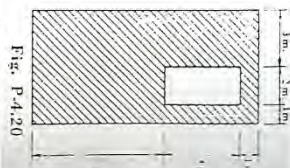


Fig. P-4.20

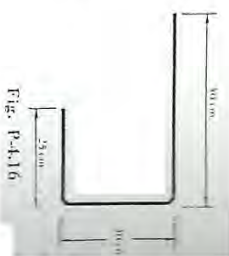


Fig. P-4.16

- 4.25. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie limitada por la curva $y^2 = 2x$ y las rectas $x = 2$, $x = 8$, $y = 0$.
- 4.26. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie limitada por la curva $y = x^2 - 4$ y la recta $y = x + 2$.
- 4.27 a 4.31. Determinar analíticamente y gráficamente el centro de gravedad de las superficies representadas.

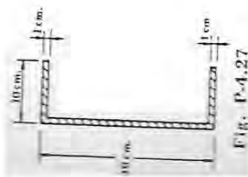


Fig. P-4.27

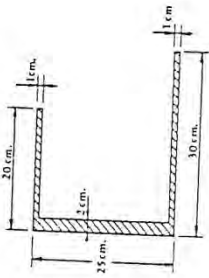


Fig. P-4.28

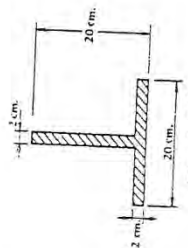


Fig. P-4.29

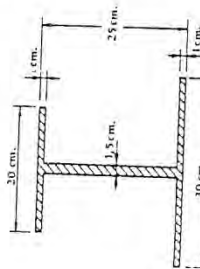


Fig. P-4.30

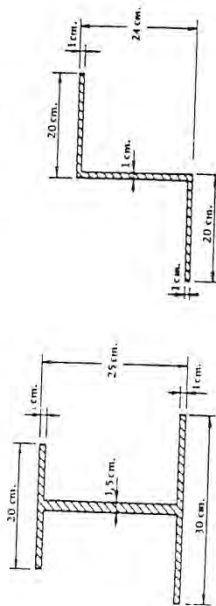


Fig. P-4.31

- 4.32. Determinar el centro de gravedad de la superficie representada. Datos: $R = 10$ cm, $t = 1$ cm, $\alpha = 30^\circ$.

- 4.33. Determinar el centro de gravedad de la línea $ABCD$.



Fig. P-4.32

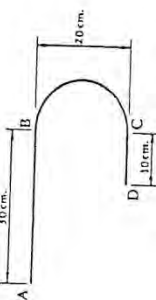


Fig. P-4.33

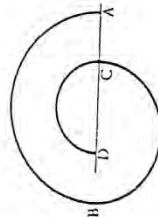


Fig. P-4.34

- 4.34. Determinar el centro de gravedad de una línea formada por tres semicircunferencias. Datos: $AB = 40$ cm, $BC = 30$ cm, $CD = 20$ cm.

- 4.35. Determinar el centro de gravedad de una semicircunferencia a y b .

- 4.36. Determinar el centro de gravedad del arco de la catenaria $y = \frac{k}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ cuyos extremos son $x = 0$ y $x = a$.

- 4.37. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la línea formada por la recta AB y el cuadrante de circunferencia BC . Datos: $OA = 40$ cm, $OB = OC = 30$ cm.

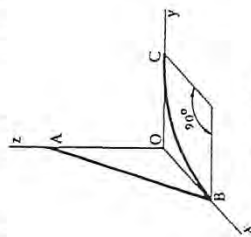


Fig. P-4.37

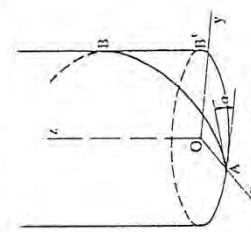


Fig. P-4.38

- 4.38. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del arco de hélice cilíndrica comprendida entre los puntos A y B . Datos: $OA = OB = 4.0$ m, $\alpha = 30^\circ$.

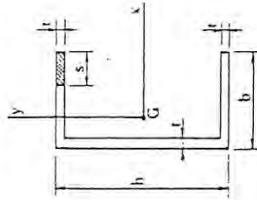


Fig. P-4.40

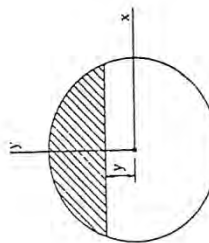


Fig. P-4.39

- 4.39. Representar la variación del momento estático de la superficie rayada respecto al eje x , en función de la variable y . Dato: Radio del círculo R .

- 4.40. Representar la variación del momento estático de la superficie rayada respecto al eje x , en función de la variable s . Datos: b , h , t . El punto G es el centro de gravedad de la superficie.

- 4.41. Representar la variación del momento estático de la superficie rayada del problema anterior respecto al eje y , en función de la variable s .

4.59. Calcular el diagrama de presiones y el empuje de las tierras sobre el muro de sostenimiento BCD . Dato: las tierras son arcillas espon-
jadas secas.

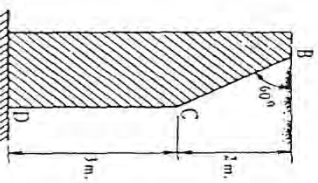


Fig. P-4.59

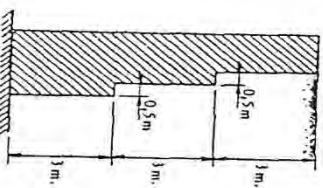


Fig. P-4.60

4.60. Calcular, según la teoría de Rankine, el diagrama de presiones y el empuje de las tierras sobre un muro de sostenimiento escalonado interiormente. Dato: las tierras son arenas finas saturadas.

RESUMIENDO

1. Equilibrio de una partícula

- La primera ley de Newton establece que cuando la fuerza que actúa sobre una partícula es nula, entonces la partícula se mueve con velocidad constante. Ese sistema de referencia, respecto del cual se ha medido la velocidad constante, se denomina *sistema inercial* y la partícula se dice que está en *equilibrio*. Si una partícula se mueve con velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial, es fácil demostrar que existe otro sistema inercial con relación al cual la partícula posee velocidad nula, es decir, está en *reposo*.
- De las leyes de Newton se concluye directamente que una *partícula* está en *equilibrio* si, y sólo si, la *fuerza* resultante que actúa sobre la partícula *es nula*.

2. Equilibrio de un sistema material

- Un *sistema material* es un conjunto de objetos materiales (por ejemplo, una barra de hierro, el gas encerrado en el cilindro de un motor de combustión interna, etc.). Una vez que se ha elegido el sistema, hay dos clases de objetos en el Universo: los que forman parte del sistema y los que no forman parte de él. Estos últimos ejercen *fuerzas* sobre el sistema que se denominan *externas*, mientras que las fuerzas ejercidas por una parte del sistema sobre otra se llaman *fuerzas internas*.
- El primer paso en el análisis mecánico es el aislamiento del sistema. Para ayudar a la identificación del sistema conviene realizar un dibujo del mismo y de todas las fuerzas externas que actúan sobre él, que recibe el nombre de diagrama de cuerpo libre.
- *Si un sistema se halla en equilibrio, entonces es nula la resultante general de las fuerzas aplicadas al mismo, así como su momento resultante respecto de un punto cualquiera:*

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}.$$

3. Equilibrio del sólido rígido

- El *sólido rígido* ideal se caracteriza por mantener *constante la distancia entre cada par de puntos*, aunque se encuentre en movimiento.
La simplificación básica que el sólido rígido introduce es la de determinar las condiciones suficientes para el equilibrio, además de mantener las necesarias escritas más arriba. O sea:

- Para que un sólido rígido se halle en equilibrio es necesario y suficiente que sea nula la resultante general de las fuerzas aplicadas al mismo, así como su momento resultante respecto de un punto cualquiera.

- Cuando las fuerzas solicitantes son coplanarias, los momentos tienen todos la misma dirección, aunque pueden tener sentidos contrarios. En este caso, la condición de equilibrio, $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$, la escribiremos como una ecuación escalar, tomando positivo uno de los dos sentidos posibles de los momentos, por ejemplo, el contrario del giro de las agujas del reloj:

$$+\curvearrowright \sum M = 0.$$

- Toda fuerza que actúa sobre un sólido rígido puede trasladarse a uno cualquiera de los puntos de su recta soporte (recta de acción), que esté invariablemente unido a su primitivo punto de aplicación. Y ni siquiera es preciso que el punto al cual se traslade la fuerza forme parte del sólido, pues siempre podemos, sin perturbar el equilibrio, introducir una conexión rígida entre el sólido y el nuevo punto de aplicación. Por esto se dice que las fuerzas aplicadas a un sólido son *vectores deslizantes*.

Esta posibilidad de transmisión de la fuerza se limita al sólido rígido y no es es como cables. Y los efectos de las fuerzas sobre a los de su momento y resultante general.

4. Sistemas de fuerzas equivalentes

- Todo lo que se diga sobre equivalencia de sistemas de fuerzas es aplicable a equivalencia de sistemas de vectores en general.

La proyección (asignándole carácter vectorial), m , del momento resultante de un sistema de fuerzas, respecto de un punto, O , sobre la resultante, se denomina *momento mínimo*. Tal proyección, m , no varía aunque se cambie el punto O por el O' (o sea, es un *invariante*):

$$m = \frac{\mathbf{M}' \cdot \mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}}{R}.$$

- Se dice que *dos sistemas* de fuerzas (o de vectores, en general) son *equivalentes* si tienen la misma resultante y el mismo momento respecto de un punto, O .

- Para que un *sistema* de fuerzas sea *equivalente* a una *fuerza única*, se requiere que el sistema tenga momento mínimo nulo (en general, que la *resultante* y el *momento* del sistema *sean perpendiculares*).

Aunque esta condición *no la cumplen*, en general, los *sistemas de fuerzas en el espacio*, la satisfarán los sistemas formados por: 1) Fuerzas concurrentes. 2) Fuerzas coplanarias. 3) Fuerzas paralelas.

- Un *sistema* de fuerzas es equivalente a un *par* (dos fuerzas iguales en módulo y dirección, pero de sentidos contrarios), si su resultante es nula, pero no lo es su momento. El momento de un par de fuerzas es independiente del punto que se tome como origen de momentos y su módulo es igual al producto de una de las fuerzas por la distancia que las separa.

5. Centro de fuerzas paralelas

- Dado un sistema de fuerzas paralelas, existe un punto C , por el cual pasa la línea de acción de la resultante, que tiene la propiedad de mantenerse fijo, al realizar, las fuerzas, rotaciones cualesquiera del mismo sentido y del mismo ángulo, alrededor de sus puntos de aplicación. El punto C se denomina *centro* del sistema de fuerzas paralelas.

- Las coordenadas del centro, C, del sistema de fuerzas paralelas, son:

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{R}, \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{R}, \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{R},$$

donde R es la resultante del sistema.

6. Centro de gravedad

- Sobre cada una de las porciones de un cuerpo sometido a la acción de la gravedad actúa una fuerza vertical; de modo que el cuerpo está sometido por esta causa a un sistema de fuerzas prácticamente paralelas, cuya resultante es el peso del cuerpo. Y, por lo dicho en el apartado anterior, puede afirmarse que el peso de un cuerpo se aplica siempre en un mismo punto, que se denomina *centro de gravedad*.
- Las coordenadas del centro de gravedad, como centro de fuerzas paralelas, se determinan por las fórmulas de la sección anterior:

$$x_G = \frac{\sum W_i x_i}{W}, \quad y_G = \frac{\sum W_i y_i}{W}, \quad z_G = \frac{\sum W_i z_i}{W},$$

donde x_i, y_i, z_i son las coordenadas de los puntos de aplicación de las fuerzas gravitatorias, $W_i = m_i g$, de las partículas del cuerpo, y $W = \sum W_i = mg$ es la resultante (el peso del cuerpo).

Y si los cuerpos no son muy extensos, al considerar g constante y sustituir W_i y W por sus valores, las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{m}, \quad y_G = \frac{\sum m_i y_i}{m}, \quad z_G = \frac{\sum m_i z_i}{m}, \quad (1)$$

que son las coordenadas del *centro de masa*, que en este supuesto coinciden con las del centro de gravedad.

- El centro de gravedad puede encontrarse fuera del cuerpo.
- Si es imposible descomponer el cuerpo en partes finitas, cuyos centros de gravedad sean conocidos, se descompone en pequeños elementos de masa, Δm_i , que reemplazan a las m_i de (1), y se pasa al límite en las igualdades (1), haciendo tender Δm_i a cero:

$$x_G = \frac{1}{m} \int x \, dm, \quad y_G = \frac{1}{m} \int y \, dm, \quad z_G = \frac{1}{m} \int z \, dm. \quad (2)$$

PROBLEMAS

5.1. Dos fuerzas paralelas de 50 N y 80 N, y del mismo sentido, actúan sobre un cuerpo. Para que éste se encuentre en equilibrio es preciso aplicar otra fuerza de sentido contrario que dista 0,24 m de la fuerza menor. La separación de las dos fuerzas primitivas es de:

- a) 0,15 m; b) 0,78 m; c) 0,39 m; d) 0,24 m; e) 0,48 m.

(Enero, 1984)

Solución:

La fuerza incógnita, F , debe estar situada entre las dos fuerzas dadas, F_1 y F_2 , y con sentido contrario. Si no fuera así, el cuerpo estaría sometido a un par, que le haría girar, pues el momento resultante no sería nulo.

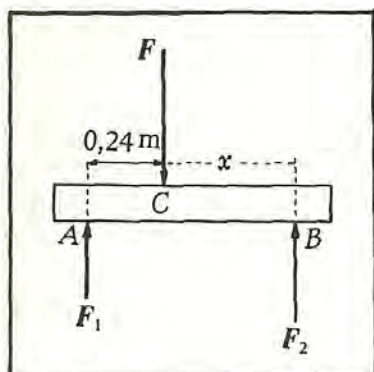


FIG. 5.1

Tomando momentos respecto de C , punto de aplicación de la fuerza desconocida, resultará, en virtud de la segunda condición de equilibrio:

$$\Sigma M_C = 0; \quad F_1 \cdot 0,24 - F_2 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0,15 \text{ m},$$

pues F_1 y F_2 valen 50 y 80, respectivamente.

En consecuencia, la separación entre las dos fuerzas F_1 y F_2 , valdrá:

$$\overline{AB} = 0,24 + x = 0,24 + 0,15 \Rightarrow \boxed{\overline{AB} = 0,39 \text{ m}}$$

y la respuesta correcta será la c).

5.2. Una barra uniforme, de peso W y longitud l , está suspendida inicialmente por dos fuerzas verticales iguales de 120 N cada una, aplicadas en los extremos. Si se sustituye una de ellas por otra, con el punto de aplicación desplazado $l/4$ hacia el centro, la fuerza por la cual hay que reemplazar la del otro extremo, para que siga estando la barra en equilibrio en posición horizontal, es de:

- a) 240 N; b) 120 N; c) 80 N; d) 60 N; e) 40 N.

Solución:

En la figura 5.2 (a) se ha representado la situación inicial con la barra en equilibrio y en la (b) la situación final con las nuevas fuerzas, F_3 y F_4 , desconocidas, además del

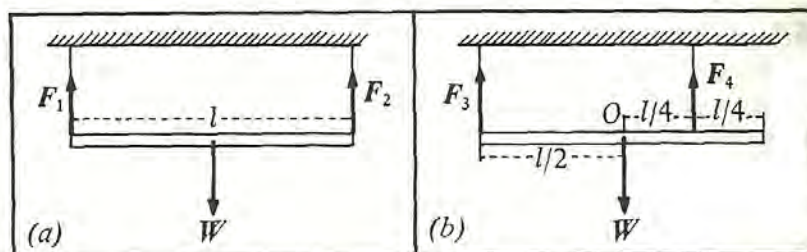


FIG. 5.2

peso, W , que no ha variado. Estas tres fuerzas deben mantener la barra en equilibrio, de donde se deriva

$$R = \Sigma F = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma M_O = 0,$$

habiendo tomado momentos respecto del punto O . O sea:

$$\begin{cases} F_3 + F_4 - W = 0 \Rightarrow F_3 + F_4 - W = 0 \\ F_3 \frac{l}{2} - F_4 \frac{l}{4} = 0 \Rightarrow \frac{F_3}{2} - \frac{F_4}{4} = 0, \end{cases} \quad (a)$$

y el peso W se calcula a partir del equilibrio en la posición (a):

$$W = F_1 + F_2 = 120 + 120 = 240 \text{ N},$$

con lo cual el sistema de ecuaciones (a) se transforma en:

$$\begin{cases} F_3 + F_4 = 240 \\ F_3 = \frac{F_4}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{F_3 = 80 \text{ N}}.$$

La respuesta correcta es la c).

5.3. Un hombre de 80 kg de peso se encuentra en el medio de una escalera de 2,0 m de longitud y peso despreciable, que tiene como puntos de apoyo el suelo y la esquina superior de una pared de 1,0 m de altura. El ángulo que forma la escalera con el suelo es de 45° . Suponiendo que hay

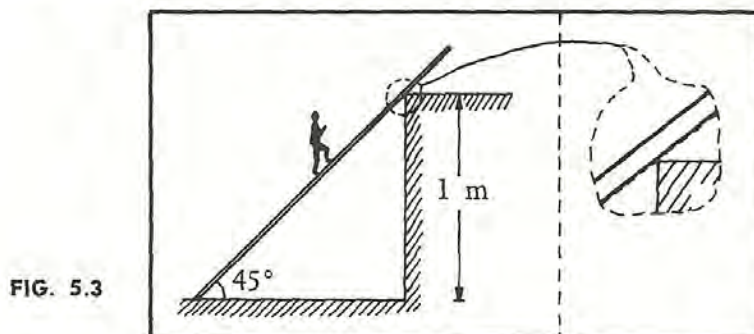


FIG. 5.3

rozamiento en el extremo de la escalera en contacto con el suelo, y no lo hay en el otro, ¿cuál es el valor mínimo que debe tener el coeficiente de rozamiento para que exista equilibrio y cuánto vale la fuerza que la pared ejerce sobre la escalera?

(Febrero, 1982)

Solución:

En primer lugar, dibujemos el diagrama de cuerpo libre. La única dificultad puede estar en la dirección de la fuerza N_1 . ¿Será vertical, horizontal o perpendicular a la escalera? Para contestar, basta con averiguar la dirección del plano tangente común a la escalera y a la esquina de la pared, que lo hemos señalado en el dibujo ampliado de esa zona. La fuerza N_1 es perpendicular a él. (Si la escalera, en lugar de estar apoyada en una esquina, estuviera apoyada en una pared vertical, el plano tangente común sería vertical y N_1 horizontal).

En virtud de la primera condición de equilibrio, se tiene:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_r = N_1 \cos 45^\circ & (a) \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow W = N_2 + N_1 \sin 45^\circ & (b) \end{cases}$$

Para aplicar la segunda condición de equilibrio tomaremos momentos respecto del punto A y tendremos en cuenta que el momento de un vector no se altera si se desplaza su punto de aplicación a lo largo de su recta de acción, con lo cual, para hallar el módulo del momento de una fuerza F , bastará multiplicar F por la distancia (medida perpendicularmente) desde el punto a la línea de acción de la fuerza.

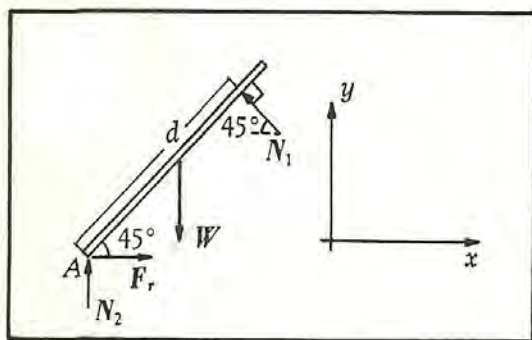


FIG. 5.4

Por otra parte, como la fuerza N_1 tiende a girar la escalera en sentido contrario al de las agujas del reloj y W a favor, resultará:

$$\Sigma M_A = 0, \quad + \curvearrowright \Sigma M_A = 0 \Rightarrow N_1 d - W \times 1 \times \cos 45^\circ = 0,$$

y como

$$d = 1 / \cos 45^\circ = \sqrt{2} \text{ m} \quad \text{y} \quad W = 80 \times 9,81 = 785 \text{ N}.$$

resulta:

$$\sqrt{2} N_1 - 785 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{N_1 = 392 \text{ N}}.$$

Para hallar la fuerza de rozamiento, sustituimos este valor de N_1 en (a):

$$F_r = N_1 \cos 45^\circ = 277 \text{ N},$$

con lo cual, el valor mínimo del coeficiente de rozamiento pedido, valdrá:

$$\mu = \frac{F_{r \text{ máx}}}{N_2} = \frac{F_{r \text{ máx}}}{W - N_1 \sin 45^\circ} = \frac{277}{785 - 277} \Rightarrow \boxed{\mu = 0,55}.$$

5.4. Una escalera uniforme se apoya sobre una pared vertical por un extremo y sobre el suelo por el otro. El coeficiente de rozamiento en cada extremo vale 0,3. El ángulo mínimo que puede estar inclinada la escalera, respecto del suelo, sin caer, es de:

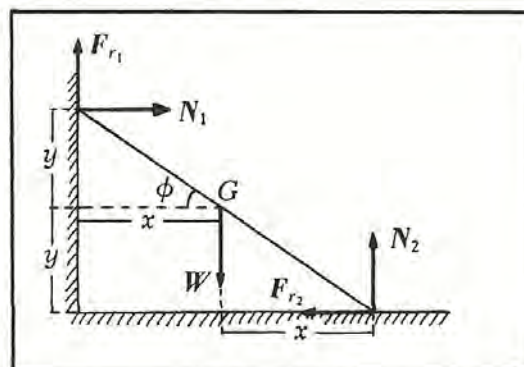
- a) 78° ; b) 57° ; c) 39° ; d) 45° ; e) 61° .

Solución:

En primer lugar, dibujemos las fuerzas que actúan sobre la escalera: las dos fuerzas de rozamiento, F_{r1} y F_{r2} , y las normales, N_1 y N_2 , que actúan en los extremos con las direcciones indicadas en la figura (véase la explicación dada sobre la dirección de N_1 , en

el problema precedente). Las fuerzas de rozamiento tratan de impedir el deslizamiento del cuerpo; por eso, la de la pared, F_{r1} , va hacia arriba y, la del suelo, hacia la izquierda. La otra fuerza que actúa sobre la escalera es el peso, W , que está aplicada en el centro de gravedad.

FIG. 5.5



Tomando momentos respecto de G , en virtud de las condiciones de equilibrio, se tiene:

$$\Sigma F=0, \quad \Sigma M_G=0.$$

La primera de estas ecuaciones conduce a:

$$\begin{cases} \Sigma F_x=0 \Rightarrow N_1=F_{r2} \\ \Sigma F_y=0 \Rightarrow W=F_{r1}+N_2, \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que $F_r=\mu N$, las ecuaciones precedentes se convierten en:

$$\begin{cases} N_1=\mu N_2 \\ W=\mu N_1+N_2=\mu^2 N_2+N_2=N_2(\mu^2+1) \end{cases} \quad (a)$$

Para aplicar la segunda condición de equilibrio, tomaremos momentos respecto del centro de gravedad, G , donde está aplicado el peso, W . Para calcular el módulo del momento de cada fuerza, recordemos que basta multiplicar dicha fuerza por la distancia que separa el punto G de la línea de acción de la fuerza (véase el problema anterior). Teniendo en cuenta que las fuerzas F_{r1} , N_1 , F_{r2} tienden a hacer girar la escalera en el sentido del movimiento de las agujas del reloj y N_2 en sentido contrario, los momentos de las primeras fuerzas tendrán igual dirección y sentido contrario que el de la segunda. O sea:

$$\begin{aligned} \Sigma M_G=0; \quad + \curvearrowright \Sigma M_G=0 &\Rightarrow N_2x - F_{r1}x - N_1y - F_{r2}y=0; \\ N_2x - \mu N_1x - N_1y - \mu N_2y &=0 \end{aligned}$$

y, en virtud de (a):

$$N_2x = \mu^2 N_2x + \mu N_2y + \mu N_2y \Rightarrow x(1-\mu^2) = 2\mu y$$

y, por tanto:

$$\frac{y}{x} = \frac{1-\mu^2}{2\mu}.$$

Como $\text{tg } \phi = y/x$, resulta, finalmente:

$$\text{tg } \phi = \frac{y}{x} = \frac{1-\mu^2}{2\mu} = \frac{1-0,3^2}{2 \times 0,3} \Rightarrow \boxed{\phi = 57^\circ}.$$

En consecuencia, la respuesta correcta es la b).

5.5. Una barra de 20 m soporta una carga de 1000 kg, como indica la figura. El cable BC es horizontal y mide 10 m. Calcular la tensión en dicho cable y en la barra.

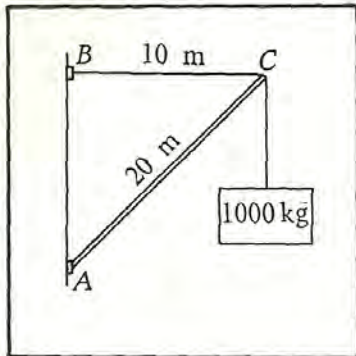


FIG. 5.6

Solución:

Sobre el cable y la barra aparecerán sendas fuerzas, F_1 y F_2 , que, juntamente con la carga de 1000 kg (~ 9810 N) han de constituir un sistema en equilibrio.

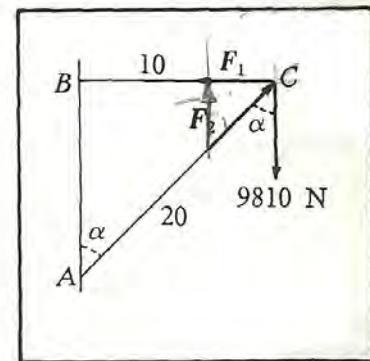


FIG. 5.7

Si tomamos momentos respecto de A, resultará:

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F_1 \cdot AB - 9810 \times 10 = 0, \quad (a)$$

y, por ser

$$AB = \sqrt{20^2 - 10^2},$$

de la ecuación (a) se desprende:

$$F_1 = 5664 \text{ N}.$$

Por otra parte, al existir equilibrio, también deberá cumplirse $\Sigma F = 0$, que proyectada sobre el eje vertical, da:

$$F_2 \sin \theta - 9810 = 0,$$

y como $\sin \alpha = 10/20 = 1/2$, la ecuación precedente nos conduce a:

$$F_2 = 19.620 \text{ N}.$$

Si hubiéramos elegido equivocadamente el sentido de alguna fuerza en la figura 5.7, el resultado de F_1 o F_2 habría sido negativo, lo que nos permitiría rectificar el error.

5.6. Las fuerzas $F=3i-j$, aplicada en el punto $P(0, 1, -3)$, y $-F=-3i+j$, aplicada en el punto $P'(2, 1, 0)$, constituyen un par. ¿Se puede sustituir por otro, $\{F', -F'\}$, de tal modo que F' esté aplicada en $Q(1, 1, 1)$ y $-F'$ en $Q'(2, -1, 3)$? En caso afirmativo, determinar F' .

Solución:

Como el momento de un par es independiente del punto que se elija como origen de momentos, podemos tomar P' como tal punto, con lo cual el momento del par $\{F, -F\}$ valdrá:

$$M = P'P \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3i - 9j + 2k,$$

puesto que

$$P'P = (0-2)i + (1-1)j + (-3-0)k = -2i - 3k.$$

Para que el par $\{F, -F\}$ se pueda sustituir por el par $\{F', -F'\}$, ambos han de tener igual momento. O sea, el momento M' de $\{F', -F'\}$ ha de ser también M :

$$M' = M \Rightarrow Q'Q \times F' = M, \quad (a)$$

y esta última igualdad es imposible que se verifique, porque no puede encontrarse ninguna fuerza F' que la satisfaga. En efecto, de (a) se desprende que M debe ser perpendicular a $Q'Q$, lo cual no se cumple, porque su producto escalar no es nulo:

$$M \cdot Q'Q = (-3i - 9j + 2k) \cdot (-i + 2j - 2k) = -19 \neq 0.$$

5.7. Demostrar que si un cuerpo sometido a la acción de tres fuerzas está en equilibrio, las tres fuerzas han de ser coplanarias.

Solución:

Por estar el cuerpo en equilibrio, la resultante y el momento del sistema de fuerzas tienen que ser nulos:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 = 0, \quad (a)$$

y tomando momentos respecto de un punto, O , de la recta de acción de F_1 , se tiene:

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3 = 0, \quad r_2 \times F_2 = -r_3 \times F_3.$$

El primer miembro de esta última igualdad es un vector perpendicular al plano determinado por r_2 y F_2 y el segundo miembro un vector perpendicular al plano formado por r_3 y F_3 . En consecuencia, ambos planos son paralelos. Y como ambos pasan por O , que es de donde parten r_2 y r_3 , son, en realidad, el mismo plano. Ya está, por consiguiente, demostrado que F_2 y F_3 son coplanarias.

Falta por demostrar que F_1 está contenida también en el plano de F_2 y F_3 . Para ello, despejaremos F_1 de (a):

$$F_1 = -F_2 - F_3,$$

lo cual significa que F_1 pertenece al plano determinado por F_2 y F_3 .

5.8. Sea el sistema de fuerzas $F_1 = i + j$, $F_2 = 2i + j - k$, $F_3 = i - 2j + 5k$. Un punto de la recta de acción de la primera es $O(0, 0, 0)$, de la segunda, $A(1, 0, 0)$, y de la tercera, $B(0, 0, 1)$. ¿Se puede reemplazar este sistema por una fuerza única?

Solución:

No, porque la resultante, R , y el momento, M_O , no son perpendiculares. En efecto:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 = 4i + 4k,$$

$$M_O = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3 = 0 + i \times (2i + j - k) + k \times (i - 2j + 5k) = 2i + 2j + k,$$

puesto que se han tomado momentos respecto del origen, y

$$r_1 = 0, \quad r_2 = OA = i, \quad r_3 = OB = k.$$

Y como el producto escalar de M_O por R ,

$$M_O \cdot R = (2i + 2j + k) \cdot (4i + 4k) = 12 \neq 0,$$

es distinto de cero, se deduce que *no* son perpendiculares ambos vectores.

5.9. En el sistema de fuerzas de la figura, se cumple que $|F_2| = |F_3| = F$. Se pide: 1) Calcular $|F_1|$ para que el sistema pueda reducirse a una fuerza única, R . 2) Hallar R y averiguar su recta de acción.

Solución:

1.º Para que el sistema de fuerzas de la figura pueda reducirse a una fuerza única, su resultante general, R , y su momento resultante, M_O , deben ser perpendicu-

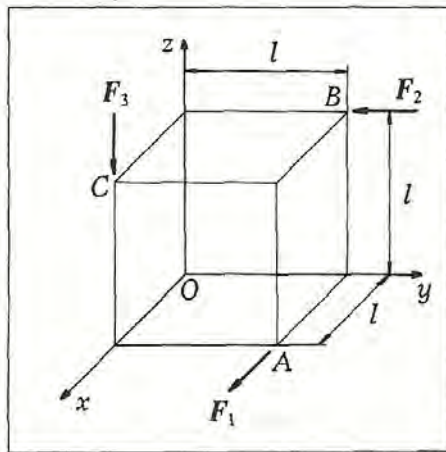


FIG. 5.8

res. O sea, su producto escalar ha de anularse. Impondremos esta condición, la cual nos permitirá averiguar F_1 :

$$R = F_1 + F_2 + F_3 = F_1 i - F j - F k \tag{a}$$

$$\begin{aligned} M_O &= r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3 = OA \times F_1 + OB \times F_2 + OC \times F_3 = \\ &= (li + lj) \times F_1 i + (lj + lk) \times (-F j) + (li + lk) \times (-F k) = lF i \wedge lF j - lF_1 k, \end{aligned}$$

pues hemos tomado momentos respecto del origen de coordenadas.

Como $R \cdot M_O = 0$, resulta

$$R \cdot M_O = lFF_1 - lF^2 + lFF_1 = 0 \Rightarrow F_1 = \frac{F}{2}.$$

2.º Para hallar R , basta sustituir el valor obtenido para F_1 en (a):

$$R = F_1 i - Fj - Fk = \frac{F}{2} i - Fj - Fk, \quad \boxed{R = \frac{F}{2} i - Fj - Fk},$$

y para que esta resultante sea equivalente al sistema de fuerzas de la figura, es preciso que su momento respecto del origen de coordenadas sea igual al momento resultante del sistema, M_O , que ya ha sido calculado. Es decir:

$$r \times R = M_O,$$

donde r es el vector que une el origen de coordenadas con un punto cualquiera, $P(x, y, z)$, de la línea de acción de R :

$$r = xi + yj + zk.$$

Por tanto, la igualdad anterior se transforma en:

$$\begin{aligned} (xi + yj + zk) \times \left(\frac{F}{2} i - Fj - Fk \right) &= lFi + lFj - lF_1 k \\ (-yF + zF)i + \left(xF + z \frac{F}{2} \right) j - \left(xF + y \frac{F}{2} \right) k &= lFi + lFj - l \frac{F}{2} k, \end{aligned}$$

pues $F_1 = \frac{F}{2}$. O sea:

$$\begin{cases} -yF + zF = lF \\ xF + z \frac{F}{2} = lF \\ xF + y \frac{F}{2} = l \frac{F}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - y = l \\ x + \frac{z}{2} = l \\ x + \frac{y}{2} = \frac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x + \frac{z}{2} = l \\ x + \frac{y}{2} = \frac{l}{2} \end{cases}}$$

donde hemos prescindido de la primera ecuación por ser combinación lineal de las otras dos (segunda menos tercera). El resultado hallado es la ecuación de una recta (en el espacio), en la cual debe estar situada la resultante.

5.10. Averiguar el momento mínimo del sistema de fuerzas $F_1 = 2i + j$, $F_2 = i - j - k$, $F_3 = j + k$, aplicadas, respectivamente, en los puntos: $P_1(1, 0, 1)$, $P_2(1, 0, 0)$, $P_3(2, 1, 1)$.

(Febrero, 1985)

Solución:

El momento mínimo, m , es la proyección (dotada de carácter vectorial) del momento resultante del sistema, M , respecto de un punto, sobre la resultante, R (véase página 90).

Como $M \cdot R$ es igual a R multiplicada por la proyección de M sobre R , dicha proyección valdrá:

$$m = \frac{M \cdot R}{R}.$$

Así, pues, es necesario calcular M y R :

Tomando el origen de coordenadas como origen de momentos, queda:

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_2 + M_3 = (r_1 \times F_1) + (r_2 \times F_2) + (r_3 \times F_3) = \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i + j + 2k. \end{aligned}$$

La resultante y su módulo, valen:

$$\begin{aligned} R &= F_1 + F_2 + F_3 = (2i + j) + (i - j - k) + (j + k) = 3i + j, \\ R &= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Luego:

$$m = \frac{M \cdot R}{R} = \frac{(-i + j + 2k) \cdot (3i + j)}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{m = \frac{-2}{\sqrt{10}}}.$$

La dirección de m es la de R .

5.11. Dos fuerzas paralelas y de igual sentido, de módulos 1 y 2, respectivamente, separadas una distancia de 10 unidades, actúan sobre un cuerpo. ¿Se pueden sustituir por una fuerza única? En caso afirmativo, ¿dónde habrá que situarla? En caso negativo, ¿por qué?

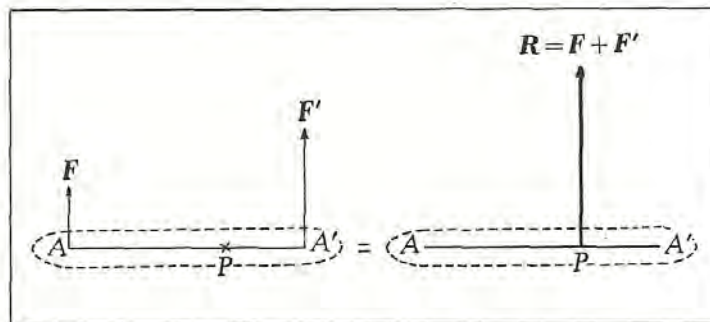


FIG. 5.9

Solución:

Para que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes, deben tener la misma resultante y el mismo momento.

Para que se cumpla la primera condición en el problema planteado, la fuerza única, R , que debe sustituir al sistema formado por F y F' ha de ser igual a su suma:

$$R = F + F' \Rightarrow \boxed{R = 3}.$$

Para que se verifique la segunda condición, la fuerza R habrá que situarla en un punto tal que su momento respecto de un punto, arbitrario, coincida con el momento

del sistema $\{F, F'\}$ respecto de ese punto. Para ello, lo más fácil es buscar un punto, P , con relación al cual el momento del sistema $\{F, F'\}$ sea nulo, y allí habrá de situarse la resultante R , pues, así, su momento respecto de P también será nulo (y si los momentos respecto de P son iguales, también lo serán respecto de cualquier otro punto, por lo dicho en la pág. 18):

Momento de F respecto de P + Momento de F' respecto de $P = 0$

Momento de F respecto de $P = -$ Momento de F' respecto de P

$$PA \times F = -PA' \times F',$$

de donde se desprende:

$$|PA|F = |PA'|F' \Rightarrow \frac{PA}{PA'} = \frac{F'}{F}, \quad (a)$$

igualdad que nos permite averiguar la posición de P :

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{F'}{F} = \frac{2}{1} \Rightarrow PA = 2PA',$$

y como, por otra parte, $PA + PA' = 10$, resulta:

$$2PA' + PA' = 10 \Rightarrow PA' = \frac{10}{3} \quad \text{y} \quad \boxed{PA = \frac{20}{3}}.$$

En conclusión, la fuerza única que puede sustituir al sistema dado debe tener de módulo 3, la misma dirección y sentido de F y F' , y pasar por el punto P , determinado por la igualdad precedente.

La ecuación (a) expresa la conocida regla de la composición de dos fuerzas paralelas de igual sentido: El punto por el que ha de pasar la resultante debe *dividir el segmento* que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas *en partes inversamente proporcionales a ellas*.

5.12. Sustituir el sistema de fuerzas de la figura: $F_1 = 50$ N, $F_2 = 40$ N, $F_3 = 70$ N, por otro equivalente, consistente en una única fuerza.

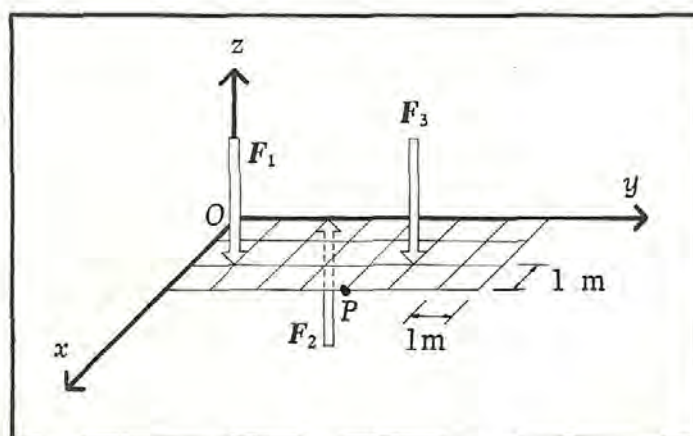


FIG. 5.10

Solución:

Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienen la misma resultante y el mismo momento respecto de un punto. La resultante de las tres fuerzas dadas, es:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 = -50k + 40k = -10k = -10k.$$

Así, pues, el sistema equivalente al dado estará formado por una fuerza, $R = -10k$, situada en un punto $P(x, y)$, tal que el momento de R respecto de O coincida con el momento del sistema dado respecto de O . Esta condición nos permitirá averiguar el punto de aplicación $P(x, y)$ de la resultante.

El momento del sistema dado respecto de O , vale:

$$\begin{aligned} M_O &= r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + r_3 \times F_3 = (2i + j) \times (-50k) + 2j \times 40k + (2i + 5j) \times (-10k) = \\ &= -320i + 240j. \end{aligned}$$

En consecuencia, el momento de R :

$$r \times R = (xi + yj) \times (-10k) = -10yi + 10xj,$$

deberá coincidir con M_O :

$$-10yi + 10xj = -320i + 240j,$$

de donde se deriva:

$$\boxed{x = 3 \text{ m}, \quad y = 4 \text{ m}}.$$

5.13. Tres fuerzas iguales están aplicadas en puntos distintos, A , B , C , como indica la figura. Demostrar que se pueden sustituir las tres por una única fuerza, aplicada en el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC (baricentro).

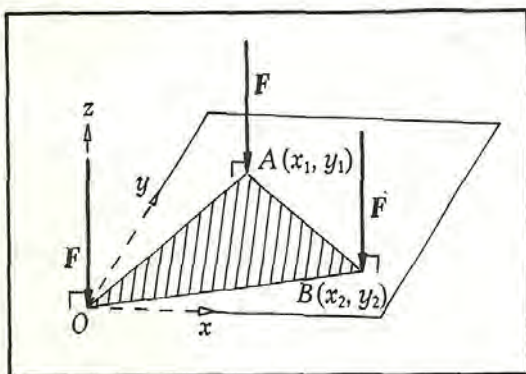


FIG. 5.11

Solución:

Se pueden ir componiendo las fuerzas dos a dos, en virtud de la regla demostrada en el problema 11: «El punto por el que ha de pasar la resultante debe dividir el segmento que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas en partes inversamente proporcionales a ellas.» Por tanto, las fuerzas aplicadas en O y en A pueden reemplazarse por una que pase por el punto medio, cuyas coordenadas serán $P(x_1/2, y_1/2)$, si se toma el origen de coordenadas en O , el plano xy coincidente con el del triángulo, y las coordenadas de A y B , respectivamente iguales a (x_1, y_1) y (x_2, y_2) .

A continuación se compone esta resultante $R = 2F$, aplicada en $P(x_1/2, y_1/2)$ con la F aplicada en $B(x_2, y_2)$, con lo que se tendrá una fuerza $R' = 2F + F = 3F$, aplicada en un

punto G que dividirá el segmento PB en partes inversamente proporcionales a las fuerzas. O sea:

$$\frac{PG}{GB} = \frac{F}{2F} = \frac{1}{2},$$

lo cual significa que G es el punto de intersección de las medianas (baricentro).

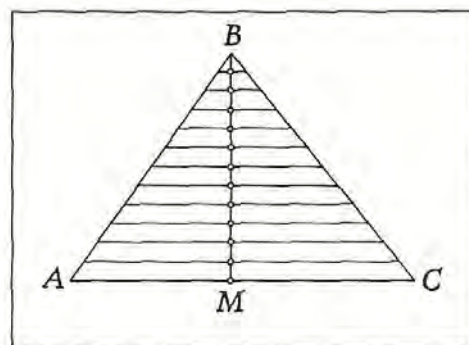
Así, pues, *el sistema dado es equivalente a una fuerza $R'=3F$ situada en el baricentro del triángulo.*

5.14. Determinar la posición del centro de gravedad de una lámina plana uniforme de forma triangular.

Solución:

Descompongamos el triángulo en pequeñas barras paralelas al lado AC , como indica la figura. El centro de gravedad de cada una de estas barras está en su punto

FIG. 5.12



medio. En consecuencia, el centro de gravedad del triángulo estará en un punto de la mediana BM .

Si repetimos el razonamiento, descomponiendo el triángulo en barras elementales paralelas a BC concluiremos que el centro de gravedad también debe estar en la mediana que parte de A .

En consecuencia, el centro de gravedad del triángulo es el *punto de intersección de sus medianas* (de ahí el nombre de baricentro con que se designa este punto).

5.15. Hallar el centro de gravedad de una barra uniforme en forma de arco de circunferencia de radio R , que subtiende un ángulo central $2\phi_0$. Particularizar al caso de una barra semicircular ($2\phi_0 = \pi$).

Solución:

Tomando el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia y el eje y como eje de simetría, *la abscisa del centro de gravedad es nula*, pues, en virtud de (2):

$$x_G = \frac{1}{m} \int x dm,$$

y a cada elemento de masa dm con abscisa x_i , le corresponde otro con abscisa $-x_i$, de donde se desprende que la expresión anterior es nula.

Para hallar la ordenada del centro de gravedad, tomemos coordenada apliquemos (2):

$$y_G = \frac{1}{m} \int y \, dm.$$

Representando por λ la masa por unidad de longitud de la barra, resulta:

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{dm}{R d\phi} \Rightarrow dm = \lambda R d\phi,$$

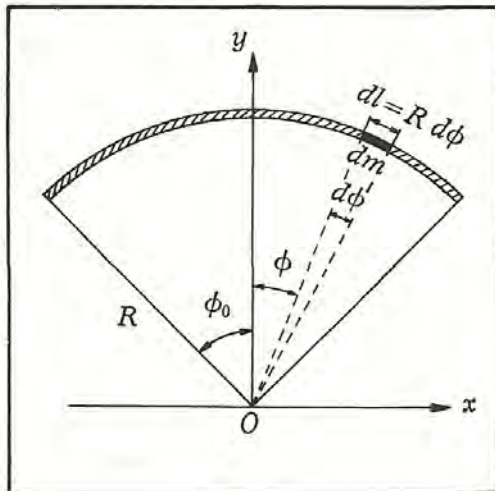


FIG. 5.13

pues $dl = R d\phi$, como puede apreciarse en la figura. Y la masa total, m , de la barra, será:

$$m = \lambda l = \lambda R (2\phi_0).$$

Y como la ordenada, y , del elemento de masa, dm , representado en la figura, vale:

$$y = R \cos \phi,$$

al sustituir (b), (c) y (d) en (a), se tiene:

$$y_G = \frac{1}{2\lambda R \phi_0} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} (R \cos \phi) (\lambda R d\phi) = \frac{R}{2\phi_0} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} \cos \phi \, d\phi = \frac{R \operatorname{sen} \phi_0}{\phi_0},$$

$$\boxed{y_G = \frac{R \operatorname{sen} \phi_0}{\phi_0}}$$

Si la barra tiene forma *semicircular*, la abscisa del centro de gravedad no se altera y la ordenada se calcula sin más que hacer $\phi_0 = \pi/2$ en la fórmula anterior:

$$y_G = \frac{R \operatorname{sen} (\pi/2)}{\pi/2} \Rightarrow \boxed{y_G = \frac{2R}{\pi}}.$$

Como puede verse, el centro de gravedad de esta barra cae fuera de la misma

5.16. Averiguar la posición del centro de gravedad de una lámina uniforme con forma de sector circular de radio R_0 y ángulo central $2\phi_0$. Particularizar para una lámina semicircular ($2\phi_0 = \pi$).

Solución:

Descompongamos el sector circular en pequeños «triángulos» elementales, de los cuales se muestra uno en la figura en un dibujo ampliado. El centro de gravedad de este triángulo elemental está en el baricentro, punto de intersección de las medianas (véase el problema 14), que se halla a $\frac{2}{3}R_0$ del centro.

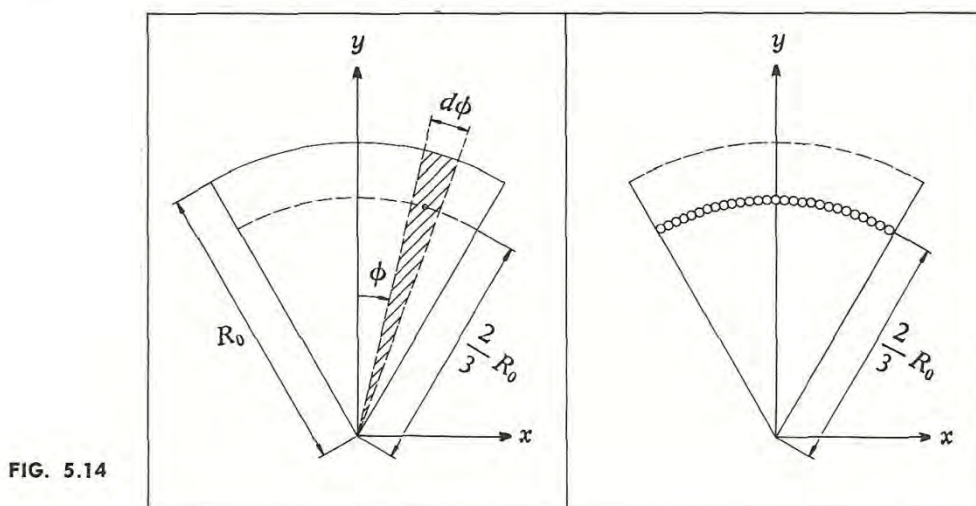


FIG. 5.14

Para hallar el centro de gravedad del sector circular, lo podemos sustituir por un arco de circunferencia distante $\frac{2}{3}R_0$ del centro, que es donde se encontraban los centros de gravedad de los triángulos elementales anteriores. Y en el problema precedente hemos demostrado que el centro de gravedad de un arco de circunferencia de radio R viene determinado por

$$x_G = 0, \quad y_G = \frac{R \sin \phi_0}{\phi_0},$$

que, en nuestro caso, se convertirá en:

$$\boxed{x_G = 0}, \quad \boxed{y_G = \frac{2}{3} R_0 \frac{\sin \phi_0}{\phi_0}},$$

pues $R = \frac{2}{3} R_0$.

Si la lámina es semicircular, al sustituir $\phi_0 = \pi/2$ en las fórmulas precedentes, resulta:

$$\boxed{x_G = 0}, \quad \boxed{y_G = \frac{4R}{3\pi}}.$$

TEMA III

CINEMÁTICA

Cinemática de la partícula

Cuando observamos un objeto que se mueve por el espacio medimos su velocidad mediante el tiempo; pero, ¿cómo medir la velocidad con que pasa el tiempo?

Es un error pensar que la función del reloj es medir la velocidad con que avanza el tiempo. El reloj mide simplemente los intervalos de éste, no su velocidad, ..., que son dos cosas tan distintas como la regla y el velocímetro. (Paul Davies.)



Introducción

La mecánica es una parte importante de la Física que trata, entre otras magnitudes, de los movimientos de los cuerpos y las causas que los producen.

De los movimientos se ocupa la cinemática y de las fuerzas que los originan, la dinámica.

En este tema nos ceñiremos a los movimientos, prescindiendo de sus causas; es decir, la cinemática de las partículas materiales. Sintetizando más el concepto, vamos a estudiar el movimiento de la partícula material; y en los casos en que intervengan conjuntos o sistemas de partículas, nos referiremos a un punto material llamado centro de masas, en el que supondremos concentrada toda la masa del sistema.

Nos limitaremos a estudiar los movimientos rectilíneos y circulares, así como aquellos que resultan de componer los movimientos que afectan a una partícula en un desplazamiento determinado, como es el de los proyectiles. En cualquier caso, hemos de hacer hincapié en los sistemas de referencia, sin los cuales la descripción del movimiento no tiene ningún sentido.



La energía potencial del arco tenso, lanza la flecha hacia el blanco.

1. Movimiento de la partícula

Se dice que una partícula se mueve cuando ocupa posiciones diferentes en el tiempo. Las diversas posiciones que ocupa la partícula en el espacio se determinan mediante un referencial o sistema de referencia elegido. Se suele tomar como referencial el sistema $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, cuyos vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son ortonormales entre sí, referido a un punto de la Tierra o al laboratorio.

Si dicho sistema de referencia lo consideramos fijo, el movimiento resultante de la partícula es absoluto; si aquél se mueve a su vez, el movimiento es relativo. En nuestro Cosmos, todos los movimientos son relativos ya que no existen puntos fijos o inmóviles.

No obstante, se denominan sistemas de referencia inerciales a los que, convencionalmente, suponemos fijos o aquellos que se desplazan rectilíneamente con movimiento uniforme. En ellos se cumplen las leyes de Newton. Tal es el sistema de referencia del laboratorio $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ que vamos a utilizar en este estudio.

Prescindimos, por tanto, de los sistemas no inerciales, que son los que se desplazan con aceleración; y, consecuentemente, al referirnos a un punto de la Tierra como sistema inercial, prescindimos también de sus movimientos de rotación y traslación, aunque no sean rectilíneos uniformes.

Vector de posición y vector desplazamiento

En nuestro sistema de referencia, la posición de la partícula móvil en cada instante queda determinada por el vector de posición \vec{r} , cuyo origen es el punto O del referencial y su extremo, la posición de la partícula: A para el vector \vec{r}_1 y B para el \vec{r}_2 .

Puesto que la partícula se desplaza en el tiempo, también el vector de posición \vec{r} es función del tiempo:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

y podemos escribir para dicho vector:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad [2.1]$$

siendo x, y, z , las componentes del vector de posición en una situación dada (fig. 2.2). A medida que pasa el tiempo, la partícula se mueve y el vector de posición varía de dirección y de módulo; en nuestro caso pasa de $O\vec{A} = \vec{r}_1$ a $O\vec{B} = \vec{r}_2$ (fig. 2.1).

Se llama **vector desplazamiento** al vector diferencia, $\Delta\vec{r}$, de los **vectores de posición** en las posiciones final e inicial:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad [2.2]$$

El vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ no coincide con la trayectoria Δs más que en los movimientos rectilíneos o en intervalos de tiempo Δt infinitesimales.

Las componentes del vector de posición \vec{r} varían en el tiempo, al igual que \vec{r} , y su valor es también función del tiempo; esto se expresa en las igualdades:

$$x = f(t) \quad ; \quad y = u(t) \quad ; \quad z = v(t) \quad [2.3]$$

un sistema de ecuaciones que constituyen las **ecuaciones paramétricas** del movimiento; su representación gráfica nos da la **trayectoria** del móvil: **Trayectoria** es el conjunto de posiciones sucesivas que ocupa la partícula móvil en su desplazamiento.

En la figura 2.1, la trayectoria entre los puntos A y B es el arco Δs .

La función $s = s(t)$ se llama **ecuación intrínseca del movimiento** o **ecuación del movimiento sobre la trayectoria** porque, puestos sobre la trayectoria real seguida por la partícula, se obtiene la longitud o distancia recorrida por el móvil.

Sin embargo, la **representación gráfica** de la función $s = s(t)$, en el diagrama $s - t$, **no da la trayectoria real** seguida por la partícula, sino la distancia recorrida sobre una determinada trayectoria en el tiempo. Así, la trayectoria de un proyectil lanzado verticalmente es una línea recta, pero la representación gráfica $s-t$ es una parábola.

Para conocer el movimiento se precisa conocer ambas cosas: la trayectoria y la función $s = s(t)$.

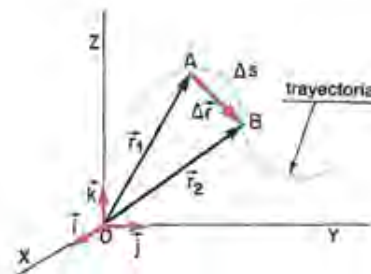


Fig. 2.1 Vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y trayectoria.

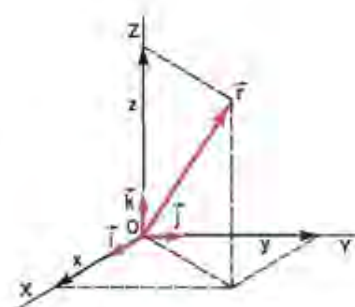


Fig. 2.2. Componentes del vector de posición.

Ejercicio 1

El vector de posición de un móvil viene dado por la ecuación:

$$\vec{r} = (6t + 2)\vec{i} + 3t\vec{j}$$

en unidades del Sistema Internacional (SI).

Calcular: a) el vector desplazamiento entre las posiciones correspondientes a $t_1 = 1s$ y $t_2 = 2s$; b) el módulo del desplazamiento en ese intervalo de tiempo.

SOLUCIÓN

a) El movimiento se realiza en un plano, pues la componente $z(t) = 0$.

Por definición, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$; $\vec{r}_1 = (6 \cdot 1 + 2)\vec{i} + 3 \cdot 1\vec{j} = 8\vec{i} + 3\vec{j}$

$$\vec{r}_2 = (6 \cdot 2 + 2)\vec{i} + 3 \cdot 2\vec{j} = 14\vec{i} + 6\vec{j}$$

Por tanto: $\Delta\vec{r} = (14 - 8)\vec{i} + (6 - 3)\vec{j} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$.

b) 6 y 3 son las componentes del vector desplazamiento; su módulo vale: $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{36 + 9} = 6,71 \text{ m}$.

2. Vector velocidad

La velocidad de una partícula viene dada por la variación del vector de posición en el tiempo.

- Velocidad media es el cociente entre el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y el tiempo empleado en lograrlo:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} \quad [2.4]$$

\vec{v}_m es un vector de la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento.

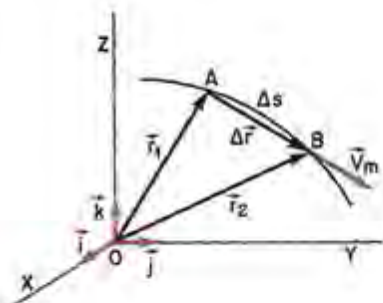


Fig. 2.3. Vector velocidad media, \vec{v}_m de dirección $\Delta\vec{r}$.

• Velocidad instantánea es el límite de la velocidad media \vec{v}_m cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero. Al tender a cero Δt , la posición B se aproxima a A (fig. 2.3) y la cuerda AB se convierte en **tangente** a la trayectoria en el punto A; por tanto, la velocidad instantánea en un punto es un vector **tangente a la trayectoria en dicho punto, de sentido al del movimiento** (fig. 2.4). Se define por la ecuación:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad [2.5]$$

De la [2.5] se deduce: **velocidad instantánea es la derivada del vector de posición respecto del tiempo.**

En la fig. 2.3 se observa cómo al tender a cero Δt , la cuerda AB coincide con el arco Δs y las variaciones Δt y Δs se hacen infinitesimales. Por lo que el módulo de la velocidad instantánea se expresa:

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$$

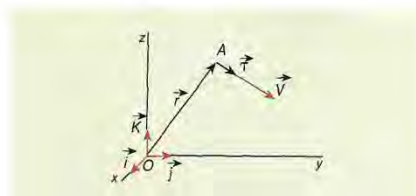


Fig. 2.4. Vector velocidad instantánea \vec{v} , en A: es tangente a la trayectoria.

y el *vector velocidad*, \vec{v} , se define también como el producto de su módulo por un vector unitario \vec{t} tangente a la trayectoria y del mismo sentido que \vec{v} :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{t} = v \cdot \vec{t} \quad [2.6]$$

siendo $v = |\vec{v}|$, la **celeridad** o **rapidez del movimiento**.

Componentes cartesianas del vector velocidad

En el referencial de la figura 2.4, si llamamos v_x, v_y, v_z a las componentes del vector \vec{v} , se puede definir dicho vector por la igualdad:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad [2.7]$$

en donde $v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$; $v_z = \frac{dz}{dt}$ siendo x, y, z las componentes del vector de posición \vec{r} .

Por tanto, el módulo de la velocidad vale:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \text{m/s} \quad [2.8]$$

Si el movimiento tiene lugar en un plano, por ejemplo el XOY , se tiene:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

y el valor de la celeridad es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{m/s}$$

Ejercicio 2

Dado el vector de posición $\vec{r} = (6t + 2)\vec{i} + 3t\vec{j}$, en unidades del sistema internacional, determinar: a) las componentes y el módulo de la velocidad instantánea; b) ¿qué indica el signo \vec{t} en la definición de la velocidad: $\vec{v} = v\vec{t}$?

SOLUCIÓN:

a) De la ecuación [2.5] se deduce: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$

Al ser las componentes 6 y 3 constantes, el vector velocidad también lo es; con un valor de:

$$v = \sqrt{(6^2 + 3^2)} \text{ m/s} = 6,7 \text{ m/s}$$

b) \vec{t} es un vector unitario tangente a la trayectoria; v es positivo si el movimiento se realiza en el sentido positivo que se ha elegido.

Ejercicio 3

Una partícula se mueve en el eje OX en sentido positivo. Su posición viene dada por la ecuación $x = 2t^2 + 1$ en unidades SI. Calcular la velocidad media en los siguientes intervalos de tiempo Δt : a) 1 a 2 s; b) 1 a 1,1 s; c) 1 a 1,001 s; d) 1 a 1,00001 s; e) el valor de la velocidad instantánea.

SOLUCIÓN

La velocidad media vale: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$, que calculamos para cada intervalo de tiempo, sustituyendo en x :

a) $x_2 = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9 \text{ m}$; $x_1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3 \text{ m} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 6 \text{ m}$
 $t_2 = 2 \text{ s}$; $t_1 = 1 \text{ s}$; $\Delta t = t_2 - t_1 = (2 - 1) \text{ s} = 1 \text{ s}$

Por tanto, $v_m = \frac{6 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 6 \text{ m/s}$.

b) Por el mismo procedimiento, $\Delta x = [2 \cdot (1,1)^2 + 1] - (2 \cdot 1^2 + 1) = 0,42 \text{ m}$
 $\Delta t = (1,1 - 1) = 0,1 \text{ s}$

de donde $v_m = 4,2 \text{ m/s}$.

c) Ídem: $\Delta x = [2 \cdot (1,001)^2 + 1] - (2 \cdot 1^2 + 1) = 0,004002 \text{ m}$

$\Delta t = (1,001 - 1) \text{ s} = 0,001 \text{ s}$

$v_m = 4,002 \text{ m/s}$

d) De modo análogo, $v_m = \frac{0,00004 \text{ m}}{0,00001 \text{ s}} = 4 \text{ m/s}$.

e) La velocidad media tiende a 4 m/s a medida que el intervalo de tiempo Δt se hace menor. Cuando $\Delta t \rightarrow 0$, tenemos la velocidad instantánea en el punto:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(2t^2 + 1)}{dt} = 4t, \text{ para } t = 1, v = 4 \text{ m/s}$$

3. Vector aceleración

En la mayoría de los movimientos la velocidad suele cambiar. La **aceleración es una medida del cambio de la velocidad en el tiempo**.

Como la velocidad es una magnitud vectorial, con el tiempo puede variar su módulo y (o) su dirección. Por ejemplo, en un movimiento circular uniforme (fig. 2.5), aunque la celeridad (módulo del vector velocidad) es constante respecto del tiempo, hay aceleración puesto que con el tiempo varía la dirección del vector velocidad. Un punto de la superficie de la Tierra describe un movimiento circular uniforme respecto del eje que pasa por el centro de masas de nuestro planeta y, a pesar de moverse con celeridad constante, su velocidad cambia (de dirección) con el tiempo; dicho punto tiene aceleración; en definitiva, un observador fijo a un punto de la Tierra (que no sea un punto del eje de rotación) posee aceleración.

Por consiguiente, podemos asegurar que cualquier movimiento cuya trayectoria no sea rectilínea (fig. 2.6) tendrá aceleración por el hecho de variar la dirección del vector velocidad, aunque se trate de movimientos con celeridad constante.

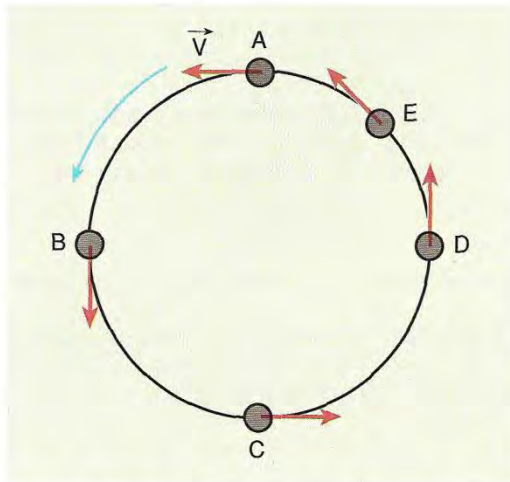


Fig. 2.5. En un movimiento circular uniforme cambia la dirección del vector velocidad: hay aceleración.

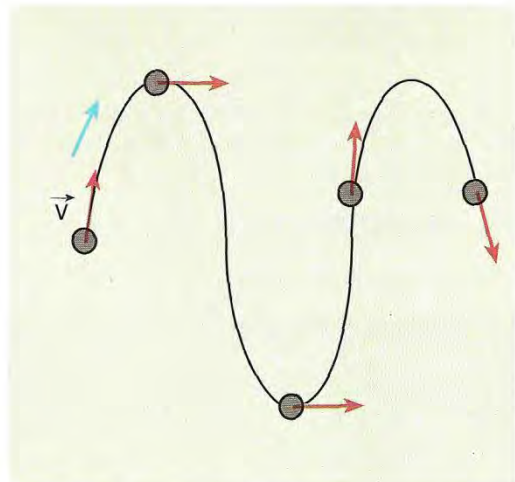


Fig. 2.6. Si la trayectoria no es rectilínea, hay aceleración, aunque la celeridad sea constante.

A la variación de la velocidad en el tiempo se le llama **aceleración**.

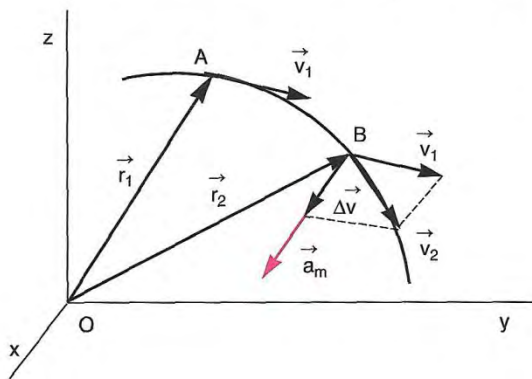


Fig. 2.7. El vector aceleración media no es tangente a la trayectoria.

• **Aceleración media** es el cociente entre la variación de la velocidad y el tiempo empleado en dicha variación:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} \quad [2.9]$$

La aceleración media es un vector cuya dirección y sentido dependen de las velocidades final e inicial en el intervalo medido.

• La **aceleración instantánea** es el límite de la aceleración media cuando $\Delta t \rightarrow 0$, por tanto, es la **derivada del vector velocidad instantánea respecto del tiempo**:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Y considerando esa velocidad en función de sus componentes en el sistema de referencia, se obtiene análogamente para la aceleración instantánea:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad [2.10]$$

Siendo $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ las **componentes cartesianas** de la aceleración en el referencial elegido, y su módulo

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad [2.11]$$

Ejercicio 4

La posición de un móvil que se mueve por el eje X viene dada por la siguiente ecuación:

$$x = 2t^2 - 16t + 24$$

Determinar, en unidades SI:

- la velocidad, posición y aceleración en el instante inicial y cuando $t = 5$ s,
- velocidad cuando pasa por el origen,
- posición en la que se invierte el movimiento,
- espacio recorrido desde la posición inicial hasta $t = 5$ s.

SOLUCIÓN

- Aplicando las definiciones de velocidad y aceleración, y teniendo en cuenta que al ser un movimiento rectilíneo en el eje X es suficiente utilizar la componente cartesiana en dicho eje,

$$v = v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 - 16t + 24) = 4t - 16 \text{ m/s}$$

$$a = a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(4t - 16) = 4 \text{ m/s}^2$$

La velocidad de la partícula varía con el tiempo: describe un movimiento con aceleración, pero ésta es constante (4 m/s^2). Sustituyendo para los tiempos inicial y 5 s obtenemos la respuesta al apartado a):

t (s)	x (m)	v (m/s)	a (m/s ²)
0	24	-16	4
5	-6	4	4

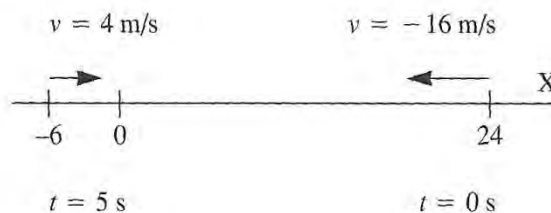


Fig. 2.8. Posición y velocidad a los 0 y 5 segundos.

En el instante inicial la partícula avanza hacia la izquierda, pero a los 5 s retrocede hacia la derecha. Un movimiento de este tipo es, por ejemplo, el de un objeto lanzado en contra del viento.

- Para calcular la velocidad ($v = 4t - 16$) debe conocerse el valor del tiempo. En el origen $x = 0$; por tanto, $0 = 2t^2 - 16t + 24$. Esta ecuación de segundo grado tiene dos soluciones: $t = 2$ s y $t = 6$ s. Las dos son coherentes con el movimiento descrito: la partícula pasa por el origen dos veces, la primera avanzando hacia la izquierda ($t = 2$ s, $v = -8$ m/s) y la segunda hacia la derecha ($t = 6$ s, $v = 8$ m/s).
- La velocidad inicial es negativa, pero a $t = 5$ s es positiva. En el instante en que se invierte el movimiento la velocidad es nula: $0 = 4t - 16$, por tanto, se invierte a los 4 s. La posición a los 4 s es $x = 2 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 + 24 = -8$ m.
- No hay que confundir el espacio recorrido (distancia medida sobre la trayectoria) con el desplazamiento. Desde el instante inicial hasta los 5 s el desplazamiento es:

$$\Delta x = x_{5s} - x_0 = (-6 \text{ m}) - (24 \text{ m}) = -30 \text{ m}$$

en estos cinco segundos la partícula se ha desplazado 30 metros hacia la izquierda.

Para calcular el espacio recorrido hay que desglosar el movimiento en dos etapas: mientras avanza hacia la izquierda hasta que invierte el movimiento y desde este instante hasta los 5 s. En la primera etapa recorre $24 + 8 = 32$ m, y en la segunda 2 m más. Por tanto, en el intervalo de tiempo solicitado recorre 34 m.

4. Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Se caracteriza porque su velocidad es un vector constante. Esta invariabilidad en el tiempo del módulo, dirección y sentido del vector velocidad sólo se puede presentar en una trayectoria rectilínea, única situación en la cual el vector velocidad no cambia de dirección.

Para una partícula que describe un MRU con velocidad \vec{v} , si su posición al instante $t = 0$ era \vec{r}_0 , su posición \vec{r} en el instante que el tiempo vale t viene dada por la expresión:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} t \quad [2.12]$$

Esta ecuación puede deducirse a partir de la definición de velocidad,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad d\vec{r} = \vec{v} dt; \text{ integrando } \int d\vec{r} = \int \vec{v} dt = \vec{v} \int dt \Rightarrow \vec{r} = \vec{v} t + \vec{C}$$

La constante de integración \vec{C} se establece a partir de las condiciones iniciales: en $t = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_0 = \vec{C}$.

Si la línea en la que se mueve la partícula con MRU la consideramos como el eje X, la ecuación [2.12] queda:

$$x \vec{i} = x_0 \vec{i} + (v \vec{i}) \cdot t, \quad x = x_0 + vt \quad [2.13]$$

En el caso particular de tomar como origen de coordenadas la posición inicial $x_0 = 0$ la ecuación queda:

$$x = vt \quad [2.14]$$

*Ejercicio 5**

Un nadador se lanza a atravesar un río con una velocidad de 3 km/h, en una dirección que forma un ángulo de 45° con la orilla, y en sentido de aguas arriba. Si la corriente tiene una velocidad de 0,1 m/s y el río una anchura de 200 m, determinar:

- el tiempo que tardará en llegar a la otra orilla;
- su dirección de marcha.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la figura 2.9, $\vec{v}_R = -0,1 \vec{i}$ m/s es la velocidad del río. Como 3 km/h son 0,83 m/s, la velocidad propia del nadador (que tendría en aguas tranquilas) es $\vec{v}_P = 0,83 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + 0,83 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$. La velocidad \vec{v} del nadador es la suma de estas dos velocidades (fig. 2.10):

$$\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}_P = -0,1 \vec{i} + 0,83 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + 0,83 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} = 0,49 \vec{i} + 0,59 \vec{j}$$

este vector es constante; el nadador avanza con movimiento rectilíneo uniforme:

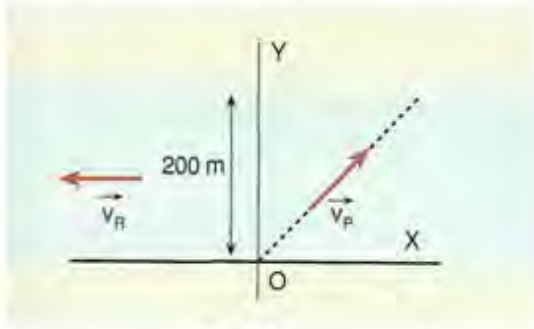


Fig. 2.9.

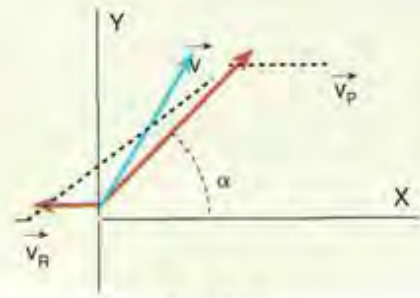


Fig. 2.10.

La ecuación del movimiento del nadador, tomando el sistema de coordenadas de la figura 2.9, es:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{r}_0 + \vec{v}t = 0,49\,t\vec{i} + 0,59\,t\vec{j}, \quad x = 0,49\,t \quad y = 0,59\,t$$

Cuando llega a la otra orilla $y = 200\text{ m}$, de donde $t = \frac{200\text{ m}}{0,59\text{ m/s}} = 339\text{ s}$.

La dirección de marcha se especifica con el ángulo α de la figura 2.10:

$$\alpha = \arctan \frac{0,59}{0,49} = 50^\circ$$

Comentario adicional: la distancia horizontal («aguas arriba») que habrá recorrido el nadador cuando llegue a la otra orilla es $x = 0,49\text{ m/s} \cdot 339\text{ s} = 166\text{ m}$.

5. Movimiento uniformemente acelerado (MUA)

Se caracteriza porque su **vector aceleración es constante**, no varía con el tiempo. Para este tipo de movimiento,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad d\vec{v} = \vec{a}dt; \text{ integrando } \int d\vec{v} = \int \vec{a}dt = \vec{a} \int dt \Rightarrow \vec{v} = \vec{a}t + \vec{C}$$

La constante de integración \vec{C} se establece a partir de las condiciones iniciales: en $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0 = \vec{C}$, de donde tenemos

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad [2.15]$$

donde \vec{v} es la velocidad de la partícula en el instante t y \vec{v}_0 es la velocidad inicial (en $t = 0$).

De acuerdo con la definición de la velocidad, para un MUA

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad d\vec{r} = \vec{v}dt; \text{ integrando } \int d\vec{r} = \int \vec{v}dt = \int (\vec{v}_0 + \vec{a}t)dt \Rightarrow \vec{r} = \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{C}'$$

La constante de integración \vec{C}' se establece a partir de las condiciones iniciales: en $t = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_0 = \vec{C}'$; por tanto, la posición en un instante t viene dada por

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad [2.16]$$

Esta es la ecuación del movimiento uniformemente acelerado. Derivándola respecto del tiempo se tiene la [2.15].

5.1. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

Para un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) que se desarrolla en el eje X, las ecuaciones [2.15] y [2.16], expresadas en función de las componentes cartesianas, son:

$$v = v_0 + at \quad [2.17]$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad [2.18]$$

Si eliminamos el tiempo entre estas dos ecuaciones (llevando el valor de t de la [2.17] a la [2.18]) se obtiene, para un MRUA en el eje X,

$$v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x \quad [2.19]$$

que nos permite establecer la aceleración, el desplazamiento o la velocidad independientemente del tiempo.

5.2. Signo de la aceleración

De acuerdo con la segunda ley de Newton de la Dinámica, la aceleración de una partícula viene dada por

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

siendo \vec{F} la fuerza resultante que actúa sobre la partícula de masa m .

Como la masa de una partícula es siempre una cantidad positiva, la aceleración siempre tiene la dirección y el sentido de la fuerza resultante. Por tanto, en las ecuaciones [2.17], [2.18] y [2.19] el signo de la aceleración a es el de la fuerza que la causa.

En la figura 2.11 tenemos las cuatro posibles situaciones de un móvil que avanza sobre el eje X; en ella se indica el signo de la velocidad y de la aceleración siguiendo el convenio habitual de signos.





Avanza hacia la derecha $v > 0$		Avanza hacia la izquierda $v < 0$	
			
«acelera»: $a > 0$	«frena»: $a < 0$	«acelera»: $a < 0$	«frena»: $a > 0$

Fig. 2.11. Signo de v y a en el MRUA.

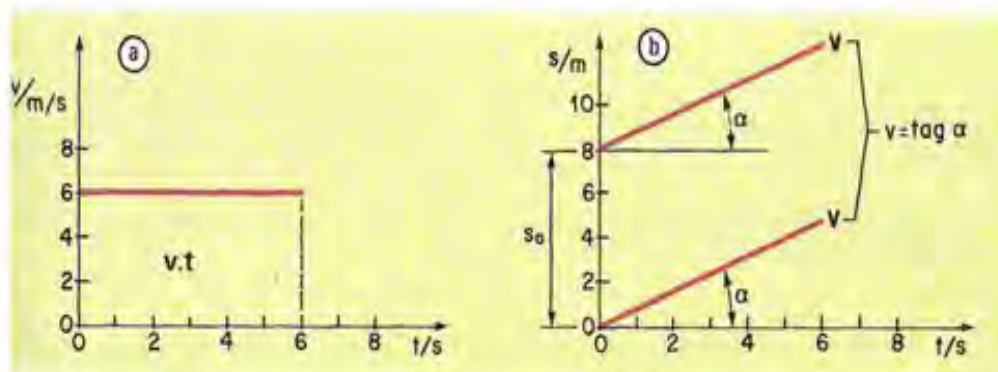


Fig. 2.12. Gráficas $v-t$ y $s-t$ del MRU.

En (a), la velocidad viene dada por una paralela al eje de los tiempos ($v = \text{constante}$); en (b) la **pendiente** de la **recta** $s-t$, mide la **velocidad** del móvil; es igual para los dos movimientos, que difieren de la ordenada en el origen, es decir, en el desplazamiento inicial, s_0 .

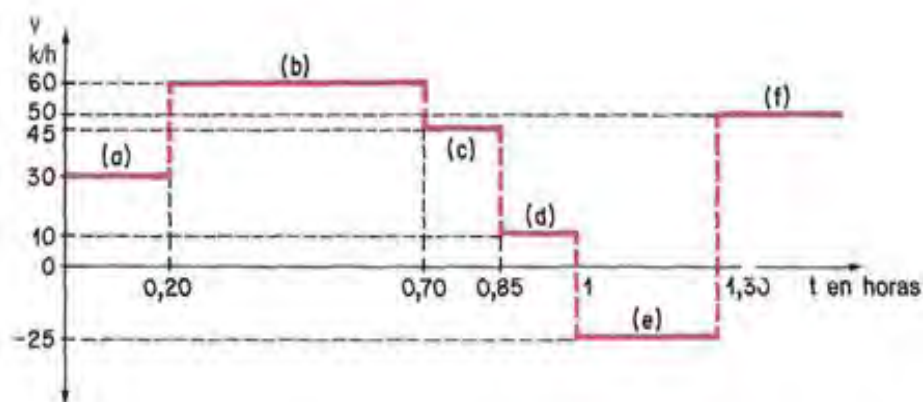


Fig. 2.13. Gráfica $v-t$ de un movimiento variado; la velocidad cambia a intervalos de tiempo.

La figura 2.13 representa el movimiento de un coche que cambia «instantáneamente» de velocidad y pasa por las velocidades: (a) 30 km/h, (b) 60 km/h, (c) 45 km/h, (d) 10 km/h; en este momento, retrocede por el mismo camino a 25 km/h (e), y a partir de 1,30 h de la salida reanuda el camino hacia adelante a la velocidad de 50 km/h (f).

Se ha supuesto que los cambios de velocidad se realizan de forma instantánea; es, por tanto, una gráfica ideal.

ii) En el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) de la figura 2.14, la gráfica $v-t$, sin velocidad inicial, (a) es una recta cuya pendiente mide la aceleración del movimiento; en el ejemplo, 5 m/s^2 .

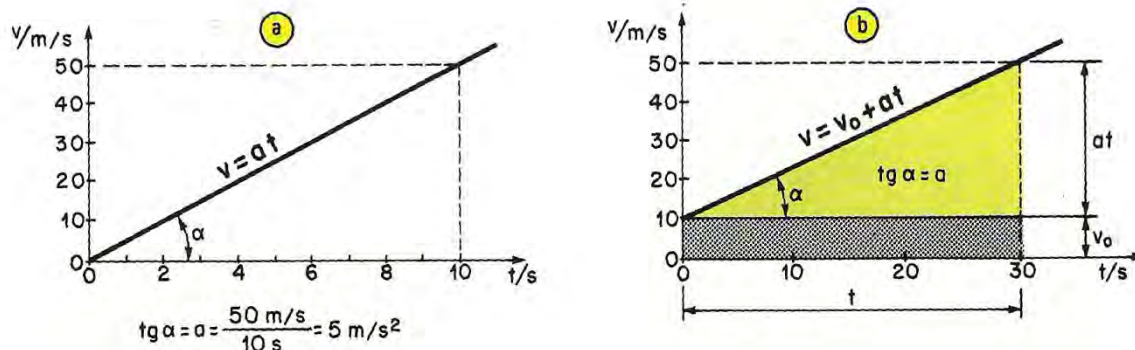


Fig. 2.14. Gráfica $v-t$ de un MRUA; a) sin velocidad inicial; b) con velocidad inicial de 10 m/s .

La parte rayada de la (b) es el área comprendida entre la gráfica $v-t$ y el eje de los tiempos, y mide el camino recorrido por el móvil.

La gráfica de las posiciones o desplazamientos $s-t$ de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, $s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ es una parábola cuyo eje es el de la y .

La figura 2.15 corresponde a la ecuación:

$$s = 10t + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t^2 \text{ de aceleración}$$

4 m/s^2 y velocidad inicial $v_0 = 10 \text{ m/s}$

La **pendiente de la curva** en cada punto, es la **velocidad** en el punto; en la gráfica se ha establecido para el punto A.

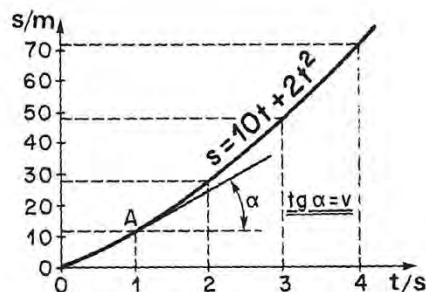


Fig. 2.15. Gráfica $s-t$ de un movimiento uniformemente acelerado.

La gráfica 2.16 resume los diagramas $v-t$, $s-t$ y $a-t$ de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Es importante no confundir en estos movimientos la trayectoria, que es una recta, con la gráfica $s-t$ que es una rama de parábola.

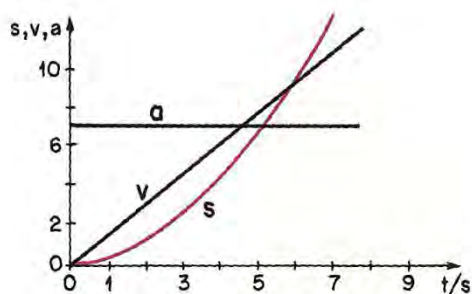
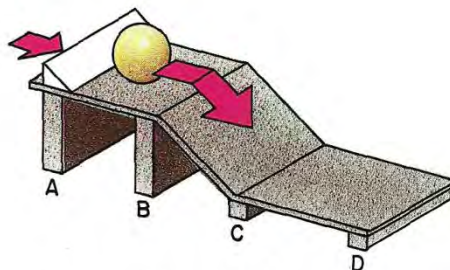


Fig. 2.16. La gráfica $s-t$ es una rama de parábola, pero la trayectoria es una recta.

Ejercicio 6

- i) Se impulsa una bola con velocidad \vec{v} por un plano horizontal AB y continúa moviéndose hasta salir por D . *a)* Indicar gráficamente en el diagrama $s - t$ las posiciones de la bola en este movimiento; *b)* Indicar igualmente las variaciones de la velocidad en el diagrama $v - t$.

Se prescinde de rozamientos.



SOLUCIÓN

Entre A y B la bola se mueve con movimiento uniforme con velocidad \vec{v} ; al caer por el plano inclinado acelera y su velocidad se hace mayor, y, finalmente, se desplaza por el plano CD con velocidad uniforme, mayor que la inicial.

En la gráfica (*a*), los tramos AB y CD corresponden a movimientos rectilíneos uniformes, siendo la velocidad en CD mayor que en AB , como se deduce de sus pendientes; la curva entre BC representa el desplazamiento uniformemente acelerado del plano inclinado.

La gráfica (*b*), indica las velocidades uniformes en AB y CD , ésta mayor que aquélla, y la velocidad que adquiere al caer con aceleración en el plano inclinado BC .



Fig. 2.17.

- ii) La figura 2.18 representa las posiciones de dos móviles A y B que se desplazan por una regla graduada. *a)* En el instante $t = 2$ s, la velocidad de B ¿es mayor, menor o igual que la de A ?; *b)* ambos móviles A y B ¿tienen la misma velocidad? Si es así, ¿en que tiempos?

SOLUCIÓN

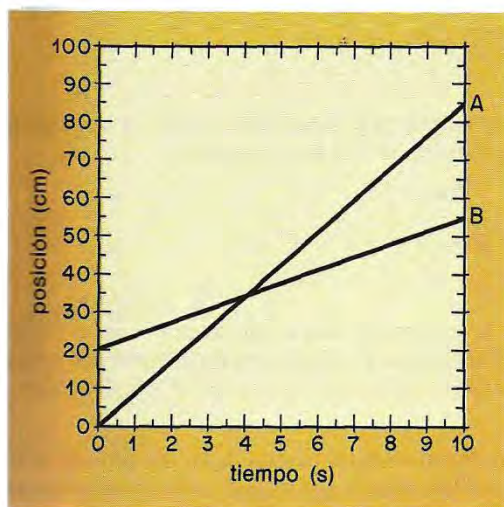


Figura 2.18.

- a)* La velocidad en la gráfica $s - t$ de un movimiento uniforme viene medida por la pendiente de la recta o valor de la tangente del ángulo que forma con la horizontal; es evidente, por tanto, que la velocidad de B es **siempre menor** que la de A . Como en el instante $t = 2$ s la línea del móvil B está por encima de la A , se podría creer que su velocidad es mayor que la de A , pero esto es falso, pues la pendiente es constante en ambos y siempre la de A mayor que la de B .
- b)* Por lo dicho antes, las velocidades permanecen constantes en todo tiempo y diferentes una de otra, incluso en el punto de cruce de ambas gráficas.

La mano o el mecanismo de disparo que lanza un cuerpo le proporciona una velocidad inicial, pero no le ejerce ninguna acción una vez ha sido lanzado (salvo que se trate de un móvil autopropulsado) y, por tanto, si no se tiene en consideración el rozamiento con el aire, la única fuerza que se ejerce en su movimiento es su peso.

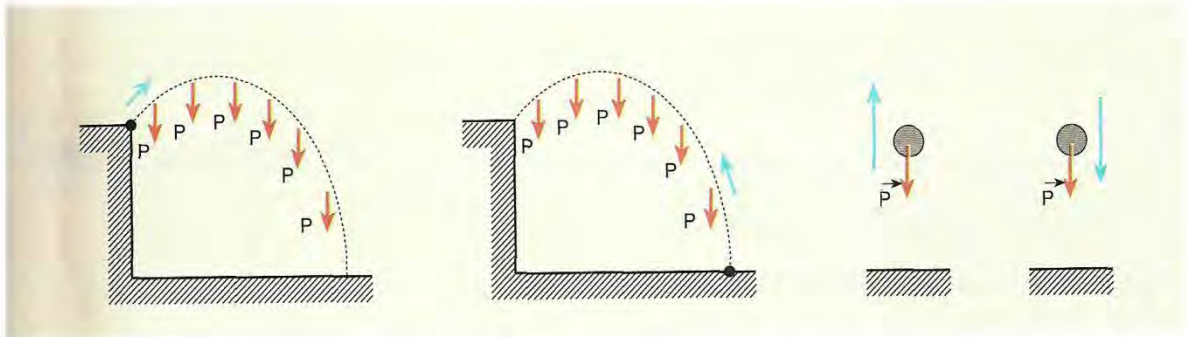


Fig. 2.21. La única fuerza que actúa es el peso.

Ejercicio 7★

Calcular desde qué altura se dejó caer un cuerpo sabiendo que en el último segundo recorrió la mitad de su recorrido total.

SOLUCIÓN

Si el origen de coordenadas se toma en el punto de impacto con el suelo (fig. 2.22) $y_0 = H$. Como es caída libre y la trayectoria es rectilínea podemos utilizar la ecuación del MRUA [2.18], con $v_0 = 0$ y $\vec{a} = \vec{g} = -9,8 \vec{j}$ m/s²:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad y = H + 0 \cdot t + \frac{1}{2} (-9,8) \cdot t^2 = H - 4,9 \cdot t^2$$

En las posiciones A y F:

$$\left. \begin{array}{l} y_A = H - 4,9 t_A^2 \\ y_F = 0 = H - 4,9 t_F^2 \\ t_F = t_A + 1 \\ y_A = \frac{H}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow t_F = 3,41 \text{ s}, \quad H = 57,1 \text{ m}$$

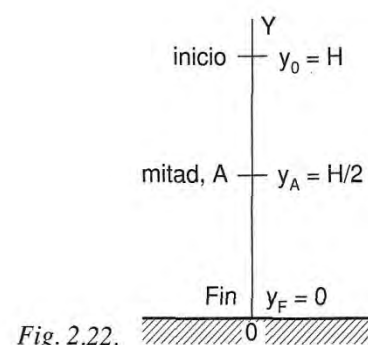


Fig. 2.22.

Ejercicio 8

Un cuerpo se mueve por encima de una mesa de 1 m de altura. Si cuando llega al suelo lo hace a 2 m de la mesa, calcular la velocidad del cuerpo cuando dejó la mesa.

SOLUCIÓN

Una vez el cuerpo abandona la mesa la única fuerza que actúa sobre él es su peso: su aceleración es la de la gravedad y, por tanto, describe un movimiento uniformemente acelerado. Teniendo en cuenta el referencial de la figura 2.23,

$$\vec{r}_0 = \vec{j} \text{ m} \quad \vec{a} = -9,8 \vec{j} \text{ m/s}^2 \quad \vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \vec{j} + (v_0 \vec{i}) t + \frac{1}{2} (-9,8 \vec{j}) \cdot t^2$$

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = 1 - 4,9 \cdot t^2 \end{cases}$$

Cuando el cuerpo llega al suelo $x = 2 \text{ m}$, $y = 0$. Por tanto,

$$2 = v_0 \cdot t \quad 0 = 1 - 4,9 \cdot t^2$$

De donde se deduce que la velocidad inicial v_0 es 4,4 m/s.

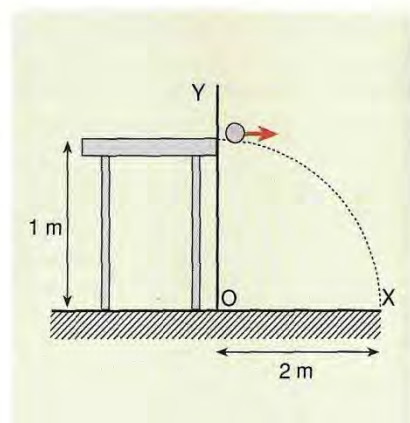


Fig. 2.23.

7.1. Estudio del tiro oblicuo

Consideremos un tiro oblicuo realizado sobre un suelo horizontal. Si prescindimos del rozamiento con el aire, la única fuerza que actúa sobre el cuerpo es su peso y, por tanto, su aceleración es la de la gravedad, $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j} \text{ m/s}^2$: es un movimiento uniformemente acelerado al cual podemos aplicar las ecuaciones [2.15] y [2.16].

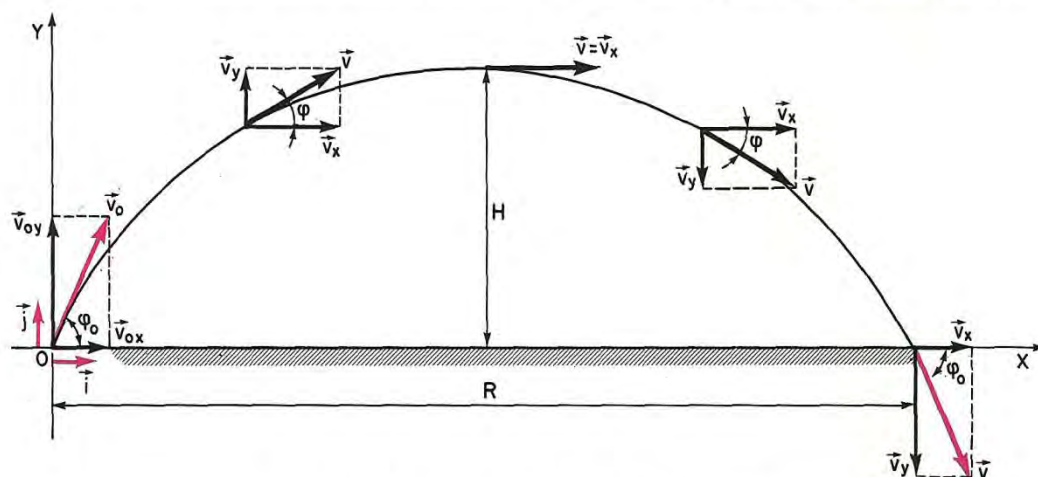


Fig. 2.24. Trayectoria parabólica de un proyectil.

Para poder desarrollar estas ecuaciones es preciso expresar el vector velocidad inicial en sus componentes cartesianas; si v_0 es su módulo,

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \phi_0 \vec{i} + v_0 \sin \phi_0 \vec{j}$$

De acuerdo con la figura 2.24, si tomamos como origen de coordenadas la posición inicial del móvil, $\vec{r}_0 = 0$; por tanto, la ecuación del movimiento del proyectil es:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 = 0 + (v_0 \cos \phi_0 \vec{i} + v_0 \sin \phi_0 \vec{j}) t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{j}$$

separando las dos componentes,

$$x = v_0 \cos \phi_0 t \quad [2.20]$$

$$y = v_0 \sin \phi_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad [2.21]$$

Observando estas dos ecuaciones, que nos permiten conocer la posición del móvil en cualquier instante t , podemos decir que el movimiento del proyectil es la **composición de dos movimientos** rectilíneos: uno uniforme en el eje X y otro uniformemente variado en el eje Y.

Si en la ecuación [2.20] aislamos el tiempo,

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi_0}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación [2.21],

$$y = v_0 \sin \varphi_0 \frac{x}{v_0 \cos \varphi_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \varphi_0} \right)^2$$

$$y = x \tan \varphi_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varphi_0} x^2 \quad [2.22]$$

Ésta es la **ecuación de la trayectoria** del móvil. Corresponde a una **parábola** de eje paralelo al eje Y.

La velocidad del proyectil en cualquier instante viene dada por [2.15],

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = v_0 \cos \varphi_0 \vec{i} + v_0 \sin \varphi_0 \vec{j} - g\vec{j}t = v_0 \cos \varphi_0 \vec{i} + (v_0 \sin \varphi_0 - gt) \vec{j}$$

Los componentes del vector velocidad en cualquier instante t son:

$$v_x = v_0 \cos \varphi_0 \quad v_y = v_0 \sin \varphi_0 - gt$$

que ponen de manifiesto, nuevamente, que el movimiento del proyectil puede considerarse como la composición de un MRU en el eje X y un MRUA en el eje Y. Por consiguiente, la componente horizontal de la velocidad es constante, mientras que la vertical varía con el tiempo: mientras el proyectil asciende es positiva, cuando baja es negativa y cuando se alcanza la **altura máxima** es nula. **En la altura máxima la velocidad no es nula:** es nula la componente vertical pero la horizontal mantiene su valor en todo instante. Por tanto, en la altura máxima:

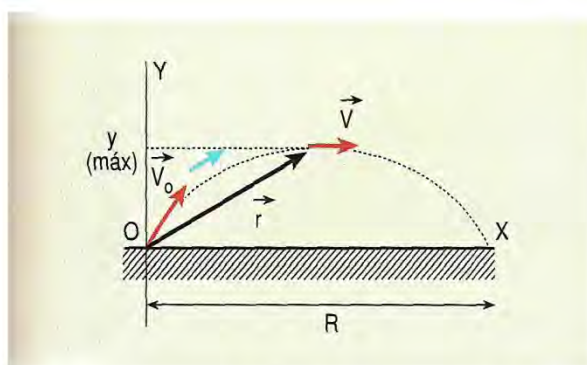


Fig. 2.25. En la altura máxima $v = v_0 \cos \varphi_0$.

$$v_y = 0 \Rightarrow v_0 \sin \varphi_0 - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \varphi_0}{g}$$

$$y_{\max} = v_0 \sin \varphi_0 \frac{v_0 \sin \varphi_0}{g} - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \sin \varphi_0}{g} \right)^2$$

$$y_{\max} = H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi_0}{2g} \quad [2.23]$$

El **alcance horizontal máximo** R es la distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y el de impacto en la misma horizontal. En ese punto de impacto $y = 0$; llevado a la [2.21] se obtiene el tiempo que tarda en recorrer la trayectoria:

$$t = \frac{2v_0 \sin \varphi_0}{g}$$

que es un tiempo doble que el que tarda en alcanzar la altura máxima. Sustituyendo este valor en la [2.20], se obtiene el alcance horizontal máximo:

$$R = x_{\text{máx}} = v_0 \cos \phi_0 \frac{2v_0 \sin \phi_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\phi_0}{g} \quad [2.24]$$

Este valor también puede deducirse a partir de la ecuación de la trayectoria [2.22]: R es el valor de x cuando $y = 0$.

7.2. Comentarios sobre el alcance horizontal

i) **Máximo alcance** para un valor determinado de velocidad inicial.

En la ecuación [2.24] estarán fijados los valores de g y v_0 ; por tanto, el valor máximo de R depende del seno del ángulo $2\phi_0$. El valor máximo de esta función es la unidad ($2\phi_0 = 90^\circ$), con lo que el alcance horizontal máximo se obtiene cuando el ángulo de disparo es de 45° y su valor es:

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g}$$

ii) **Un determinado alcance horizontal puede obtenerse para dos ángulos de lanzamiento distintos.** Para una misma velocidad inicial se obtiene el mismo alcance horizontal (ecuación [2.24]) para dos ángulos de lanzamiento ϕ_0 y ϕ_0 que sean **complementarios**, puesto que

$$\sin 2\phi_0 = 2 \sin \phi_0 \cos \phi_0 = 2 \cos (90 - \phi_0) \sin (90 - \phi_0) = 2 \sin \phi_0 \cos \phi_0 = \sin 2\phi_0$$

Las diferencias entre estos dos lanzamientos estarán en la altura máxima y el tiempo que permanece el cuerpo en el aire.

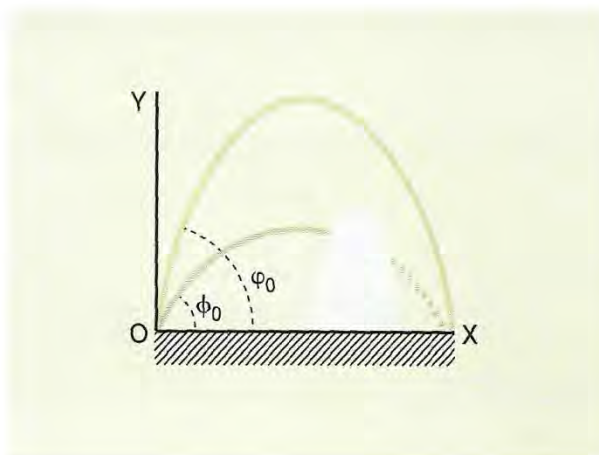


Fig. 2.26. Con ángulos de lanzamiento complementarios se obtiene el mismo alcance máximo.

Ejercicio 9

En un instante dado, una de las ruedas posteriores de un camión proyecta una piedrecita hacia atrás. La piedra sale disparada a 72 km/h, con un ángulo de 37° sobre la horizontal. Calcular la altura máxima que alcanza esta piedra (tomar $g = 10 \text{ m/s}^2$).

Detrás del camión, en la misma dirección y sentido, va una furgoneta a 50,4 km/h (velocidad constante). Calcular a qué altura sobre el suelo y con qué velocidad choca la piedra con el cristal de la furgoneta si, en el momento en el cual la piedra sale lanzada, el cristal estaba a 4.5 m de la piedra (suponer que el parabrisa-

SOLUCIÓN

Una vez disparada, la única fuerza que actúa sobre la piedra es su peso: su movimiento es uniformemente variado, con aceleración $\vec{a} = \vec{g} = -10\vec{j}$ m/s². Teniendo en cuenta que 72 km/h son 20 m/s, el vector velocidad inicial de la piedra es:

$$\vec{v}_0 = 20 \cos 37^\circ \vec{i} + 20 \sin 37^\circ \vec{j} = 16\vec{i} + 12\vec{j}$$

y su vector velocidad

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = 16\vec{i} + 12\vec{j} - 10t\vec{j} = 16\vec{i} + (12 - 10t)\vec{j}$$

Cuando se alcanza la altura máxima la componente vertical de la velocidad es nula: $12 - 10t = 0$, por tanto, se alcanza a los 1,2 s de haber sido lanzada la piedrecita.

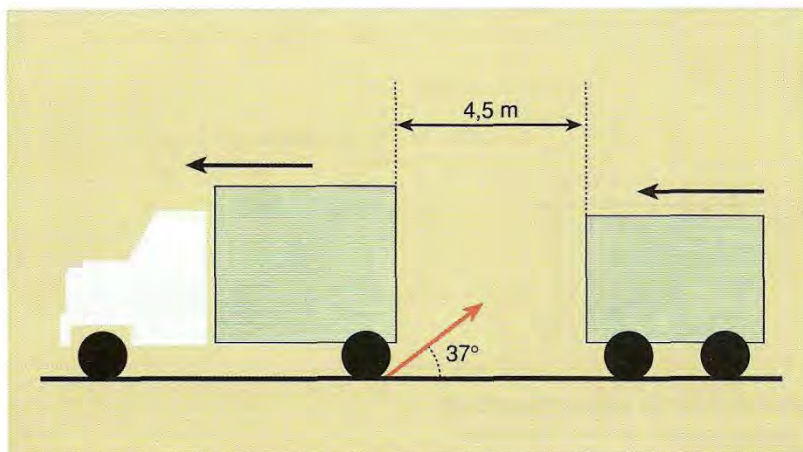


Fig. 2.27.

Tomando como origen de coordenadas el punto de lanzamiento de la piedra, $\vec{r}_0 = 0$ y su ecuación del movimiento es:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2; \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = 16t\vec{i} + 12t\vec{j} - 5t^2\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} x = 16t \\ y = 12t - 5t^2 \end{cases}$$

de donde se deduce que a los 1,2 s la piedra se encuentra a una altura $y = 12 \cdot 1,2 - 5 \cdot (1,2)^2 = 7,2$ m.

La ecuación del movimiento del cristal de la furgoneta es $x = 4,5 - 14t$. En la colisión la posición de la piedra y la del cristal es la misma,

$$4,5 - 14t = 16t$$

por tanto, el choque se produce a $t = 4,5/30 = 0,15$ s; es decir, a una altura sobre el suelo de

$$y = 12 \cdot 0,15 - 5 \cdot (0,15)^2 = 1,7 \text{ m}$$

La velocidad de la piedra en el instante de la colisión es:

$$\vec{v} = 16\vec{i} + (12 - 10 \cdot 0,15)\vec{j} = 16\vec{i} + 10,5\vec{j} \quad v = \sqrt{16^2 + 10,5^2} = 19,1 \text{ m/s}$$

Ejercicio 10

Un avión lanza una bomba al entrar en picado formando un ángulo de 53° con la vertical, desde 845 m de altura. Si el proyectil tarde 5 s en llegar al suelo, calcular: a) la velocidad del avión en m/s; b) la distancia horizontal del impacto de la bomba a la vertical del punto de lanzamiento; c) las componentes de la velocidad de la bomba al llegar al suelo.

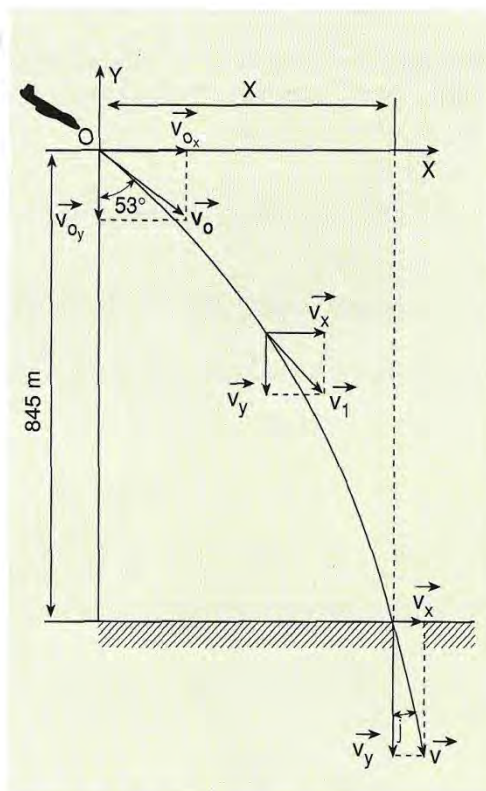


Fig. 2.28. Movimiento vibratorio armónico de las proyecciones de un movimiento circular uniforme.

SOLUCIÓN

a) De acuerdo con el referencial de la figura 2.28, y teniendo en cuenta que se trata de un MRUA,

$$\vec{r}_0 = 0 \quad \vec{a} = -9,8\vec{j}$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \sin 53^\circ \vec{i} - v_0 \cos 53^\circ \vec{j} = 0,8 v_0 \vec{i} - 0,6 v_0 \vec{j}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = 0,8 v_0 t \vec{i} - 0,6 v_0 t \vec{j} - 4,9 t^2 \vec{j}$$

$$\begin{cases} x = 0,8 v_0 t \\ y = -0,6 v_0 t - 4,9 t^2 \end{cases}$$

Al llegar al suelo, $y = -845$ m y $t = 5$ s; sustituyendo estos valores en la ecuación de la posición y,

$$-845 = -0,6 v_0 \cdot 5 - 4,9 \cdot 5^2; \quad v_0 = 241 \text{ m/s}$$

que es la velocidad de la bomba y del avión.

b) La distancia horizontal solicitada es el valor de la coordenada x cuando la bomba llega al suelo, es decir, a $t = 5$ s

$$x = 0,8 v_0 t = 0,8 \cdot 241 \cdot 5 = 963 \text{ m}$$

c) Las componentes del vector velocidad al llegar al suelo son:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = 0,8 v_0 \vec{i} - 0,6 v_0 \vec{j} - 9,8t \vec{j} = 193 \vec{i} - (145 + 9,8t) \vec{j}$$

$$\text{para } t = 5 \text{ s:} \quad v_x = 193 \text{ m/s} \quad v_y = 193 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 273 \text{ m/s}$$

8. Movimientos con aceleración variable

Si la aceleración de un móvil varía con el tiempo, el estudio de su posición y de su velocidad debe hacerse con ecuaciones diferentes a las del movimiento uniformemente acelerado; es preciso establecer en cada caso la correspondiente ecuación del movimiento.

6. Representaciones gráficas

i) En el movimiento rectilíneo uniforme (MRU) la representación de v respecto de t , ($v-t$), y de $s-t$ se indican en la fig. 2.12.

Ejercicio 11

En el instante inicial $t = 0$, un móvil se encuentra en la posición $x_0 = 3$ m del origen, y se desplaza con la velocidad $\vec{v}_0 = -2\vec{i}$ m/s. Siendo su aceleración $a = 2t + 1$ (m/s²). Calcular la ecuación de las posiciones en función del tiempo y su valor para $t = 2$ s.

SOLUCIÓN

Según el enunciado, las condiciones iniciales del móvil son: se desplaza siguiendo el eje de las X , con velocidad inicial $v_0 = -2$ m/s y $x_0 = 3$ m.

La ecuación de la velocidad se deduce de la aceleración del movimiento, por **integración** de $dv = a dt$:

$$v = \int a dt = \int (2t + 1) dt = t^2 + t + C = t^2 + t - 2$$

pues, para $t = 0$, $v_0 = -2$ m/s $= C$.

De la definición de la velocidad instantánea $v = \frac{dx}{dt}$ se obtiene:

$$dx = v \cdot dt$$

que integramos:

$$\int dx = \int v dt = \int (t^2 + t - 2) dt \Rightarrow x = \int t^2 dt + \int t dt - 2 \int dt$$

$$x = \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 - 2t + C$$

Para $t = 0$, $C = x_0 = 3$ m; luego $x = \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 - 2t + 3$ es la ecuación que determina la posición del móvil en función del tiempo. En nuestro caso, para $t = 2$ s, $x = 3,67$ m del origen.

NOTA: El movimiento no es uniformemente acelerado. ¿Por qué?

9. Movimiento circular

Es el **movimiento de una partícula cuya trayectoria es una circunferencia**. El movimiento circular se puede estudiar linealmente por el arco descrito por el móvil o también se puede hacer por el **ángulo central barrido por el radio**.

De aquí la necesidad de definir la **velocidad angular**, que es el **ángulo barrido en la unidad de tiempo**; se expresa por la ecuación:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

se mide en radianes por segundo, rad/s.

Radián es el **ángulo central de la circunferencia que abarca un arco cuya longitud es igual al radio**.

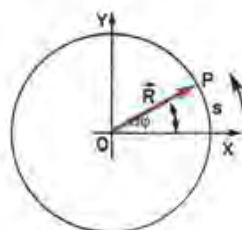


Fig. 2.29. Movimiento circular.

En la figura 2.29 la medida del ángulo φ en radianes es, por definición: $\varphi = \frac{s}{R}$.

El radián no tiene dimensiones porque es cociente de dos longitudes.

Por tanto, la longitud de cualquier arco vale: $s = \varphi R$ [2.25]

siempre que se mida el ángulo en radianes.

La **aceleración angular** es la **variación de la velocidad angular en la unidad de tiempo**; se define por la expresión:

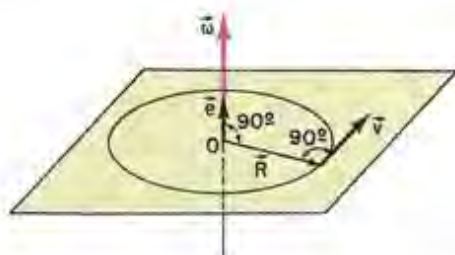
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad [2.26]$$

Se mide en rad/s^2 .

De las definiciones dadas se deducen sus respectivas ecuaciones de dimensión:

$$[\omega] = \frac{1}{T} = T^{-1} ; \alpha = \frac{T^{-1}}{T} = T^{-2}$$

que justifican las unidades de las mismas: $\omega = \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \text{s}^{-1}$; $\alpha = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \text{s}^{-2}$.



Tanto la **velocidad** como la **aceleración angulares** son **vectores axiales**, por estar relacionados con la rotación en torno a un eje.

Vector **velocidad angular** $\vec{\omega}$ es un vector axial de módulo $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, de dirección, la perpendicular al plano de giro y de sentido el del avance del sacacorchos que gira en el mismo sentido que la partícula; se expresa con la ecuación:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e}$$

Fig. 2.30. Vector velocidad angular, $\vec{\omega}$, y vector velocidad lineal, \vec{v} .

siendo \vec{e} un vector unitario en la dirección del eje.

Puesto que en este movimiento, el radio de curvatura \vec{R} coincide con el vector de posición, si se elige el centro de la órbita como centro de referencia, es fácil comprobar la relación vectorial que define la **velocidad lineal** \vec{v} como **producto vectorial** de $\vec{\omega}$ y \vec{R} :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R} \quad [2.27]$$

ya que los vectores $\vec{\omega}$, \vec{R} y \vec{v} forman un triedro directo; de aquí se deduce como **valor** de la **velocidad lineal**:

$$v = \omega \cdot R \quad [2.28]$$

pues $\vec{\omega}$ y \vec{R} son perpendiculares.

9.1. Movimiento circular uniforme

Movimiento **circular uniforme** es el que posee **velocidad angular constante**.

Al ser $\omega = \text{constante}$, también es constante el valor de la **velocidad lineal**, $v = \text{constante}$ por la [2.28].

Al ser análogas las definiciones de la velocidad y de la aceleración en los movimientos lineal y circular, las ecuaciones de este último serán análogas a las del lineal, sin más que sustituir magnitudes lineales por magnitudes angulares.

Movimiento circular uniforme:

$$\omega = \text{constante}; \quad \alpha = 0; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t \quad [2.29]$$

Siendo φ el ángulo en radianes recorrido por el radio (vector de posición) en el tiempo.

Se llama **periodo del movimiento circular uniforme** T al tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta completa. De [2.29], si hacemos

$$\varphi_0 = 0; \quad t = \frac{\varphi}{\omega}; \quad \text{y el periodo } T = \frac{2\pi \text{ rad}}{\omega \text{ s}^{-1}} = \frac{2\pi}{\omega} \text{ s} \quad [2.30]$$

pues $\varphi = 2\pi \text{ rad}$ corresponde a una vuelta.

La frecuencia de este movimiento, f , es el número de vueltas que da en un segundo; de la definición de periodo se deduce:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ s}^{-1} \quad [2.31]$$

La frecuencia se mide en ciclos/s o hertzios, Hz.

De la [2.31], la velocidad angular vale:

$$\omega = 2\pi f \text{ rad/s} \quad [2.32]$$

9.2. Movimiento circular uniformemente acelerado

Este movimiento se caracteriza por tener **aceleración angular constante**. Por lo dicho en el párrafo anterior, este movimiento queda determinado por ecuaciones análogas al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$\begin{array}{lll} \alpha = \text{constante} & ; & \omega = \omega_0 + \alpha t \quad ; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \text{aceleración angular} & & \text{velocidad angular} \quad \quad \text{ángulo recorrido, en rad} \end{array} \quad [2.33]$$

Y si se elimina el tiempo entre ω y φ , suponiendo $\varphi_0 = 0$, se obtiene:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha \varphi \quad [2.34]$$

que relaciona la **velocidad angular** y el **ángulo recorrido** sin intervenir el tiempo.

Ejercicio 12

Un volante con aceleración angular constante gira un ángulo φ de 234 rad en los tres primeros segundos, y su velocidad angular, al final de este tiempo, es de 108 rad/s. Calcular: a) la velocidad angular inicial y la aceleración angular en este intervalo; b) la aceleración angular con que frena si se detiene en 1,5 s por la acción del freno; c) el número de vueltas que da mientras frena.

SOLUCIÓN

a) La velocidad angular del giro es: $\omega = \omega_0 + \alpha t$; y el ángulo que describe: $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$.

Sustituyendo por los datos del problema se tiene:

$$\left. \begin{aligned} 108 &= \omega_0 + 3 \cdot \alpha \\ 234 &= 3 \cdot \omega_0 + \frac{1}{2} \alpha \cdot 3^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_0 = 48 \text{ rad/s} ; \alpha = 20 \text{ rad/s}^2$$

- b) Al frenar, se le comunica al volante una aceleración opuesta al movimiento; dicha aceleración angular α_1 , es negativa (deceleración) y, al cabo de 1,5 s, anula la velocidad que tenía en los 3 s.

Por tanto, $\omega_f = 0 = \omega - \alpha_1 t_1$ de donde $\alpha_1 = \frac{\omega}{t_1} = \frac{108 \text{ rad/s}}{1,5 \text{ s}} = 72 \text{ rad/s}^2$.

- c) El número de vueltas que da el volante mientras se le frena es:

$$n = \frac{\text{ángulo que recorre (rad)}}{2\pi \text{ rad/vuelta}} = \frac{\left(\omega t_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \right) \text{ rad}}{2\pi \text{ rad/vuelta}} = 12,9 \text{ vueltas.}$$

10. Componentes intrínsecas del vector aceleración

Al estudiar la aceleración comentamos que todo movimiento no rectilíneo (por ejemplo, circular) tiene aceleración, puesto que al modificarse la trayectoria varía la dirección del vector velocidad y, por tanto, esta variación se corresponde con una aceleración. Aquí estudiaremos el movimiento circular uniforme mediante el vector de posición con objeto de establecer el valor de su aceleración.

Elegimos como sistema de referencia el $(0; \vec{i}, \vec{j})$ (fig. 2.31).

• La **posición** de la partícula en un instante dado, P , queda determinada por el vector de posición \vec{r} , que expresamos por sus componentes en el plano:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{siendo} \quad \left. \begin{aligned} x &= r \cos \omega t \\ y &= r \sin \omega t \end{aligned} \right\} \text{ de donde: } \vec{r} = r \cos \omega t \vec{i} + r \sin \omega t \vec{j}$$

Hemos supuesto que la partícula se desplaza en sentido positivo con una velocidad angular ω , partiendo del punto A.

• La velocidad lineal o de traslación de la partícula es:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \cos \omega t \vec{i} + r \sin \omega t \vec{j}) = r\omega (-\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j})$$

de módulo, $v = r \cdot \omega$, pues

$$|\vec{v}| = \sqrt{(r\omega)^2 [(-\sin \omega t)^2 + (\cos \omega t)^2]} = r\omega$$

• Su aceleración, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - r\omega^2 \sin \omega t \vec{j} = -\omega^2 \vec{r}$

de módulo: $a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$

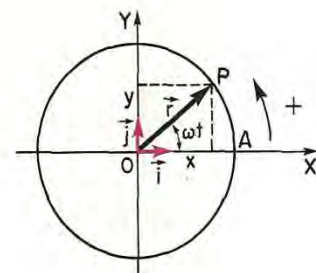


Fig. 2.31.

El vector aceleración \vec{a} tiene la dirección del vector de posición \vec{r} , pero sentido opuesto, dirigido hacia el centro O (fig. 2.32). Esto indica el signo $-$.

En definitiva, en un movimiento circular uniforme hay aceleración y ésta es una medida de cómo varía la dirección del vector velocidad. Este vector aceleración está dirigido **hacia el centro** de la trayectoria y recibe el nombre de **aceleración centrípeta** o **normal**.

El vector aceleración siempre puede expresarse como suma de dos **componentes**:

- la **aceleración tangencial**, que es **tangente a la trayectoria** y mide la variación del **módulo** de la velocidad:

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad [2.35]$$

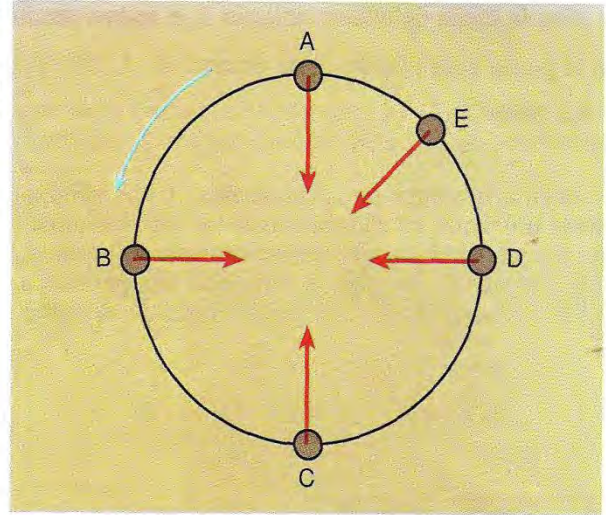


Fig. 2.32. Aceleración centrípeta: dirigida hacia el centro de la trayectoria.

- la **aceleración centrípeta o normal**, dirigida hacia el centro de la trayectoria (perpendicular, normal a la trayectoria), mide la variación de la **dirección** del vector velocidad:

$$a_n = \frac{|\vec{v}|^2}{R} \quad [2.36]$$

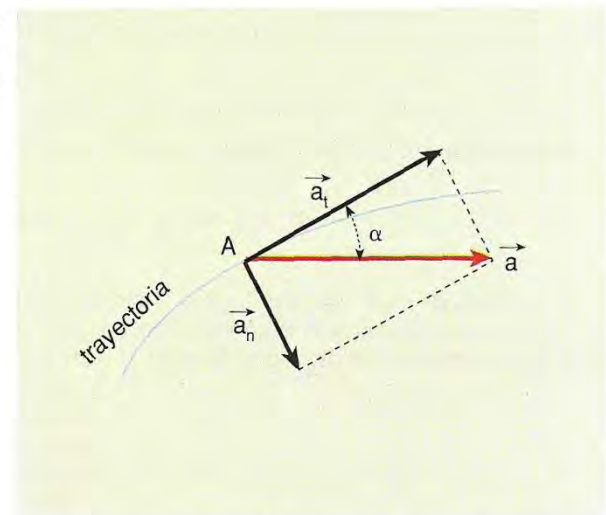


Fig. 2.33. Aceleración de una partícula en función de sus componentes intrínsecas.

Ambas componentes son perpendiculares entre sí (fig. 2.33) y su suma vectorial da el vector aceleración en un punto de la trayectoria:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t; \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}; \quad \tan \alpha = \frac{a_n}{a_t} \quad [2.37]$$

Esta forma de descomponer el vector aceleración, además de asignar un sentido físico a cada una de las componentes, hace que éstas no dependan del sistema de referencia elegido (como las indicadas en la ecuación [2.10]), sino del punto de la trayectoria que se considere; por ello se las denomina **componentes intrínsecas de la aceleración**.

En un movimiento, pueden variar tanto el módulo como la dirección y sentido del vector velocidad. Por tanto, en la ecuación de definición [2.6], $\vec{v} = v \vec{\tau}$, v y $\vec{\tau}$ pueden variar con el tiempo, por lo cual la aceleración es:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} \quad [\alpha]$$

Por lo dicho del vector unitario $\vec{\tau}$, el **primer sumando** tiene la dirección de la tangente a la trayectoria en el punto considerado. Para determinar \vec{a} , debemos conocer el vector derivada, $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$.

Sean dos puntos de la **trayectoria** A y B infinitamente próximos; en ellos situamos los vectores unitarios $\vec{\tau}_1$, y $\vec{\tau}_2 = \vec{\tau}_1 + d\vec{\tau}$, respectivamente. Si trasladamos el vector $\vec{\tau}_2$ al punto A siguiendo una paralela a la línea de su dirección, queda determinado el vector $d\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1 = \vec{\tau}_1 + d\vec{\tau} - \vec{\tau}_1 = d\vec{\tau}$$

En el punto A se cumple:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \quad [\beta]$$

pues, $\frac{ds}{dt} = v$ es el valor de la velocidad en ese punto.

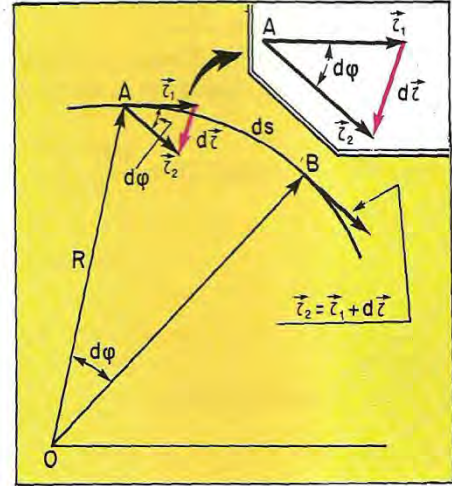


Fig. 2.34. Componentes intrínsecas de la aceleración.

Por la definición de radián, deducimos para el módulo de $d\vec{\tau}$, en la fig. 2.34.

$$d\tau = 1 \cdot d\phi = d\phi, \text{ ya que el módulo de } |\tau_1| = 1.$$

Y también, $ds = R \cdot d\phi$, siendo R el radio de curvatura, porque al estar los puntos A y B infinitamente próximos, puede tomarse el arco ds como arco de una trayectoria circular con centro en O . De las dos últimas igualdades se deduce por división:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$$

El sentido del vector derivada, $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$, cuya dirección es perpendicular al vector unitario y dirigido hacia el centro de la trayectoria, O , lo indicamos con el vector unitario \vec{n} . Por tanto,

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{n}$$

que sustituimos en la (β) y se obtiene: $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{R} \vec{n}$

Según esto, la aceleración instantánea del móvil en un punto de la trayectoria es:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad [2.38]$$

Ejercicio 13

El radio de la Tierra es de 6 400 km. Para un punto de la Tierra que se encuentra a 45° de latitud, calcular: a) velocidad lineal, b) velocidad angular, c) período, d) aceleración centrípeta y e) aceleración tangencial.

SOLUCIÓN

a) y b)

El punto describe un movimiento circular uniforme de radio R :

$$R = 6\,400\text{ km} \cdot \cos 45^\circ = 4\,525\text{ km} = 4,525 \cdot 10^6\text{ m}$$

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{t} = \frac{2\pi\text{ rad}}{24 \cdot 3\,600\text{ s}} = 7,27 \cdot 10^{-5}\text{ rad/s}$$

$$|\vec{v}| = \omega \cdot R = 7,27 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 4\,525 \cdot 10^3\text{ m} = 329\text{ m/s}$$

c) El período es el tiempo que invierte en dar una vuelta: 24 h.

d) La aceleración centrípeta es: $a_c = \omega^2 R = 0,024\text{ m/s}^2$.

e) La aceleración tangencial es nula (movimiento circular uniforme, la celeridad es constante).

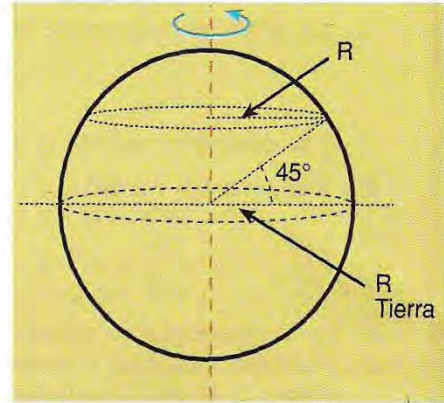


Fig. 2.35.

Ejercicio 14

Una partícula describe en un plano vertical una trayectoria circular de radio 0,60 m, con centro en el origen del sistema de referencia (O ; \vec{i} , \vec{j}) y sentido opuesto a las agujas del reloj. Al pasar por el punto $A(0,60, 0)$ en el instante $t = 0$, lleva una velocidad angular $\omega_0 = 5\text{ rad/s}$; y al regresar a dicho punto después de una vuelta completa, la velocidad angular es de 7 rad/s . La aceleración angular es constante.

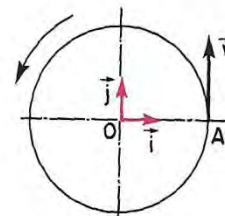


Fig. 2.36.

Se pide: a) la aceleración angular del movimiento; b) el tiempo que tarda en dar la primera vuelta, c) la velocidad lineal en ese instante; d) las componentes tangencial y normal de la aceleración en ese instante; e) el vector aceleración y su módulo en ese punto; f) la dirección y sentido del vector velocidad angular.

SOLUCIÓN

a) Podemos calcular la aceleración angular a partir de la ecuación [2.34] teniendo en cuenta que el ángulo descrito en la primera vuelta es $\phi = 2\pi\text{ rad}$:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\phi \Rightarrow \alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\phi} = \frac{(7^2 - 5^2)(\text{rad/s})^2}{2 \cdot 2\pi\text{ rad}} = \frac{6}{\pi}\text{ rad/s}^2$$

b) De $\phi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ se deduce el tiempo que tarda en dar la primera vuelta:

$$2\pi\text{ rad} = 5\text{ rad/s} \cdot t + \frac{6}{2\pi}\text{ rad/s}^2 \cdot t^2$$

de donde se obtiene:

$$3t^2 + 5\pi t - 2\pi^2 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = \frac{\pi}{3} = 1,05 \text{ s} \\ t_2 = -2\pi = -6,28 \text{ s} \end{cases}$$

La solución negativa no tiene sentido físico; $t = 1,05 \text{ s}$.

- c) La velocidad tangencial o lineal de la partícula, en ese instante, vale:

$$v = \omega \cdot R = 7 \text{ rad/s} \cdot 0,60 \text{ m} = 4,2 \text{ m/s}$$

y su dirección y sentido es la de la tangente en el punto (A) siguiendo el movimiento.

- d) Componentes intrínsecas de la aceleración: $a_t = \alpha \cdot R = 1,15 \text{ m/s}^2$;

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = 29,4 \text{ m/s}^2$$

- e) La componente \vec{a}_t es tangente a la trayectoria, de la misma dirección y sentido que la velocidad lineal \vec{v} ; y la centrípeta o normal \vec{a}_n tiene la dirección del radio y está dirigido hacia el centro; su suma vectorial es el vector de aceleración:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n; \text{ de módulo: } a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 29,42 \text{ m/s}^2$$

$$\text{y la dirección: } \beta = \arctan \frac{|\vec{a}_t|}{|\vec{a}_n|} = 2,24^\circ$$

- f) El vector velocidad angular $\vec{\omega}$ es perpendicular al plano de la trayectoria por el centro O y saliendo hacia el lector, ya que tiene el sentido del avance del sacacorchos que gira con la partícula.

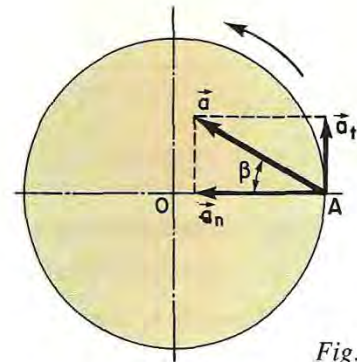


Fig. 2.37.

Ejercicio 15

Un jugador de rugby, al ejecutar una falta de castigo, golpea la pelota de forma que ésta sale lanzada a 72 km/h con un ángulo de elevación de 37° sobre la horizontal. La falta se lanzó perpendicularmente a la portería, que se encuentra a 32 m y cuyo listón está a 4 m del suelo. Se pide:

- Establecer si la pelota pasa por encima o por debajo del listón.
- Velocidad de la pelota cuando pasa por la portería y determinar si, en este instante, sube o baja.
- Valor de las componentes intrínsecas de la aceleración en el momento que la pelota pasa por la portería.

SOLUCIÓN

- a) Como 72 km/h son 20 m/s, el vector velocidad inicial de la pelota es:

$$\vec{v}_0 = 20 \cos 37^\circ \vec{i} + 20 \sin 37^\circ \vec{j} = 16 \vec{i} + 12 \vec{j}$$

De acuerdo con el sistema de referencia de la figura 2.38, la posición de la pelota viene dada por:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 = 16 t \vec{i} + 12 t \vec{j} - 4,9 t^2 \vec{j}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 16 t \\ y &= 12 t - 4,9 t^2 \end{aligned} \right\} \quad y = 0,75x - \frac{4,9}{16^2} x^2$$

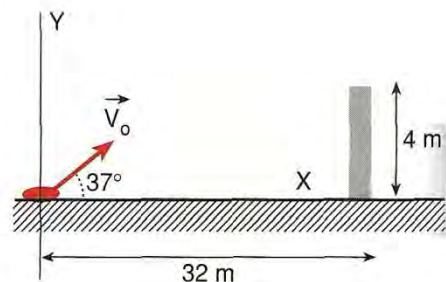


Fig. 2.38.

Cuando la pelota pasa por la vertical de la portería $x = 32$ m. Para determinar si pasa por encima del listón hay que establecer el valor de la posición y , la cual puede calcularse por la ecuación de la trayectoria o bien calculando el tiempo en la ecuación de la posición horizontal y substituirlo en la de la vertical:

- con la ecuación de la trayectoria: $y = 0,75 \cdot 32 - (4,9 \cdot 32^2)/256 = 4,4$ m

- calculando el tiempo: $t = \frac{x}{16} = \frac{32 \text{ m}}{16 \text{ m/s}} = 2,0$ s; $y = 12 \cdot 2 - 4,9 \cdot 2^2 = 4,4$ m

por tanto, el balón pasa por encima del listón.

b) La velocidad de la pelota cuando pasa por la portería es:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = 16\vec{i} + 12\vec{j} - 9,8\vec{j}t = 16\vec{i} + (12 - 9,8t)\vec{j}$$

$$\vec{v}_{2s} = 16\vec{i} + (12 - 9,8 \cdot 2)\vec{j} = 16\vec{i} - 7,6\vec{j} \quad |\vec{v}_{2s}| = \sqrt{16^2 + (-7,6)^2} = 17,7 \text{ m/s}$$

Este vector velocidad tiene por componente vertical $-7,6$ m/s: por tanto, la pelota ya descendía cuando pasó por la portería.

c) Las componentes intrínsecas se pueden calcular aplicando su definición (ecuaciones [2.35], [2.36] y [2.37] pero también por simples consideraciones geométricas.

Por consideraciones geométricas.

El vector velocidad es tangente a la trayectoria y el ángulo que forma con la horizontal es (figura 2.39):

$$\beta = \arctan \frac{7,6}{16} = 25,4^\circ$$



Fig. 2.39.

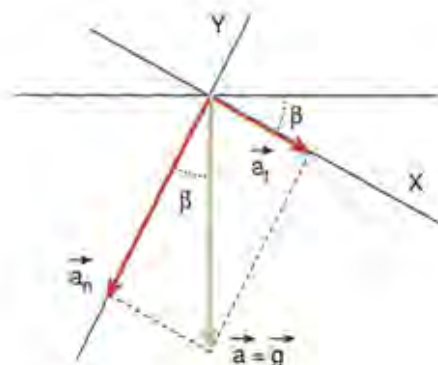


Fig. 2.40.

Teniendo en cuenta la figura 2.40:

$$|\vec{a}_t| = |\vec{g}| \cdot \sin \beta = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,429 = 4,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$|\vec{a}_n| = |\vec{g}| \cdot \cos \beta = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,903 = 8,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Aplicando las ecuaciones de definición.

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad [2.35]$$

$$\vec{v} = 16\vec{i} + (12 - 9,8t)\vec{j} \quad |\vec{v}| = \sqrt{16^2 + (12 - 9,8t)^2}$$

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{16^2 + (12 - 9,8t)^2}} \cdot (192,1t - 235,2); \quad a_{t_{2s}} = 4,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{9,8^2 - 4,2^2} = 8,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

11. Movimientos relativos

Indicamos al principio de este tema que la posición de una partícula material se determina por sus coordenadas; si éstas dependen del tiempo se dice que la partícula está en movimiento respecto del sistema de referencia. Por tanto, el concepto de movimiento sólo se puede entender relacionándolo con un referencial; por lo que el movimiento es siempre relativo.

En el referencial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ que suponemos inercial, la velocidad del punto material M respecto de A es la velocidad que parece tener M respecto del observador que se mueve con A . Sean \vec{r}_M y \vec{r}_A los vectores de posición en un instante dado de esos dos puntos en el referencial inercial. De la figura 2.41 se deduce:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{r}_{MA}; \text{ por tanto, } \vec{r}_{MA} = \vec{r}_M - \vec{r}_A$$

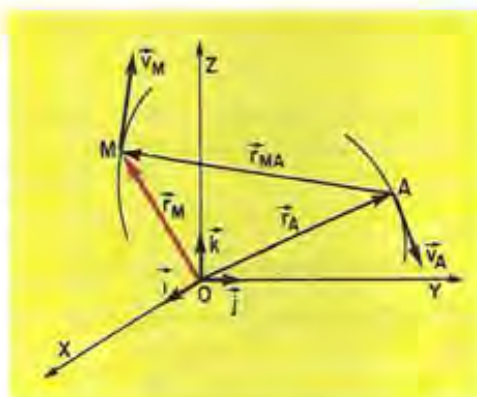


Fig. 2.41. Velocidad relativa de un punto M respecto de otro móvil A , en un sistema inercial.

de donde se deduce, por derivación respecto del tiempo, la velocidad relativa de M :

$$\frac{d\vec{r}_{MA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt}; \text{ es decir: } \vec{v}_{M/A} = \vec{v}_M - \vec{v}_A \quad [2.36]$$

Siendo $\vec{v}_{M/A}$ la **velocidad relativa** de M respecto de A , igual a la **diferencia vectorial entre la velocidad del primero menos la del observador**. Cuando la de éste es nula, caso corriente, la velocidad relativa de M es simplemente \vec{v}_M .

Ejercicio 16

Un avión A se desplaza con velocidad de 900 km/h en dirección E , en un plano horizontal; y un segundo avión B se desplaza en dirección S a 450 km/h, también horizontalmente en un plano 2 km por debajo del primero. En el instante $t = 0$ ambos coinciden en la vertical. Calcular la velocidad relativa del primero respecto del segundo.

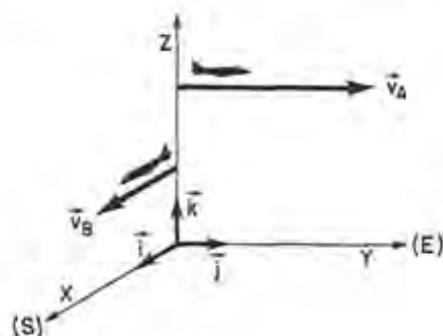


Fig. 2.42.

SOLUCIÓN

En el referencial $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, las velocidades respectivas de ambos aviones son:

$$\vec{v}_A = 900\vec{j} \quad ; \quad \vec{v}_B = 450\vec{i}$$

La velocidad relativa, $\vec{v}_{A/B}$ es, por definición:

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 900\vec{j} - 450\vec{i}$$

cuyo módulo es:

$$v_{A/B} = \sqrt{(900 \text{ km/h})^2 + (-450 \text{ km/h})^2} = 1006 \text{ km/h}$$

12. Movimiento armónico simple

En un movimiento periódico de vaivén a un lado y a otro de una posición de equilibrio. Las oscilaciones de un péndulo y las de un cuerpo unido a un resorte son ejemplos de movimiento armónico simple, también conocido como movimiento vibratorio armónico.

Éste es un movimiento periódico de vaivén a un lado y a otro de la posición de equilibrio.

La aceleración de este movimiento se expresa:

$$a = -kx \quad [2.37]$$

k es una constante llamada de elasticidad. Por tanto, la aceleración es proporcional al desplazamiento x , y de signo contrario.

Supongamos una partícula que se desplaza con movimiento circular uniforme con velocidad ω . La proyección P sobre el eje OX de una posición cualquiera C vale x . Si proyectamos todas las posiciones de C en el tiempo sobre AB , dichas proyecciones se mueven con movimiento vibratorio armónico.

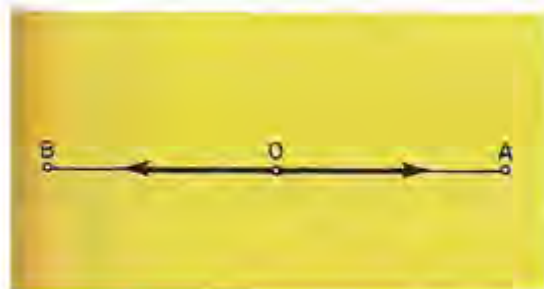


Fig. 2.43. Movimiento vibratorio armónico.

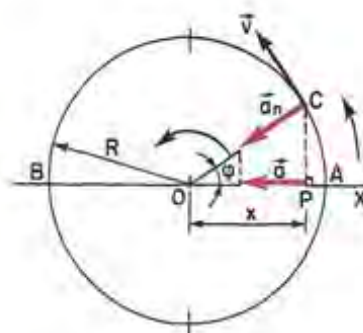


Fig. 2.44. Movimiento vibratorio armónico de las proyecciones de un movimiento circular uniforme.

En efecto, la aceleración normal de la partícula en C es: $\vec{a}_n = \frac{|v|^2}{R} \vec{n} = \omega^2 R \vec{n}$; y su proyección sobre AB da la **aceleración de las proyecciones** P , en AB . De la fig. 2.44 se obtiene:

$$a = -|\vec{a}_n| \cos \varphi, \quad \text{y} \quad \cos \varphi = \frac{x}{R}; \text{ por tanto, } a = -\omega^2 R \cdot \frac{x}{R} = -\omega^2 x \quad [2.38]$$

El signo menos ($-$) de [2.41] se debe a que x y a tienen sentido opuesto. Esta ecuación cumple la condición [2.40] del movimiento vibratorio armónico, pues ω es constante; luego las proyecciones P en AB , se desplazan con dicho movimiento.

El *valor* de los desplazamientos es: $x = R \cos \varphi = R \cos \omega t$, y toma valores negativos entre O y B .

La **velocidad** de los desplazamientos, en AB es:

$$v = \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin \omega t; \text{ y la } \textbf{aceleración}, a = \frac{dv}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x$$

confirmando lo visto antes.

Características de este movimiento

- **Desplazamiento** x es el vector $O\vec{P}$.
- **Amplitud** A es el desplazamiento máximo desde la posición central: $A = \frac{AB}{2} = R$ (en este caso).
- **Período** T es el tiempo empleado en dar una oscilación completa: **AOBOA**.
- **Frecuencia** f es el número de oscilaciones que se verifican en cada segundo: $f = \frac{1}{T}$. El ciclo por segundo se llama hertzio (Hz).

Variaciones de la velocidad y la aceleración

De $v = -A\omega \sin \omega t$, se deduce:

$$v = \pm A\omega \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \pm A\omega \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

para $x = 0$, $v = \pm A\omega$, valor máximo (en el centro)

para $x = \pm A$, $v = 0$, en los extremos;

$$a = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x$$

para $x = 0$, $a = 0$, en el centro

para $x = A$, $a = -A\omega^2$
 para $x = -A$, $a = +A\omega^2$ } en los extremos (máxima)

Notas

- En los capítulos 4 y 8 se tratan y completan otros aspectos de este movimiento.
- La ecuación general del movimiento armónico simple (vibratorio) se expresa de dos formas:

$$x = A \cos (\omega t + \varphi_0) \quad \text{y} \quad x = A \sin (\omega t + \varphi_0)$$

según el punto donde se empieza a estudiar el movimiento, pero son equivalentes; φ_0 es la fase inicial para $t = 0$.

Ejercicio 17

Una partícula describe un movimiento de ecuación (en unidades SI):

$$x = 5 \operatorname{sen}(\pi t)$$

Calcular cuánto vale la velocidad de la partícula en los instantes cuya posición x es 2,5 m.

SOLUCIÓN

La velocidad de la partícula es:

$$v = \frac{dx}{dt} = 5\pi \cos(\pi t)$$

Esta velocidad depende del tiempo. Cuando $x = 2,5$ m: $\operatorname{sen}(\pi t) = 2,5/5 = 0,5$; por tanto,

$$\cos(\pi t) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\pi t)} = \pm 0,866$$

$$v = 5\pi \cos(\pi t) = 5\pi \cdot \pm 0,866 = \pm 13,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El doble signo de la velocidad significa que tiene la misma celeridad en los dos sentidos del movimiento.

10. Oscilador armónico

Sea un cuerpo de masa m que está unido a un resorte de constante elástica k (fig. 4.30). Si se separa el cuerpo de la posición de equilibrio, al soltarlo describe un movimiento armónico simple (si despreciamos los rozamientos).

Por la segunda ley de Newton,

$$\begin{aligned} F &= m \cdot a \\ -k \cdot x &= m \cdot a \\ a &= -\frac{k}{m} \cdot x \end{aligned}$$

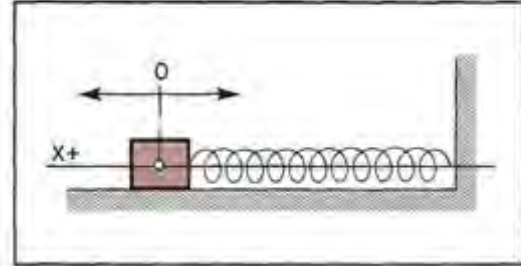


Fig. 4.30. Oscilador armónico.

El cociente entre las constantes k y m también es constante (C),

$$a = -C \cdot x$$

ecuación equivalente a la característica del movimiento armónico simple,

$$a = -\omega^2 \cdot x \quad [2.41]$$

Si comparamos estas ecuaciones,

$$\begin{aligned} -\omega^2 \cdot x &= -\frac{k}{m} \cdot x \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Ya que la frecuencia angular es $\omega = \frac{2\pi}{T}$, siendo T el periodo,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad [4.18]$$

ecuación que permite calcular el periodo del movimiento vibratorio armónico simple que efectúa la partícula. A mayor «rigidez» del muelle mayor es k y, por tanto, menor es el periodo para una masa determinada.

Es interesante resaltar que el periodo es independiente de la amplitud de las oscilaciones.

En la gráfica 4.31 se representan las energías potencial, cinética y mecánica del cuerpo frente a la deformación. Observar que al valor máximo de energía cinética corresponde un valor mínimo de energía potencial. En el oscilador armónico hay una transformación continuada de las energías cinética y potencial, pero, en cualquier instante, su suma (energía mecánica total) es constante.

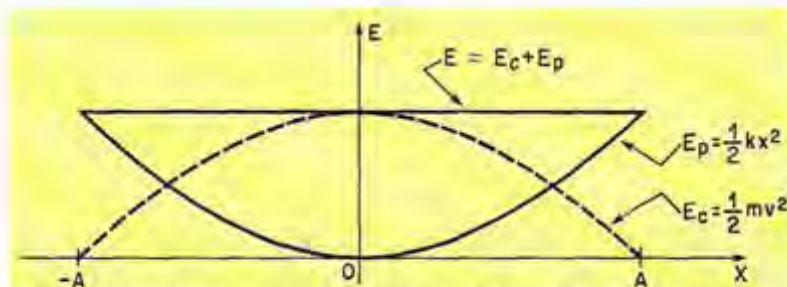


Fig. 4.31. Gráfica energía-posición para el oscilador armónico.

11. Péndulo simple

El péndulo simple o matemático está constituido por un punto material de masa m suspendido de un punto fijo, sin rozamiento, por un hilo inextensible y de masa despreciable.

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso y la tensión (fig. 4.32). El peso se puede descomponer como se indica en la figura. Por la segunda ley de Newton, aplicada a cada eje,

$$\text{eje } Y: \quad m \cdot a_y = |\vec{T}| - |\vec{P}_y|$$

$$\text{eje } X: \quad m \cdot a_x = P_x = -m \cdot |\vec{g}| \cdot \sin \alpha$$

Debe tenerse en cuenta que $|\vec{T}|$ no es igual a $|\vec{P}_y|$, ya que se describe un movimiento circular y, por tanto, debe haber una fuerza centrípeta dirigida hacia el centro de la trayectoria. Por tanto, $|\vec{T}|$ es mayor que $|\vec{P}_y|$.

En el eje X , si simplificamos la masa, se tiene:

$$a_x = -|\vec{g}| \sin \alpha$$

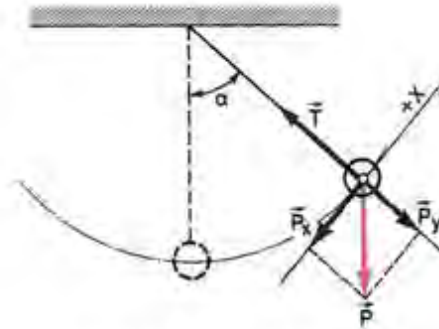


Fig. 4.32. Péndulo simple.

Para ángulos pequeños, el valor del seno del ángulo es igual al valor del ángulo expresado en radianes.

α (grados)	α (rad)	$\sin \alpha$	diferencia (%)
0	0	0	0
2	0,0349	0,0349	0
5	0,0873	0,0872	0,11
10	0,1745	0,1736	0,51
15	0,2618	0,2588	1,14

Para estos ángulos,

$$a_x = -|\vec{g}| \cdot \alpha = -|\vec{g}| \cdot \frac{\text{arco recorrido}}{\text{radio}} = -|\vec{g}| \cdot \frac{\text{arco}}{L}$$

Para un péndulo determinado, el cociente $|\vec{g}|/L$ es constante ($= C$), por tanto,

$$a_x = -C \cdot \text{arco} = -C \cdot x$$

es decir, un péndulo simple describe un movimiento armónico simple (para ángulos pequeños, despreciando el rozamiento y la masa del hilo).

Periodo de un péndulo simple

$$a = -\frac{|\vec{g}|}{L} \cdot x = -\omega^2 \cdot x \quad \omega = \sqrt{\frac{|\vec{g}|}{L}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{|\vec{g}|}} \quad [4.15]$$

ecuación que puede utilizarse para determinar la aceleración de la gravedad en un punto determinado.

De acuerdo con dicha ecuación, el periodo de oscilación es independiente de la amplitud de las oscilaciones y de la masa del péndulo.

Cuestiones

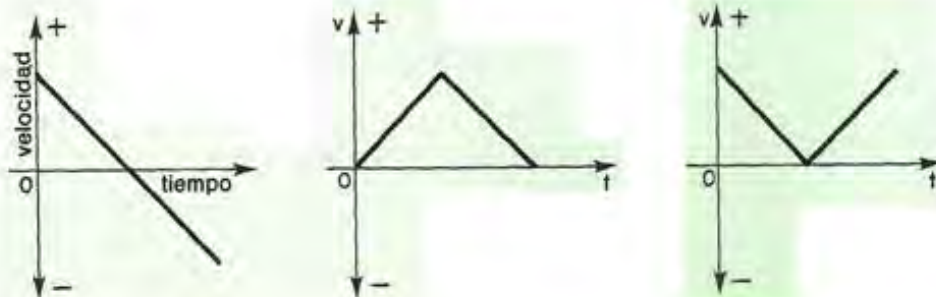
1. La velocidad de una partícula que parte del reposo con aceleración constante, vale:

$$v = \frac{2s}{t}$$

Demostrarlo.

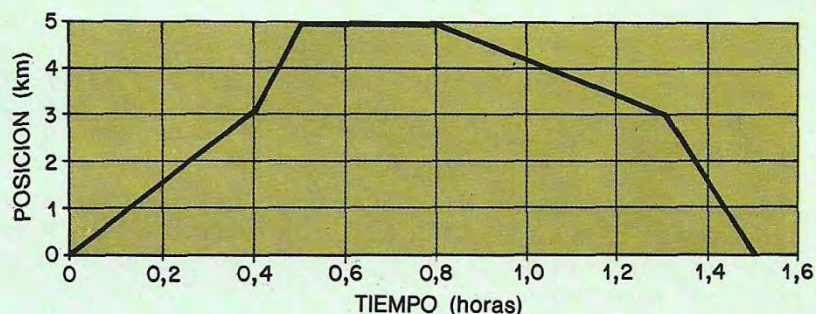
2. Deducir el valor de la velocidad instantánea de una partícula si se conoce la velocidad inicial v_0 , la aceleración del movimiento a y la distancia recorrida s .
- 3.* Indicar, en los movimientos que se citan, cuáles tienen la velocidad \vec{v} constante:
- a) movimiento rectilíneo uniforme;
 - b) movimiento circular uniforme;
 - c) movimiento rectilíneo uniformemente acelerado;
 - d) movimiento circular uniformemente acelerado;
 - e) movimiento armónico.

4. ¿Qué gráfica de la figura representa la velocidad de una piedra que se lanza verticalmente hacia arriba en el instante $t = 0$ y cae de nuevo? ¿Qué valor debe tener la pendiente en cada tramo?

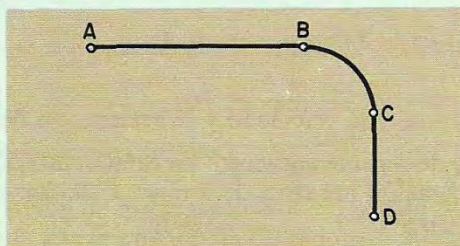


- 5.* ¿Se puede desplazar una partícula sin aceleración a lo largo de una curva? Justificar la respuesta.
6. Deducir que la expresión $R\omega^2$ tiene las dimensiones de una aceleración. ¿A cuál corresponde?
- 7.* ¿Qué dirección y sentido tiene la aceleración de un punto que recorre una circunferencia con velocidad v constante? Razonar la respuesta.

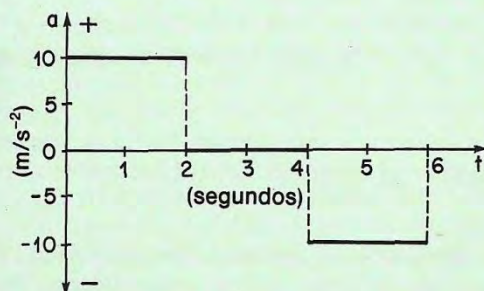
- 2.8. Un muchacho va en bicicleta a casa de un amigo, y regresa, después de un breve tiempo, a su casa lo más rápido posible. Interpretar la gráfica $s-t$ del recorrido y representar la gráfica $v-t$ del mismo.



- 2.9. La trayectoria de un móvil es la de la figura. Si acelera entre AB , entre BC se mueve con velocidad v constante, y entre CD frena hasta parar, representar el vector aceleración en el punto medio de los tramos que la posean.



- 2.10. Una partícula parte del reposo y en los 6 primeros segundos experimenta las aceleraciones que indica la gráfica:



- Representar la gráfica $v-t$ del movimiento.
- Velocidad máxima en los 6 s.
- Representar la gráfica $s-t$.
- Hallar la distancia máxima recorrida.

- 2.11.* Dar un ejemplo de movimiento en el que la velocidad sea negativa y la aceleración positiva. Dibujar la gráfica $v-t$ de este movimiento.

Universidad de Barcelona

- Indicar razonadamente en qué punto de su trayectoria tiene un proyectil su velocidad mínima.
- Una plataforma de circo gira uniformemente. ¿Es un sistema inercial? Justificar la respuesta.
- Se deja caer un cuerpo desde lo alto de una torre. Deducir a qué distancia del suelo su velocidad es igual a la mitad de la que adquiere al llegar al suelo. Altura de la torre: h m.
- Deducir la velocidad del extremo de la aguja del segundero de un cronómetro que mide 12 mm, y su frecuencia.
- Desde un coche que va a 20 m/s se lanza una pelota de tenis con la velocidad de 15 m/s en dirección perpendicular al desplazamiento del coche. Calcular la velocidad relativa de la pelota respecto del coche.
- Representar el vector velocidad angular de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol, y el de la velocidad angular de la rotación alrededor de su eje.

Problemas

- 2.1. Una partícula se mueve según la ecuación: $s = 4t^2 + 2t + 3$ en unidades SI. Calcular: a) el desplazamiento en $t = 0$; b) la velocidad inicial v_0 ; c) la velocidad en el instante $t = 2$ s; d) la aceleración del movimiento.
- 2.2. Determinar las constantes de un movimiento uniformemente variado, si el móvil tiene una velocidad de 17 m/s a los 4 s de empezar a contar el tiempo; y, en los tiempos $t_1 = 2$ s y $t_2 = 4$ s dista del origen 12 y 40 m, respectivamente. Representar las gráficas $s - t$, $v - t$ y $a - t$ del movimiento.

- 2.3.* Un movimiento plano referido al sistema $(O; \vec{i}, \vec{j})$ viene descrito por las ecuaciones paramétricas:

$$x = \frac{1}{2} t^2 + 2 \quad ; \quad y = t^2 - 1$$

Determinar la ecuación de la trayectoria, y la velocidad y la aceleración del móvil.

- 2.4.* Un coche viaja de noche a 72 km/h y de repente encuentra un camión estacionado a 30 m de distancia. Frena con la máxima aceleración negativa de 5 m/s². Calcular: a) el tiempo que tarda en detenerse; b) ¿choca con el camión?
- 2.5.* Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad $v_0 = 100$ m/s. Medio segundo después, con la misma arma, se dispara un segundo proyectil en la misma dirección. Determinar:
- La altura a la que se encuentran ambos proyectiles.
 - La velocidad de cada uno al encontrarse.
 - El tiempo transcurrido desde el primer disparo hasta el choque. Se desprecian los rozamientos.
- 2.6.* Una persona observa un objeto que pasa frente a una ventana de 1,5 m, primero de subida y luego de bajada. Si el tiempo total que ve el objeto es de 0,612 s, hallar a qué altura sube sobre la ventana.
- 2.7.* Un paracaidista salta de un avión y cae 50 m, sin rozamiento del aire. Abre el paracaídas en ese punto y el aire lo frena con aceleración de 2 m/s² y baja verticalmente, llegando al suelo con una velocidad de 3 m/s. Determinar, si el avión iba a 600 km/h: a) el tiempo que estuvo en el aire el paracaidista; b) la altura de la que se tiró.
- 2.8.* El vector de posición de una partícula P es: $\vec{r} = 3t\vec{i} - t^2\vec{j} + 8t\vec{k}$ en unidades SI. Hallar: a) la velocidad de la partícula a los 2 minutos de iniciado el movimiento; b) las componentes intrínsecas de la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria a los 2 s.

Universidad de Cantabria, 1988

- 2.9.* Un cohete se dispara verticalmente y sube con aceleración de 20 m/s² durante un minuto. En ese instante se acaba el combustible y sigue moviéndose como partícula libre. Tomando g_0 como constante, calcular: a) la altura máxima alcanzada; b) el tiempo que está el cohete en el aire.
- 2.10.* La posición de un objeto está relacionada con el tiempo por la ecuación: $x = At^2 - Bt + C$, siendo $A = 8$ m/s²; $B = 6$ m/s y $C = 4$ m. Determinar: a) ¿es uniformemente acelerado el movimiento?, ¿por qué?; b) la velocidad del móvil al cabo de 1 s.

Universidad de Barcelona, 1985

- 2.11.* Se lanza una pelota con velocidad inicial \vec{v} de componentes: $v_x = 20$ m/s, y $v_y = 16$ m/s. Calcular: a) el tiempo que está subiendo; b) la altura que alcanza; c) la distancia a que se debe encontrar otro jugador de la misma talla para devolver la pelota.

- 2.12.*** En un duelo del lejano Oeste un pistolero dispara horizontalmente una bala con velocidad de 200 m/s desde una altura de 1,25 m. Calcular la distancia mínima entre los adversarios situados en plano horizontal, para que la presunta víctima no sea alcanzada.

Universidad de Barcelona

- 2.13.*** Un sólido parte sin velocidad inicial del punto más alto de un plano inclinado de 1 m de longitud que forma un ángulo de 30° con la horizontal; se prescinde de rozamientos. Al abandonar el plano inclinado se mueve en caída libre. Calcular el instante en que su velocidad forma un ángulo de 60° con la horizontal, a contar desde el punto de partida.

- 2.14.*** El famoso cañón Berta (de la 1.^a Guerra Mundial) tenía un alcance máximo de 100 km. Despreciando la resistencia del aire, calcular: *a*) la velocidad del proyectil al salir por la boca del cañón; *b*) la altura máxima del proyectil en tiro vertical.

Universidad Complutense

- 2.15.*** Un tren se desplaza con velocidad v_1 y el maquinista observa que, a una distancia d marcha un mercancías por la misma vía y en el mismo sentido, con velocidad menor v_2 . Frena y da a su tren una aceleración constante a . Demostrar que si $d > \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$ no hay choque; pero si $d < \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}$, hay choque. (Es instructivo dibujar cualitativamente las gráficas distancia-tiempo para cada tren.)

- 2.16.*** Un avión de bombardeo baja en picado a una velocidad de 700 km/h, formando un ángulo de 45° con la horizontal. Cuando está a una altura de 400 m sobre el suelo suelta una bomba. Calcular: *a*) el tiempo que tarda en llegar al suelo; *b*) la velocidad con que llega; *c*) el punto en que cae (distancia a la vertical del avión en el instante de lanzamiento).

Universidad de Santiago

- 2.17.*** Un jugador lanza una pelota formando un ángulo de 37° con la horizontal y con velocidad inicial de 14,5 m/s. Un segundo jugador que está a 30,5 m de distancia del primero en la dirección del lanzamiento inicia una carrera para encontrar la pelota, en el instante de ser lanzada. Hallar la velocidad con que debe correr para coger la pelota antes de que caiga al suelo.

- 2.18.*** Una partícula lleva la velocidad de 6 m/s en un instante dado y su aceleración es de 8 m/s^2 . Si sus vectores representativos forman un ángulo de 60° , calcular: *a*) las componentes tangencial y normal de la aceleración; *b*) el radio de curvatura en ese instante.

Universidad de Barcelona

- 2.19.*** La velocidad angular de un volante ^{disco} disminuye uniformemente de 900 a 800 vueltas por minuto en 5 s. Calcular: *a*) la aceleración angular del movimiento; *b*) el número de vueltas que da en esos 5 s; *c*) el tiempo que tarda en detenerse, a partir de ese instante.

- 2.20.*** Una partícula describe una trayectoria circular según la ecuación: $\omega = 3t^2 - 2t + 4$, siendo ω la velocidad angular en rad/s, y t el tiempo en segundos. Para $t = 2$ s, ha recorrido un ángulo de 12 rad. Hallar el ángulo para $t = 4$ s.

- 2.21.*** Una partícula describe la trayectoria dada por las ecuaciones: $x = t$; $y = t^2$ en unidades SI. Cuando pasa la partícula por la posición (1,1) determinar su velocidad y aceleración, así como las componentes intrínsecas de la aceleración y el radio de curvatura.

- 2.22.*** Un avión en vuelo horizontal a la altura de 300 m y velocidad de 72 m/s desea batir un barco que se desplaza a 24 m/s en la misma dirección y sentido que el avión. Determinar a qué distancia, desde la vertical del avión, debe soltar la bomba para lograr el impacto; ¿cuál sería esa distancia si el barco se moviera en sentido contrario hacia el avión?

- 2.23.*** Un globo se eleva verticalmente con velocidad de 4,9 m/s y abandona un peso en el instante en que el globo está a 19,2 m del suelo. Calcular: *a*) la posición y la velocidad del peso al cabo de $1/4$ s $1/2$ s, 1 s y 2 s; *b*) el tiempo que tarda en llegar al suelo; *c*) la velocidad del peso en ese punto.

Respuesta a los problemas

- 2.1. $s_0 = 3 \text{ m}$; $v_0 = 2 \text{ m/s}$; $v = 18 \text{ m/s}$; $a = 8 \text{ m/s}^2$.
- 2.2. $s_0 = -4 \text{ m}$; $v_0 = 5 \text{ m/s}$; $a = 3 \text{ m/s}^2$.
- 2.3. $y = 2x - 5$; $v = \sqrt{5}t \text{ m/s}$; $a = \sqrt{5} \text{ m/s}^2$.
- 2.4. $t = 4 \text{ s}$; sí.
- 2.5. $t_1 = 10,45 \text{ s}$; $h = 510 \text{ m}$; $v_1 = -2,41 \text{ m/s}$; $v_2 = 2,49 \text{ m/s}$.
- 2.6. $h = 0,59 \text{ m}$.
- 2.7. $t = 17,32 \text{ s}$; $h = 292 \text{ m}$.
- 2.8. $v = 240 \text{ m/s}$; $a_t = 1,6 \text{ m/s}^2$; $a_n = 1,2 \text{ m/s}^2$; $R = 20,8 \text{ m}$.
- 2.9. $h_m \simeq 109,5 \text{ km}$; $t \simeq 331 \text{ s}$.
- 2.10. $a = 16 \text{ m/s}^2$; $v = 10 \text{ m/s}$.
- 2.11. $t = 1,6 \text{ s}$; $y = 13 \text{ m}$; $x = 65 \text{ m}$.
- 2.12. $R_x = 101 \text{ m}$.
- 2.13. $t = 0,96 \text{ s}$.
- 2.14. $v \simeq 990 \text{ m/s}$; $h = 50 \text{ km}$.
- 2.16. $t = 2,66 \text{ s}$; $v = 214 \text{ m/s}$; $x = 366 \text{ m}$.
- 2.17. $v = 5,6 \text{ m/s}$.
- 2.18. $a_t = 4 \text{ m/s}^2$; $a_n = 6,93 \text{ m/s}^2$; $R = 5,19 \text{ m}$.
- 2.19. $\alpha \simeq -2,1 \text{ rad/s}^2$; $n = 70,8 \text{ vueltas}$; $t \simeq 40 \text{ s}$.
- 2.20. $\varphi = 64 \text{ rad}$.
- 2.21. $v = 2,24 \text{ m/s}$; $a = 2 \text{ m/s}^2$; $a_t = 1,79 \text{ m/s}^2$; $a_n = 0,89 \text{ m/s}^2$;
 $R = 5,62 \text{ m}$.
- 2.22. $x_1 = 376 \text{ m}$; $x_2 = 751 \text{ m}$.
- 2.23. $h_1 = 0,92 \text{ m}$; $h_2 = 1,125 \text{ m}$; $h_3 = 0 \text{ m}$; $h_4 = -9,8 \text{ m}$.
 $v_1 = 2,45 \text{ m/s}$; $v_2 = 0$; $v_3 = -4,9 \text{ m/s}$; $v_4 = -14,7 \text{ m/s}$.
 $t = 2,54 \text{ s}$; $v = 20 \text{ m/s}$.

TEMA IV

DINÁMICA

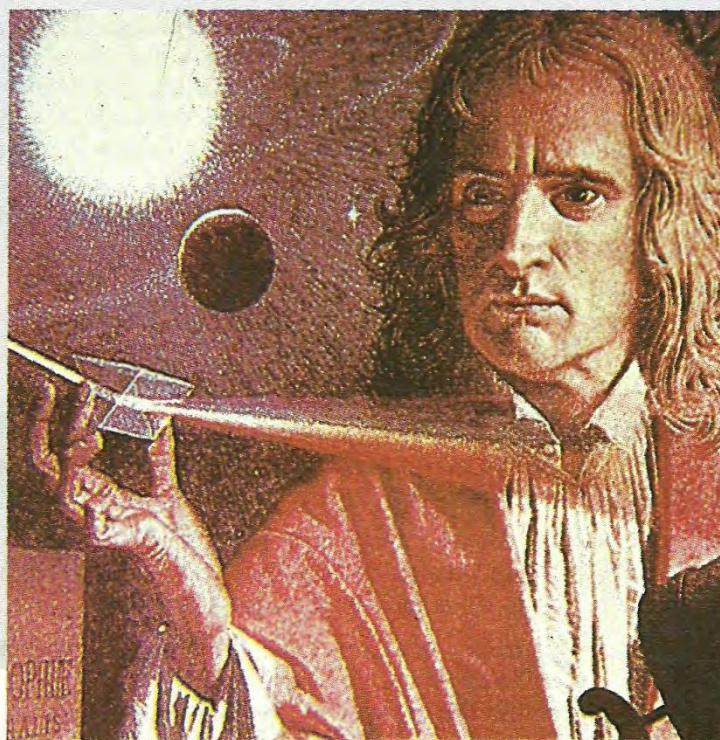
Dinámica de la partícula

A la pregunta, ¿quién fue el científico más grande que jamás existió?, Isaac Asimov responde:

«Si la pregunta fuese, ¿quién fue el segundo científico más grande?, sería imposible contestar. Hay por lo menos una docena de hombres que, en mi opinión, podrían aspirar a esa segunda plaza. Entre ellos figurarían, por ejemplo, Albert Einstein, Ernest Rutherford, Niels Bohr, Louis Pasteur, Charles Darwin, Galileo Galilei, J. Clerck Maxwell, Arquímedes y otros.

Pero como la pregunta es, ¿quién es el más grande?, no hay problema alguno. En mi opinión, la mayoría de los historiadores de la ciencia no dudarían en afirmar que Isaac Newton fue el talento científico más grande que jamás haya visto el mundo».

Newton, el científico más grande



Introducción

La dinámica estudia el movimiento de los cuerpos considerando las causas que lo originan o modifican, es decir, las fuerzas.

Por tanto, el estudio del movimiento de un cohete, un coche, un ascensor, una canica, un electrón en el interior del «tubo» del televisor, etc., requiere el uso de la dinámica. Por ello, es muy importante que el estudiante conozca las leyes que describen el movimiento y, sobre todo, sepa aplicarlas adecuadamente.

El rozamiento es un factor que debe tenerse en cuenta en muchos de los movimientos que veremos. De ahí que en este capítulo estudiemos también las fuerzas de rozamiento que se presentan en el movimiento de traslación.

Asimismo, por sus características específicas, dedicamos un estudio particular a la dinámica del movimiento circular.

Dado que el movimiento es un fenómeno relativo, es necesario especificar en su estudio el sistema de referencia elegido. En los últimos apartados del capítulo exponemos la relación que se puede establecer entre las observaciones realizadas desde diversos sistemas de referencia.



El esquiador se mueve a la velocidad de la lancha: cuando lleva MRU, el $\Sigma \vec{F} = 0$; en las curvas aparece la fuerza centrípeta.

1. Punto material

Al igual que en cinemática, los diferentes cuerpos cuyo movimiento se estudia los consideramos puntos materiales, es decir, sin dimensiones pero con masa (y, en algunos casos, con carga). Esta simplificación es realmente útil y aplicable pese a su precisión.

Un punto, al carecer de dimensiones, no puede girar sobre sí mismo, por lo que sólo cabe considerar en él movimiento de traslación, tanto en trayectoria rectilínea como circular, elíptica, irregular, etc.; por ello, la dinámica de la partícula se limita a los movimientos de traslación.

En capítulos posteriores estudiaremos los casos en los que hay que tener en cuenta las dimensiones de los objetos. Sin embargo, aun en estos casos, el objeto no es más que un «sistema de partículas» cuyo movimiento puede describirse analizando el de cada una de las partículas que lo constituyen; por consiguiente, también en esos casos habrá que aplicar la dinámica de la partícula a un conjunto de partículas.

Hay casos en que un mismo cuerpo puede ser considerado como partícula o como sistema de partículas. Por ejemplo, un patinador que evoluciona sobre una pista de hielo se asimila a una partícula cuando se traslada, pero al estudiar su velocidad de giro según extienda o acerque los brazos al cuerpo, es necesario considerarlo como un sistema de partículas.

Todas las fuerzas que actúan sobre el punto material concurren en dicho punto y pueden ser sustituidas por una fuerza única; su **resultante** (\vec{F}). De este modo, si sobre un cuerpo actúan n fuerzas ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$), la resultante es su suma vectorial,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

La **cantidad de movimiento** \vec{p} de una partícula se define como el producto de su masa por su vector velocidad:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad [3.1]$$

por tanto, el vector cantidad de movimiento tiene la dirección y el sentido del vector velocidad.

Con frecuencia se llama también **momento lineal** a la cantidad de movimiento.

2. Primera ley de Newton

Al problema del movimiento y sus causas, el hombre dedicó su atención desde antiguo. Sin embargo, hasta la época de Galileo (1564-1642) y Newton (1642-1727) no se establecieron las leyes que lo describen. En 1686, Isaac Newton presentó las tres leyes sobre las que se fundamenta la dinámica.

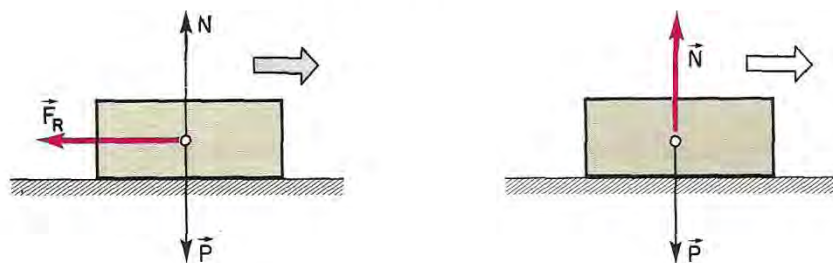
Estas leyes se conocen con diversos nombres: de Newton, del movimiento, de la dinámica...

La primera ley no es más que una reafirmación del principio de inercia que había formulado Galileo:

«Todo cuerpo conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que se le obligue a cambiar mediante alguna fuerza».

En otras palabras, si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nula (partícula libre), dicha partícula conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme.

El que una partícula en reposo siga en dicho estado, a menos que se le aplique una fuerza que le obligue a moverse, es un aspecto de la ley fácil de comprender. Puede parecer más difícil de entender la situación en la cual un cuerpo en movimiento rectilíneo uniforme conserva dicho estado si la resultante es nula. Podrá entenderse si se analiza el siguiente ejemplo: un cuerpo lanzado con la misma velocidad inicial por distintas superficies recorre más espacio, hasta detenerse, a medida que el rozamiento entre objeto y superficie es menor. En una superficie ideal en la que no hubiese rozamiento y, por tanto, la resultante de las fuerzas exteriores fuese nula (fig. 3.1), el cuerpo no se detendría y conservaría su velocidad constante.



a) Hay rozamiento, $\vec{F} = \vec{F}_R$. b) Sin rozamiento, $\vec{F} = 0$.

Fig. 3.1.

Esta ley se conoce como ley de la inercia porque, para variar el estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, es preciso aplicar una fuerza neta; es decir, los cuerpos presentan una resistencia (inercia) a variar estos estados.

Sistemas de referencia

Consideremos el siguiente ejemplo (fig. 3.2): un péndulo cuelga del techo de un automóvil que avanza con **aceleración constante**. En estas condiciones, el péndulo mantiene una desviación constante respecto de la vertical.

Las fuerzas que actúan sobre la masa del péndulo son su peso y la fuerza que ejerce el cable (tensión).

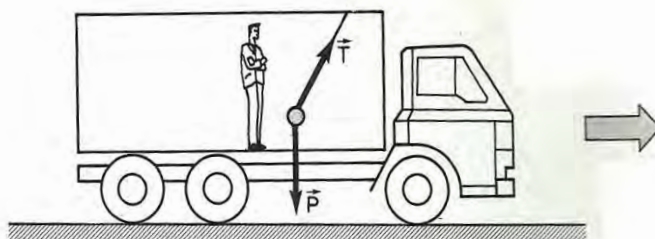


Fig. 3.2. Observador no inercial.

Un observador que se encuentre en el interior del coche vería la masa pendular en reposo. Si la primera ley de Newton fuese aplicable a este observador, la resultante de las dos fuerzas debería ser nula; y esto no es cierto, porque no se pueden anular dos fuerzas que no estén en la misma dirección. Por tanto, para este observador la ley de la inercia no es válida.

En efecto, hemos de tener en cuenta que las leyes de Newton sólo se aplican en **sistemas de referencia inerciales**, es decir, sistemas en reposo, o que evolucionan con movimiento rectilíneo uniforme respecto de un sistema que se supone en reposo absoluto. Tal sistema de referencia en reposo absoluto nos es desconocido; pero, de hecho, la primera ley de Newton es una definición del sistema inercial: aquel en el que se cumple dicha ley.

El estado de reposo y el de movimiento rectilíneo uniforme son las dos únicas situaciones en las que la aceleración es nula; por esto, podemos tomar como norma general la siguiente: consideramos **sistema inercial** el sistema de referencia que no tiene aceleración; y **sistema no inercial** el que presenta aceleración.

Aunque los sistemas de referencia ligados a la Tierra no sean realmente inerciales debido a los movimientos de rotación del planeta, en la mayoría de los casos no se comete grave error si se consideran como inerciales.

El pasajero del coche, es, por tanto, un observador no inercial, pues avanza con aceleración respecto de un observador inercial (fijo en la Tierra). En el apartado 3.12 expondremos cómo se pueden resolver los problemas desde sistemas de referencia no inerciales.

3. Segunda ley de Newton

Conocida también como ley fundamental de la dinámica, indica cómo cambia la velocidad de una partícula en cualquier situación.

La expresión matemática de la segunda ley de Newton es: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ [3.2]

es decir, la **resultante** de las fuerzas (\vec{F}) que actúan sobre una partícula es igual a la variación de su cantidad de movimiento respecto del tiempo.

Sin embargo, la mayoría de las veces seguiremos utilizando la expresión que ya conoce el estudiante:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad [3.3]$$

que no es más que un caso particular de la anterior. En efecto, si derivamos la [3.2], resulta:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

como trataremos generalmente casos en los que la masa es constante, la variación de la masa respecto del tiempo (dm/dt) es nula. Por consiguiente, cuando la masa es constante,

$$\vec{F} = 0 \cdot \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

Debe hacerse hincapié en que la ecuación [3.3] sólo se aplica cuando la masa es constante. Por tanto, no podemos aplicarla en casos como los siguientes:

cohetes autopropulsados que pierden masa a medida que ascienden, debido al combustible que consumen; vagones descubiertos en días de lluvia que van aumentando su masa a medida que pasa el tiempo.

Por último, recordamos que esta ley es válida sólo si se aplica en sistemas de referencia inerciales.

4. Comentarios a la segunda ley de Newton

A) Carácter vectorial

Al igual que cualquier vector, los vectores aceleración y fuerza resultante pueden expresarse en función de sus componentes cartesianas:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z ; \quad \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

De acuerdo con la ecuación fundamental de la Dinámica [3.3],

$$\vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x \quad \vec{F}_y = m \cdot \vec{a}_y \quad \vec{F}_z = m \cdot \vec{a}_z$$

Las componentes de la fuerza resultante, \vec{F}_x , \vec{F}_y y \vec{F}_z , son la fuerza resultante en cada eje. Por tanto, la aplicación de la ecuación fundamental de la Dinámica puede realizarse eje por eje, aisladamente.

B) Peso de un cuerpo

El peso de un cuerpo, en un punto cualquiera de un planeta, es la fuerza con que el planeta atrae al cuerpo en dicho lugar. Si un cuerpo se abandona en el vacío, la única fuerza que actúa sobre él es su peso, lo que da lugar a un movimiento con aceleración constante. Si dicha aceleración se representa por \vec{g} , la ecuación fundamental de la Dinámica nos permite escribir para el peso:

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad [3.4]$$

Dado que el peso es una fuerza, su unidad en el Sistema Internacional es el newton (N). El kilogramo-fuerza es una unidad de fuerza que no pertenece al Sistema Internacional. Su equivalencia en newtons se puede deducir teniendo en cuenta que el kilogramo-fuerza (kgf) es la fuerza con que la Tierra atrae un kilogramo al nivel del mar y a 45° de latitud (donde la aceleración de la gravedad es 9,8 m/s²). Por tanto,

$$1 \text{ kgf} = 1 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 9,8 \text{ N}$$

Si empujamos el cuerpo hacia la derecha con una fuerza paralela al suelo \vec{F} , el diagrama de fuerzas es el de la figura 3.7. Para estudiar el movimiento del cuerpo, no tenemos por qué dibujar la fuerza que ejerce el cuerpo sobre la mano.

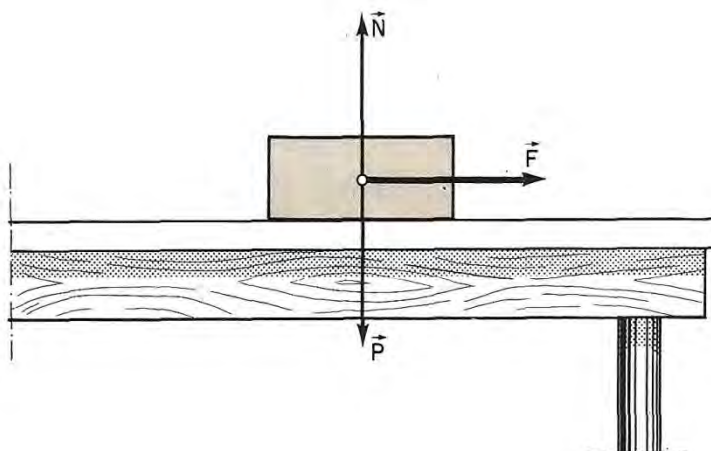


Fig. 3.7.

Actividad

Comprobación del principio de acción y reacción

Cuando salta el tapón de una botella, los gases, al dilatarse, empujan la botella hacia abajo con la misma fuerza con que lanzan al aire el tapón. Un cañón, al disparar, retrocede por la misma causa.

Con una botella y una balanza de cocina (o báscula de baño) podemos comprobar esta fuerza de reacción: poner unos 30 cm^3 de vinagre en la botella y añadir agua hasta alcanzar los dos tercios de la misma; tomar un trozo de papel (media cuartilla) y con él envolver una cucharada de bicarbonato. Poner la botella en la balanza, introducir el cartucho de papel (que contiene el bicarbonato) y tapar la botella. Observar la balanza: comprobar que indica una fuerza mayor que el peso cuando salta el tapón.

¿Por qué la velocidad del tapón y de la botella son tan diferentes, si la fuerza entre ambos es de igual magnitud?

6. Aplicación sistemática de las leyes de Newton

La resolución de problemas de dinámica del punto puede abordarse siguiendo el método sistemático que exponemos a continuación:

- 1.º ¿Cuáles son las fuerzas que actúan sobre la partícula? Dibujarlas (diagrama de fuerzas).
- 2.º ¿Cuál es el valor de cada una de ellas?
- 3.º Elegir un sistema de coordenadas en el que la resultante se encuentre en uno de los ejes. Descomponer todas las fuerzas sobre dichos ejes.
- 4.º Aplicar la segunda ley de Newton, eje por eje.

Ejercicio 1

¿Qué fuerza vertical hacia arriba aplicamos a un cuerpo de 2 kg que asciende con una aceleración de 1 m/s²? (Despreciar el rozamiento con el aire. Inicialmente el cuerpo estaba en reposo.)

SOLUCIÓN

Sea \vec{F} la fuerza solicitada. Una forma **incorrecta** de resolver este problema es,

$$|\vec{F}| = m \cdot |\vec{a}| = 2 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2 = 2 \text{ N}$$

Es fácil comprender que este resultado no es correcto, ya que el peso del cuerpo es, $|\vec{P}| = m \cdot |\vec{g}| = 2 \cdot 9,8 = 19,6 \text{ N}$, y la fuerza vertical que lo haría subir ¡sería menor que su peso!

Para resolver correctamente el problema aplicaremos el método sistemático: hay que tener en cuenta **todas** las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, es decir, además de la que hay que calcular (\vec{F}) debe tenerse presente que también actúa el peso (\vec{P} , fuerza ejercida por el planeta Tierra, fig. 3.8). Por tanto,

$$\vec{F} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$$

en módulos,

$$|\vec{F}| - |\vec{P}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$|\vec{F}| = m \cdot |\vec{a}| + |\vec{P}| = 2 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2 + 19,6 \text{ N} = 21,6 \text{ N}$$

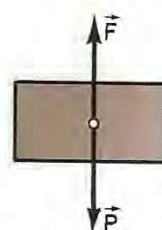


Fig. 3.8.

Nota. La fuerza de lanzamiento.

Una vez fijada cuál es la partícula objeto de estudio debemos interesarnos por conocer cuáles son las fuerzas que actúan sobre ella. Ahora bien, en la primera etapa de la resolución no nos ocupamos de sus valores (módulos), sino sólo de conocer **todas** las fuerzas que se aplican sobre el punto material, lo que —en especial para el principiante— no siempre resulta fácil, pues, o bien se olvida de alguna (como se ha indicado en el problema anterior), o bien considera otras que no existen en la realidad.

Como aplicación, consideremos las fuerzas que actúan sobre un objeto (pelota, piedra, proyectil, etc.) lanzado en tiro oblicuo. En pleno «vuelo», y si no consideramos el rozamiento con el aire, la única fuerza que actúa es el peso (fig. 3.9). Algunos estudiantes pueden dibujar una fuerza adicional «de lanzamiento» (fig. 3.10); sin embargo, como las fuerzas son debidas a algún agente, la «fuerza de lanzamiento» no puede ser considerada, pues, ¿qué agente la ejerce? Al objeto se le proporcionó una velocidad inicial, pero una vez que sale del punto de lanzamiento ya no se aplica ninguna «fuerza de lanzamiento» (¡salvo si el móvil es autopropulsado!).

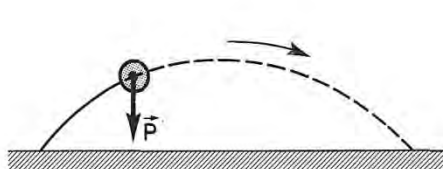


Fig. 3.9. Tiro oblicuo.

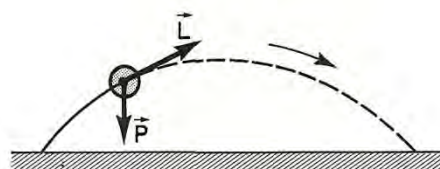


Fig. 3.10. ¿Quién ejerce la fuerza \vec{L} ?

Otro aspecto que hemos de considerar es: que siendo la única fuerza que actúa vertical y hacia abajo, sin embargo, la trayectoria es parabólica, no vertical. No se debe confundir la dirección de la fuerza resultante (y, por tanto, del vector aceleración), con la del vector velocidad (que es tangente a la trayectoria). Debe resaltarse lo que significa que la aceleración es el cambio del vector velocidad, y su repercusión en la trayectoria, la cual viene determinada por las condiciones iniciales (vector velocidad inicial): si la velocidad inicial \vec{v}_0 no es paralela a la aceleración \vec{a} , el movimiento resultante es parabólico; si \vec{v}_0 y \vec{a} son paralelas, la trayectoria es rectilínea.

Ejercicio 2

Dibujar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo:

- cuando baja deslizando por un plano inclinado (sin rozamiento);
- cuando sube por dicho plano inclinado, al ser lanzado hacia arriba;
- el caso a) considerando el rozamiento;
- el caso b) considerando el rozamiento.

SOLUCIÓN

El cuerpo interactúa con la Tierra, que ejerce sobre él la fuerza peso (\vec{P}), y con el suelo, que reacciona con una fuerza perpendicular de contacto (\vec{N}) y, si se tiene en cuenta, con la fuerza de rozamiento (\vec{F}_R) que se opone al movimiento.

En los casos a) y b), las fuerzas están representadas en la figura 3.11. Para los casos c) y d), en las figuras 3.12 y 3.13, respectivamente.

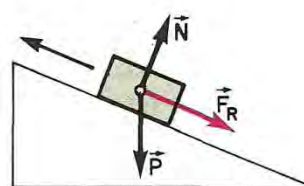
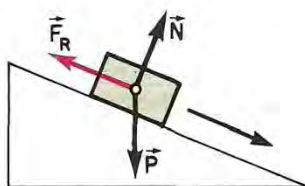
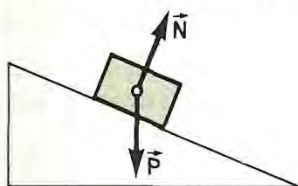


Fig. 3.11. Cuerpo que desliza sin rozamiento. Fig. 3.12. Baja con rozamiento. Fig. 3.13. Sube con rozamiento.

Ejercicio 3*

Una persona de 70 kg se encuentra sobre una báscula de baño en el interior de un ascensor. Calcular la indicación de la báscula en cada uno de los siguientes casos:

- si el ascensor está en reposo;
- cuando el ascensor arranca hacia arriba con aceleración de 1 m/s^2 ;
- cuando el ascensor sube con velocidad constante de 5 m/s ;
- cuando se acerca al piso en el que para, si la aceleración con la que se detiene es de 1 m/s^2 ;
- si se rompe el cable y falla el freno de emergencia.

SOLUCIÓN

Las fuerzas que actúan sobre la persona son:

— el peso, \vec{P} ; — la ejercida por la báscula, \vec{B} .

La indicación de la báscula es la fuerza de reacción del instrumento e igual a la fuerza de acción que el pasajero ejerce sobre ella en cada caso.

El valor del peso de la persona es, en todos los casos, $|\vec{P}| = 70 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 686 \text{ N}$; según la figura 3.14, $\vec{P} = -686\vec{j}$.

Por tanto, la resultante de las fuerzas \vec{F} será: $\vec{F} = \vec{B} + \vec{P}$

es decir, $\vec{B} = \vec{F} - \vec{P}$; puesto que $\vec{F} = m\vec{a}$,

$$\vec{B} = 70 \cdot \vec{a} - (-686\vec{j}) = 70\vec{a} + 686\vec{j}$$

Sustituyendo el valor de la aceleración en cada caso, se calcula el valor solicitado:

Caso	\vec{a}	\vec{B}	$ \vec{B} $
a)	0	$686\vec{j}$	686 N (= 70 kp)
b)	\vec{j}	$756\vec{j}$	756 N (= 77 kp)
c)	0	$686\vec{j}$	686 N (= 70 kp)
d)	$-\vec{j}$	$616\vec{j}$	616 N (= 63 kp)
e)	$-9,8\vec{j}$	0	0

Sugerimos al lector que compare estos resultados con las sensaciones que experimenta cuando se encuentra en las situaciones estudiadas.



Fig. 3.14.

Ejercicio 4

Del techo de un vehículo cuelga un péndulo. Si dicho vehículo se pone en marcha con aceleración constante, la masa m del péndulo queda separada de la vertical (fig. 3.15). Calcular el ángulo de desviación, sabiendo que cuando ha recorrido los primeros 20 m, la velocidad del vehículo es 36 km/h.

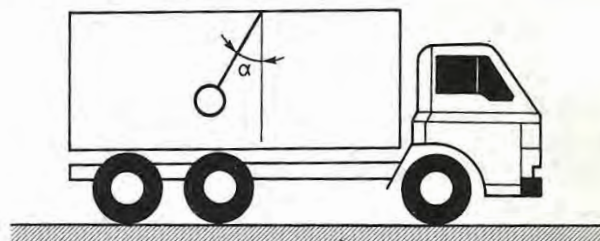


Fig. 3.15.

SOLUCIÓN

Sobre la masa m actúan dos fuerzas:

- el peso, debido a la atracción de la Tierra, cuyo valor es $|\vec{P}| = m \cdot |\vec{g}|$;
- la ejercida por la cuerda, que denominamos tensión \vec{T} , cuyo valor no conocemos.

El movimiento de dicha masa se desarrolla en el eje X , describiendo una trayectoria rectilínea. Tomamos los ejes de la figura 3.16. Si descomponemos la fuerza \vec{T} (fig. 3.17) los valores de las componentes pueden obtenerse por trigonometría:

$$|\vec{T}_x| = |\vec{T}| \cdot \sin \alpha \quad ; \quad |\vec{T}_y| = |\vec{T}| \cdot \cos \alpha$$

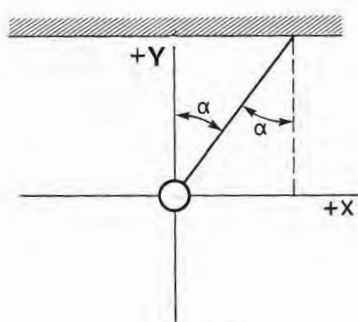


Fig. 3.16.

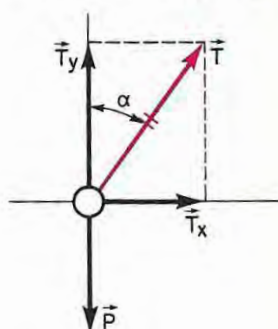


Fig. 3.17.

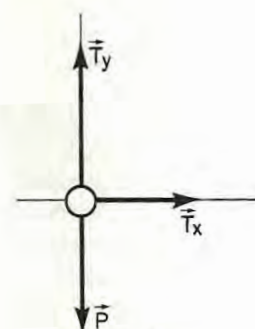


Fig. 3.18.

En la figura 3.18 representamos el resultado de la descomposición. Aplicamos la segunda ley de Newton eje a eje:

$$\text{eje } x: |\vec{F}_x| = m \cdot |\vec{a}|, \text{ es decir, } |\vec{T}| \cdot \sin \alpha = m \cdot |\vec{a}|$$

$$\text{eje } y: |\vec{F}_y| = m \cdot |\vec{a}|, \text{ es decir, } |\vec{T}| \cdot \cos \alpha = m \cdot |\vec{g}|$$

Dividamos estas dos ecuaciones,

$$\frac{|\vec{T}| \sin \alpha}{|\vec{T}| \cos \alpha} = \frac{m \cdot |\vec{a}|}{m \cdot |\vec{g}|}$$

$$\text{de donde } \tan \alpha = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{g}|}, \text{ es decir, } \alpha = \arctan\left(\frac{|\vec{a}|}{|\vec{g}|}\right).$$

Observar que el valor del ángulo sólo depende de la aceleración; no depende ni de la masa ni de la longitud del péndulo. Como es un movimiento rectilíneo uniformemente variado, podemos calcular el valor de la aceleración mediante la ecuación $v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x$

$$v = \frac{36 \text{ km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad ; \quad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot \Delta x} = \frac{(10^2 - 0) \text{ m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 20 \text{ m}} = 2,5 \text{ m/s}^2$$

con lo que podemos calcular el valor del ángulo $\alpha = 14^\circ$

Ejercicio 5

Un cuerpo de 20 kg se suelta en una rampa cuya inclinación es de 37° . Calcular la velocidad que tiene en el instante que recorre el primer metro desde que se soltó. Considerar despreciable el rozamiento.

SOLUCIÓN

Primeramente aplicamos las leyes de Newton para calcular la aceleración con que desciende el cuerpo; y con las ecuaciones de la cinemática calcularemos la velocidad.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son (fig. 3.19):

peso \vec{P} ;

la reacción perpendicular de contacto con el suelo \vec{N} («normal»).

No hay ninguna otra fuerza, pues despreciamos los rozamientos.

El módulo del peso es $|\vec{P}| = m \cdot |\vec{g}| = 20 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 196 \text{ N}$; mientras que el de la fuerza \vec{N} no lo conocemos.

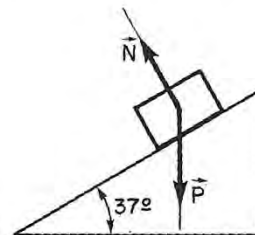


Fig. 3.19. Cuerpo que desliza por un plano inclinado sin rozamiento.

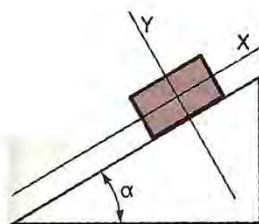


Fig. 3.20. Sistema de coordenadas.

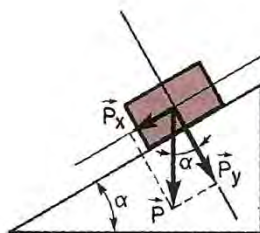


Fig. 3.21. Descomposición del peso.

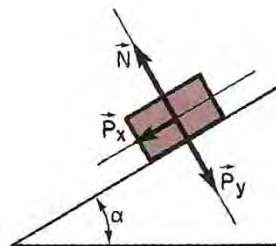


Fig. 3.22. Representación de las tres fuerzas.

En estos problemas elegimos como sistema de referencia el de las coordenadas que figuran en 3.20. Por tanto, el movimiento tiene lugar en el eje X.

Atendiendo a dicha figura, es conveniente descomponer el vector peso. Según muestra la figura 3.21 tenemos:

$$|\vec{P}_x| = |\vec{P}| \cdot \sin \alpha = m \cdot |\vec{g}| \cdot \sin \alpha \quad ; \quad |\vec{P}_y| = |\vec{P}| \cdot \cos \alpha = m \cdot |\vec{g}| \cdot \cos \alpha$$

por tanto, la descomposición de fuerzas nos permite representar las tres fuerzas de la figura 3.22.

Por la segunda ley de Newton, en el eje X, se cumple:

$$|\vec{P}_x| = |\vec{F}_x| = m \cdot |\vec{a}| = m \cdot |\vec{g}| \cdot \sin \alpha$$

y, en definitiva,

$$|\vec{a}| = |\vec{g}| \cdot \sin \alpha$$

Según esto, la aceleración con que desliza un cuerpo por un plano inclinado, sin rozamiento, sólo depende de la inclinación de la rampa. En nuestro caso el valor de la aceleración es:

$$|\vec{a}| = 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 0,6 = 5,9 \text{ m/s}^2$$

Por tratarse de un movimiento con aceleración constante y trayectoria rectilínea:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x} = \sqrt{0^2 + 2 \cdot 5,9 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m}} = 3,4 \text{ m/s}$$

7. Fuerza de rozamiento

Cuando un cuerpo se desliza o tiende a deslizarse sobre otro está sometido a una fuerza que se opone al movimiento: es la fuerza de rozamiento.

Existen dos tipos de rozamiento: el rozamiento por deslizamiento y el rozamiento por rodadura. Este último es el que experimentan los cuerpos cuando ruedan uno sobre otro; su valor es mucho menor al de deslizamiento. En este capítulo sólo nos ocuparemos del rozamiento por deslizamiento entre sólidos.

Si se trata de rozamiento con deslizamiento, hablamos del **rozamiento dinámico**, el cual se opone a que continúe el movimiento que se observa.

Cuando en un objeto que se encuentra en reposo sobre el suelo ejercemos una fuerza paralela al suelo sin conseguir que se mueva, es porque actúa una fuerza de rozamiento entre el suelo y el cuerpo, que se opone a que se inicie el movimiento: es la **fuerza de rozamiento estático**.

Hay muchos ejemplos en los que se pone de manifiesto la importancia de las fuerzas de rozamiento. Si entre el suelo y la suela de los zapatos no existieran estas fuerzas, resbalaríamos y sería imposible andar, como ocurre cuando intentamos caminar sobre el hielo. En cambio, hay casos en los que interesa reducir su magnitud, como sucede en las máquinas, en las que se utilizan aceites y grasas (lubricantes) para reducir la intensidad de los rozamientos que disminuyen el rendimiento.

Como toda magnitud vectorial, la fuerza de rozamiento se caracteriza por su módulo, dirección y sentido. La dirección es paralela a las superficies en contacto. Su sentido es el opuesto al movimiento. En cuanto al módulo, se deben diferenciar los rozamientos dinámico y estático.

A) Rozamiento dinámico

El estudio experimental pone de manifiesto que la fuerza de rozamiento es proporcional a la fuerza perpendicular de contacto entre los cuerpos que deslizan y depende de la naturaleza de las superficies en contacto. Sin embargo, es prácticamente independiente del área de contacto y de la velocidad de deslizamiento. En resumen, el módulo de la fuerza de rozamiento dinámico viene dado por la expresión:

$$|\vec{F}_R| = \mu \cdot |\vec{N}| \quad [3.5]$$

en la que $|\vec{N}|$ representa el módulo de la fuerza perpendicular de contacto entre las superficies, mientras que con la letra griega μ simbolizamos el **coeficiente de rozamiento dinámico** (o, simplemente, coeficiente de rozamiento) que es un número (sin unidades) cuyo valor depende de la naturaleza de las superficies en contacto, así como del estado de las mismas (más o menos pulimentadas). La utilización de lubricantes da lugar a valores de μ más pequeños y, por tanto, a fuerzas de rozamiento menores.

A título orientativo señalaremos que el valor de μ entre superficies de acero es del orden de 0,4, mientras que entre superficies de madera pulimentada gira en torno al 0,3; entre superficies engrasadas, el menor valor del coeficiente de rozamiento es del orden de 0,03.

Ejercicio 6*

Sobre un suelo horizontal se dispara un cuerpo con la velocidad de 6 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el suelo es 0,20, calcular el tiempo que tarda en detenerse.

SOLUCIÓN

En la figura 3.23 hemos dibujado las tres fuerzas que actúan sobre el cuerpo, así como el sistema de coordenadas elegido.

Como en el eje vertical la aceleración es nula (no hay movimiento), podemos calcular el módulo de la fuerza de rozamiento, pues

$$|\vec{N}| = |\vec{P}|$$

$$|\vec{F}_R| = \mu \cdot |\vec{N}| = \mu \cdot m \cdot |\vec{g}|$$

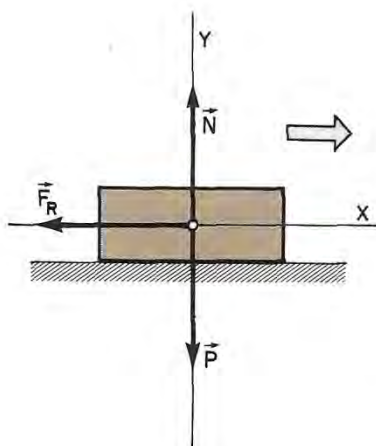


Fig. 3.23.

La aplicación de la segunda ley de Newton en el eje X permite escribir:

$$|\vec{F}_x| = |\vec{F}_R| = \mu \cdot m \cdot |\vec{g}| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$|\vec{a}| = \mu \cdot |\vec{g}| = 0,20 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 2,0 \text{ m/s}^2$$

Si se desea el estudio vectorial, $\vec{F}_x = \vec{F}_R = m \cdot \vec{a} = -\mu \cdot m \cdot |\vec{g}| \cdot \vec{i}$

$$\vec{a} = -\mu |\vec{g}| \vec{i} = -2,0 \vec{i}$$

Puesto que la aceleración es constante y la trayectoria rectilínea:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{(0 - 6) \text{ m/s}}{-2,0 \text{ m/s}^2} = 3 \text{ s}$$

Ejercicio 7

Sobre un cuerpo de 20 kg se ejerce, mediante una cuerda, una fuerza de 100 N cuya dirección forma un ángulo de 37° con la horizontal. Calcular la fuerza de rozamiento y la aceleración con que se arrastra el cuerpo, si el coeficiente de rozamiento es 0,20.

SOLUCIÓN

Deducimos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo estudiando los agentes que interaccionan con él:

- la Tierra: fuerza peso, \vec{P} ;
- la cuerda: tensión, \vec{T} ;
- el suelo: la fuerza de contacto \vec{N} y la de rozamiento \vec{F}_R .

Tanto las fuerzas como el sistema de coordenadas elegido se representan en la figura 3.24.

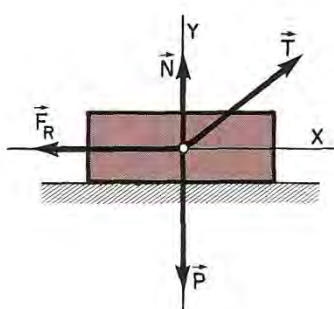


Fig. 3.24.

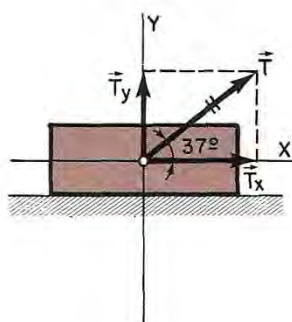


Fig. 3.25.

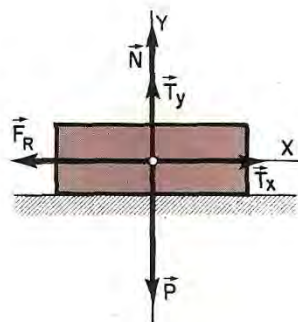


Fig. 3.26.

Si descomponemos la tensión sobre los ejes coordenados (fig. 3.25) se obtiene:

$$\begin{aligned} |\vec{T}_x| &= |\vec{T}| \cdot \cos 37^\circ = 100 \text{ N} \cdot 0,8 = 80 \text{ N} \\ |\vec{T}_y| &= |\vec{T}| \cdot \sin 37^\circ = 100 \text{ N} \cdot 0,6 = 60 \text{ N} \end{aligned}$$

Estas componentes, junto con las demás fuerzas, están dibujadas en la figura 3.26. En el eje Y la resultante es nula (no hay movimiento) por tanto:

$$\begin{aligned} |\vec{N}| + |\vec{T}_y| &= |\vec{P}| = m \cdot |\vec{g}| = 20 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 196 \text{ N} \\ |\vec{N}| &= |\vec{P}| - |\vec{T}_y| = 196 \text{ N} - 60 \text{ N} = 136 \text{ N} \end{aligned}$$

es decir, a diferencia del ejercicio anterior, la fuerza normal (perpendicular) de contacto entre el suelo y el cuerpo **no es igual al peso**, sino menor.

La fuerza de rozamiento es:

$$|\vec{F}_R| = \mu \cdot |\vec{N}| = 0,2 \cdot 136 \text{ N} = 27,2 \text{ N}$$

En el eje X,

$$|\vec{F}_x| = |\vec{T}_x| - |\vec{F}_R| = 80 \text{ N} - 27,2 \text{ N} = 52,8 \text{ N}$$

y la aceleración,

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}_x|}{m} = \frac{52,8 \text{ N}}{20 \text{ kg}} = 2,6 \text{ m/s}^2$$

Ejercicio 8

Un cuerpo de 20 kg se encuentra sobre un plano inclinado 37° , con un coeficiente de rozamiento de 0,20. Sobre dicho cuerpo ejercemos una fuerza horizontal de 300 N y el cuerpo asciende por la rampa. Calcular el tiempo que tarda en recorrer 3 m desde que empieza a subir.

SOLUCIÓN

En la figura 3.27 se indican las fuerzas que se aplican al cuerpo, y el sistema de coordenadas elegido. Descomponemos sobre los ejes los vectores peso y la fuerza horizontal \vec{M} (fig. 3.28):

$$\begin{aligned} |\vec{M}_x| &= |\vec{M}| \cdot \cos 37^\circ = 240 \text{ N} & |\vec{M}_y| &= |\vec{M}| \cdot \sin 37^\circ = 180 \text{ N} \\ |\vec{P}_x| &= |\vec{P}| \cdot \sin 37^\circ = 117,6 \text{ N} & |\vec{P}_y| &= |\vec{P}| \cdot \cos 37^\circ = 156,8 \text{ N} \end{aligned}$$

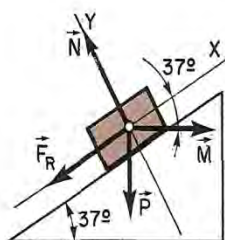


Fig. 3.27.

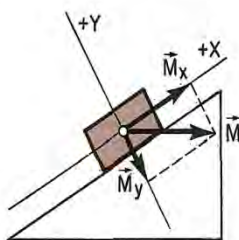


Fig. 3.28.

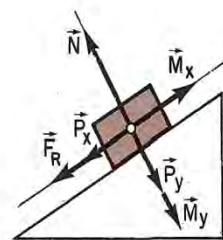


Fig. 3.29.

Si aplicamos la segunda ley de Newton a cada eje de la figura 3.29 tenemos:

$$\text{eje Y: } |\vec{N}| = |\vec{P}_y| + |\vec{M}_y| = 156,8 \text{ N} + 180 \text{ N} = 336,8 \text{ N}$$

$$\text{eje X: } |\vec{M}_x| - |\vec{P}_x| - |\vec{F}_R| = m \cdot |\vec{a}|$$

$$|\vec{F}_R| = \mu \cdot |\vec{N}| = 0,20 \cdot 336,8 \text{ N} = 67,4 \text{ N}$$

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{M}_x| - |\vec{P}_x| - |\vec{F}_R|}{m} = \frac{(240 - 117,6 - 67,4) \text{ N}}{20 \text{ kg}} = 2,7 \text{ m/s}^2$$

Puesto que se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente variado, con velocidad inicial nula,

$$\Delta x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \text{ m}}{2,7 \text{ m/s}^2}} = \sqrt{2,22 \text{ s}^2} = 1,5 \text{ s}$$

B) Rozamiento estático

Puede parecer contradictoria la idea de fuerza de rozamiento si no hay movimiento, es decir, en una situación estática. Para comprender su existencia consideremos el arrastre de un cuerpo por el suelo; si la fuerza aplicada \vec{F} no consigue poner en movimiento el cuerpo es porque hay alguna fuerza que anula la que ejercemos nosotros (fig. 3.30); es decir, aparece una fuerza de rozamiento estático \vec{F}_{RE} .

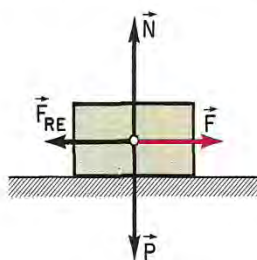


Fig. 3.30.

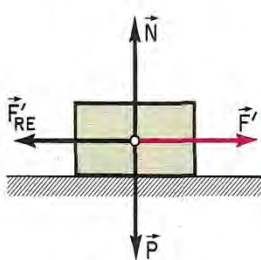


Fig. 3.31.

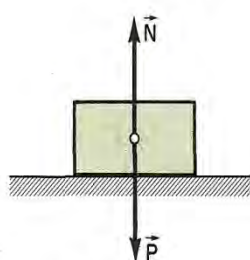


Fig. 3.32.

Si aumentamos la intensidad de la fuerza aplicada (fig. 3.31) sin lograr mover el cuerpo, es porque ahora la fuerza de rozamiento estático \vec{F}'_{RE} contrarresta la acción de \vec{F}' ; es decir, la fuerza de rozamiento estático es ahora mayor que la anterior.

Estos ejemplos ponen de manifiesto que la fuerza de rozamiento estático no tiene un valor determinado, sino que depende de la fuerza aplicada al cuerpo. No obstante, si seguimos aumentando la intensidad de la fuerza, llegará un momento en que la fuerza de rozamiento estático alcance su valor máximo \vec{F}_{REM} : a partir de ese instante, si la fuerza que aplicamos al cuerpo aumenta, dicho cuerpo se pondrá en movimiento y, a partir de ahí, el rozamiento es dinámico.

En resumen, la fuerza de rozamiento estático puede adquirir un valor cualquiera entre cero (fig. 3.32) y el valor máximo. Este valor límite depende de las superficies en contacto y de la fuerza perpendicular de contacto entre ellas:

$$|\vec{F}_{REM}| = \mu_E \cdot |\vec{N}| \quad [3.6]$$

El coeficiente de rozamiento estático μ_E es mayor que el coeficiente de rozamiento dinámico entre las mismas superficies. Por consiguiente, la fuerza de rozamiento estático máximo es mayor que la fuerza de rozamiento dinámico. Todos hemos constatado este hecho, por ejemplo, cuando deseamos arrastrar un cuerpo pesado: debemos realizar más fuerza para ponerlo en movimiento —es decir, para vencer el rozamiento estático—, que para mantenerlo después en movimiento venciendo el rozamiento dinámico.

Ejercicio 9

Un cuerpo de 20 kg se encuentra sobre una superficie horizontal en la que los coeficientes de rozamiento estático y dinámico tienen los valores 0,40 y 0,20, respectivamente. Calcular:

- ¿cuánto vale la fuerza de rozamiento?;
- ¿y si se aplica una fuerza horizontal de 60 N?;
- ¿cuál es la fuerza mínima que se precisa para iniciar el movimiento?;
- ¿cuál es la fuerza mínima necesaria para mantener el movimiento una vez iniciado éste?;
- si se le aplica una fuerza horizontal de 100 N, ¿cuál es el valor de la fuerza de rozamiento?; describir el movimiento que se origina.

SOLUCIÓN

- Si el bloque está en reposo y no actúa ninguna fuerza horizontal, no habrá fuerza de rozamiento.
- La fuerza máxima de rozamiento estático se calcula por la ecuación [3.6]:

$$|\vec{F}_{REM}| = \mu_E \cdot |\vec{N}| = 0,4 \cdot m \cdot |\vec{g}| = 0,4 \cdot 20 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 78,4 \text{ N}$$

Si la fuerza aplicada es de 60 N, el cuerpo no se moverá; luego dicha fuerza es anulada por otra fuerza de rozamiento estático de igual magnitud (fig. 3.30). Por consiguiente, en esta situación $|\vec{F}_{RE}| = 60 \text{ N}$.

- De acuerdo con el cálculo del apartado b), la fuerza mínima para iniciar el movimiento es de 78,4 N.
- Cuando el cuerpo se mueve, la fuerza de rozamiento es:

$$|\vec{F}_R| = \mu \cdot |\vec{N}| = 0,2 \cdot 196 \text{ N} = 39,2 \text{ N}$$

por tanto, si se aplica una fuerza horizontal de 39,2 N la resultante será nula y el cuerpo avanza con velocidad constante.

- Como la fuerza \vec{F} es mayor que la fuerza de rozamiento estático máxima, el cuerpo avanza y la fuerza de rozamiento es F_R . De la figura 3.33 se deduce:

$$\begin{aligned} |\vec{F}| - |\vec{F}_R| &= m \cdot |\vec{a}| \\ 100 \text{ N} - 39,2 \text{ N} &= 20 \text{ kg} \cdot |\vec{a}| \\ |\vec{a}| &= 3,0 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Por tanto, se obtiene un movimiento rectilíneo uniformemente variado.

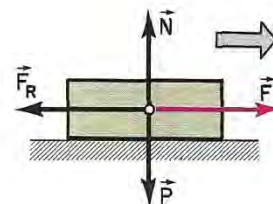


Fig. 3.33.

Ejercicio 10*

Un cuerpo se encuentra sobre una superficie horizontal. Dicha superficie se va levantando lentamente por uno de sus extremos hasta el momento en que el cuerpo comienza a deslizarse. Si en ese instante el ángulo es de 15° , calcular:

- el coeficiente de rozamiento estático;
- el coeficiente de rozamiento dinámico, si tarda 4 s en recorrer los dos primeros metros.

SOLUCIÓN

- En la figura 3.34 se representan las fuerzas en el instante a partir del cual se inicia el movimiento. Descomponemos el peso respecto de los ejes elegidos (fig. 3.35) y tenemos:

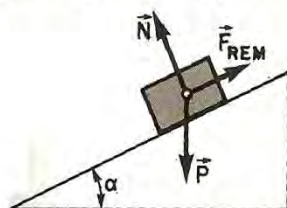


Fig. 3.34.

$$|\vec{P}_x| = |\vec{P}| \cdot \sin 15^\circ = m \cdot |\vec{g}| \cdot \sin 15^\circ$$

$$|\vec{P}_y| = |\vec{P}| \cdot \cos 15^\circ = m \cdot |\vec{g}| \cdot \cos 15^\circ$$

La fuerza normal de contacto cuerpo-suelo es

$$|\vec{N}| = |\vec{P}_y| = m \cdot |\vec{g}| \cdot \cos 15^\circ$$

por tanto, podemos calcular la fuerza máxima de rozamiento estático,

$$|\vec{F}_{REM}| = \mu_E \cdot |\vec{N}| = \mu_E \cdot m \cdot |\vec{g}| \cdot \cos 15^\circ$$

Como en este instante la resultante en el eje X es nula, $|\vec{F}_{REM}| = |\vec{P}_x|$; por tanto, de la figura 3.36 se deduce:

$$\mu_E \cdot m \cdot |\vec{g}| \cdot \cos 15^\circ = m \cdot |\vec{g}| \cdot \sin 15^\circ$$

$$\mu_E = \sin 15^\circ / \cos 15^\circ = \tan 15^\circ = 0,27$$

- Una vez iniciado el movimiento de descenso, el diagrama de fuerzas es el de la figura 3.36, pero la fuerza de rozamiento es ahora la correspondiente al rozamiento dinámico,

$$|\vec{F}_R| = \mu \cdot |\vec{N}| = \mu \cdot m \cdot |\vec{g}| \cdot \cos 15^\circ$$

En el eje X podemos escribir, $|\vec{P}_x| - |\vec{F}_R| = m \cdot |\vec{a}|$

$$m \cdot |\vec{g}| \cdot \sin 15^\circ - \mu \cdot m \cdot |\vec{g}| \cdot \cos 15^\circ = m \cdot |\vec{a}|$$

$$\mu = \frac{|\vec{g}| \cdot \sin 15^\circ - |\vec{a}|}{|\vec{g}| \cdot \cos 15^\circ}$$

Como es un movimiento uniformemente variado, podemos calcular el valor de la aceleración y, posteriormente, el del coeficiente de rozamiento dinámico:

$$a = \frac{2 \cdot \Delta x}{t^2} = \frac{2 \cdot 2 \text{ m}}{(4 \text{ s})^2} = 0,25 \text{ m/s}^2$$

$$\mu = \frac{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 0,26 - 0,25 \text{ m/s}^2}{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 0,97} = 0,24$$

8. Masas enlazadas

Es frecuente que se planteen situaciones en las que dos o más cuerpos están unidos mediante hilos (cables o cuerdas) que se consideran inextensibles y de masa despreciable.

En la figura 3.37 dos cuerpos unidos por una cuerda están sobre un suelo horizontal (sin rozamiento para facilitar la discusión).

Al bloque *A* se le aplica una fuerza paralela al suelo \vec{F} . Las fuerzas que actúan en el eje *X* son las dibujadas en la figura 3.38.

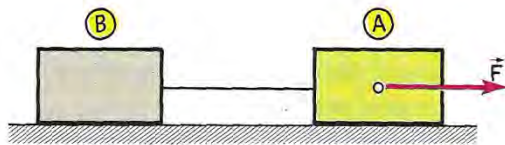


Fig. 3.37.

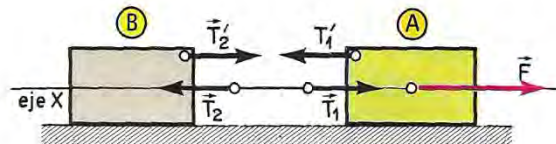


Fig. 3.38.

El bloque *A* ejerce una fuerza \vec{T}_1 sobre la cuerda, y ésta reacciona con otra fuerza de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario (\vec{T}_1'). La cuerda, a su vez, transmite una fuerza sobre el bloque *B* (\vec{T}_2) el cual «devuelve» a la cuerda otra fuerza igual, pero de sentido contrario (\vec{T}_2').

Para facilitar la visualización de esta situación, las fuerzas \vec{T}_2' y \vec{T}_1' se han dibujado por encima del eje *X*.

Si aplicamos la segunda ley de Newton a la cuerda tendremos:

$$\vec{T}_1 - \vec{T}_2 = m_c \cdot \vec{a}$$

Puesto que la masa de la cuerda (m_c) es despreciable, $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$; por tanto, las cuerdas transmiten fuerzas, siendo la tensión la misma (en módulo) en sus dos extremos.

Ejercicio 11

Sea el sistema de la figura 3.39. Del primer bloque A se tira con una fuerza \vec{F} de 200 N que forma un ángulo de 37° con la horizontal. La masa de cada cuerpo es 20 kg y el coeficiente de rozamiento dinámico 0,1.

Calcular la tensión del cable que mantiene unidos los dos cuerpos.

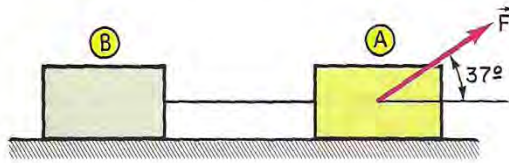


Fig. 3.39.

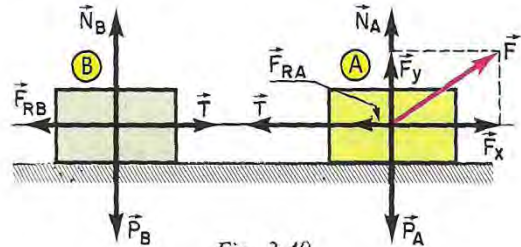


Fig. 3.40.

SOLUCIÓN

En la figura 3.40 se representan las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo. Asimismo, se presenta la descomposición de la fuerza \vec{F} .

Los valores de estas fuerzas son:

$$\begin{aligned} |\vec{P}_A| &= |\vec{P}_B| = 20 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 196 \text{ N} & |\vec{F}_x| &= 200 \text{ N} \cdot \cos 37^\circ = 200 \text{ N} \cdot 0,8 = 160 \text{ N} \\ |\vec{F}_{RA}| &= 0,1 \cdot |\vec{N}_A| \quad ; \quad |\vec{F}_{RB}| = 0,1 \cdot |\vec{N}_B| & |\vec{F}_y| &= 200 \text{ N} \cdot \sin 37^\circ = 200 \text{ N} \cdot 0,6 = 120 \text{ N} \end{aligned}$$

En el eje vertical no hay movimiento, y se cumple:

$$\begin{aligned} \text{cuerpo B: } |\vec{N}_B| &= |\vec{P}_B| = 196 \text{ N} \\ \text{cuerpo A: } |\vec{N}_A| + |\vec{F}_y| &= |\vec{P}_A| \quad ; \quad |\vec{N}_A| = 196 \text{ N} - 120 \text{ N} = 76 \text{ N} \end{aligned}$$

lo que permite calcular las fuerzas de rozamiento,

$$|\vec{F}_{RA}| = 0,1 \cdot 76 \text{ N} = 7,6 \text{ N} \quad ; \quad |\vec{F}_{RB}| = 0,1 \cdot 196 \text{ N} = 19,6 \text{ N}$$

Aplicando la segunda ley de Newton en el eje X :

$$\text{cuerpo A: } |\vec{F}_x| - |\vec{T}| - |\vec{F}_{RA}| = m_A \cdot |\vec{a}| \quad \text{cuerpo B: } |\vec{T}| - |\vec{F}_{RB}| = m_B \cdot |\vec{a}|$$

sustituyendo valores:

$$\begin{aligned} 160 \text{ N} - |\vec{T}| - 7,6 \text{ N} &= 20 \cdot |\vec{a}| & |\vec{T}| - 19,6 \text{ N} &= 20 \cdot |\vec{a}| \\ & & 6 \text{ N} \cdot & \end{aligned}$$

9. Dinámica del movimiento circular

De acuerdo con lo expuesto en cinemática, la aceleración en un movimiento circular se puede expresar como suma de dos aceleraciones: de una parte, la aceleración tangencial que va unida a la variación del módulo de la velocidad y, de otra, la aceleración normal (o centrípeta) que refleja el continuo cambio de la dirección del vector velocidad:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c \quad [2.13]$$

De acuerdo con la ecuación fundamental de la dinámica, para el movimiento circular podemos escribir

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot (\vec{a}_c + \vec{a}_t) = m \cdot \vec{a}_c + m \cdot \vec{a}_t \quad [3.7]$$

Ejercicio 14

¿Qué velocidad mínima debe llevar un ciclista para rizar un «rizo de la muerte», cuyo radio es 8 m?

SOLUCIÓN

La posición crítica corresponde al paso por la parte superior al rizo. En ese punto, como se indica en la figura 3.46, el conjunto ciclista-bicicleta está sometido a la fuerza peso y a la reacción que ejerce la superficie por donde se mueve.

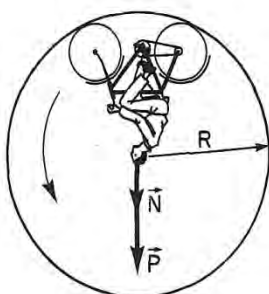


Fig. 3.46.

Si logra rizar el rizo, en esa posición la resultante de las fuerzas está dirigida hacia el centro: es la fuerza centrípeta,

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

en módulo,

$$|\vec{N}| + |\vec{P}| = m \cdot |\vec{a}| = m \cdot |\vec{a}_c| = m \cdot \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

por lo que el valor de la velocidad es

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{R}{m} \cdot (|\vec{P}| + |\vec{N}|)}$$

Los valores del radio y de la masa del conjunto y, por tanto, el peso, son cantidades determinadas por las condiciones del enunciado. Por tanto, la magnitud de la velocidad depende del valor de la fuerza que ejerce la superficie sobre la bicicleta. Como $|\vec{N}|$ no puede tener valores negativos, la velocidad mínima se tendrá cuando $|\vec{N}| = 0$. En tal caso,

$$|\vec{v}|_{\min} = \sqrt{\frac{R}{m} \cdot |\vec{P}|} = \sqrt{\frac{R}{m} \cdot m \cdot |\vec{g}|} = \sqrt{R \cdot |\vec{g}|} = 8,8 \text{ m/s } (= 32 \text{ km/h}).$$

El valor $|\vec{N}| = 0$ corresponde a una situación en la que las ruedas no ejercen fuerza alguna sobre la pista.

Ejercicio 15

Un ciclista avanza por una pista circular peraltada 20° . Su centro de gravedad describe una circunferencia de 80 m de radio. Determinar a qué velocidad debe avanzar para que la bicicleta se mantenga perpendicular al suelo. Se desprecian los rozamientos.

SOLUCIÓN

La resolución rigurosa de problemas de peraltes es más compleja que el método que seguimos aquí. No obstante, es útil resolverlos utilizando la dinámica del punto.

Cuando un ciclista avanza por una carretera horizontal recta su situación corresponde al de la figura 3.47. Si desea girar hacia un lado debe inclinarse hacia ese lado (fig. 3.48), y la resultante de las fuerzas \vec{P} y \vec{N} es la fuerza centrípeta que produce el giro.

El uso de peraltes permite al ciclista describir circunferencias manteniendo la bicicleta perpendicular al suelo de la pista (fig. 3.49). En cierto modo puede decirse que, en la pista, el ciclista obtiene la fuerza centrípeta para girar si no se inclina.

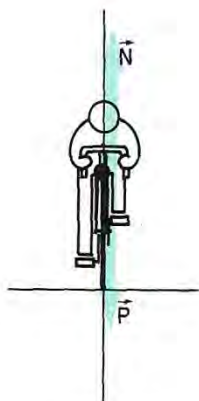


Fig. 3.47.

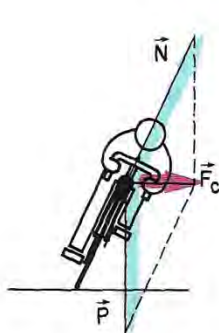


Fig. 3.48.

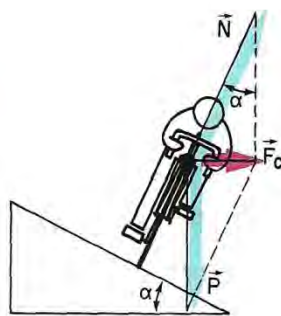


Fig. 3.49. Peralte.

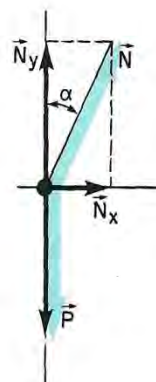


Fig. 3.50.

La figura 3.49 presenta la situación planteada en el enunciado. El sistema de coordenadas, así como la descomposición de la fuerza \vec{N} , pueden observarse en la fig. 3.50. Los valores de las componentes de \vec{N} son:

$$|\vec{N}_x| = |\vec{N}| \cdot \sin \alpha \quad |\vec{N}_y| = |\vec{N}| \cdot \cos \alpha$$

Apliquemos la segunda ley de Newton en cada eje:

$$\text{Eje Y: no hay movimiento, } |\vec{N}_y| = |\vec{P}| = m \cdot |\vec{g}|$$

$$\text{Eje X: } \vec{N}_x \text{ es la fuerza centrípeta, } |\vec{N}_x| = m \cdot |\vec{a}_c|$$

Dividiendo estas dos ecuaciones,

$$\frac{|\vec{N}_x|}{|\vec{N}_y|} = \frac{|\vec{N}| \cdot \sin \alpha}{|\vec{N}| \cdot \cos \alpha} = \frac{m \cdot |\vec{a}_c|}{m \cdot |\vec{g}|}$$

de donde,

$$\tan \alpha = \frac{|\vec{a}_c|}{|\vec{g}|} = \frac{|\vec{v}|^2}{R \cdot |\vec{g}|}$$

por tanto,

$$|\vec{v}| = \sqrt{|\vec{g}| \cdot R \cdot \tan \alpha} = \sqrt{9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 80 \text{ m} \cdot \tan 20^\circ} = 16,9 \text{ m/s} (= 61 \text{ km/h}).$$

10. Impulso mecánico. Variación y conservación de la cantidad de movimiento

Según la ecuación fundamental de la dinámica,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad [3.2]$$

podemos escribir,

$$\vec{F} \cdot dt = d\vec{p} = m \quad [3.10]$$

es decir, la variación de la velocidad que experimenta una partícula depende de la resultante de las fuerzas aplicadas y del tiempo que actúen sobre la misma. Al producto $\vec{F} \cdot dt$ se le denomina **impulso mecánico elemental**, $d\vec{I}$. Para un intervalo de tiempo finito, de un tiempo inicial (t_0) a un tiempo final (t_f), el **Impulso mecánico** que experimenta la partícula es la suma de los impulsos elementales:

$$\vec{I} = \int d\vec{I} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} \cdot dt \quad [3.11]$$

teniendo en cuenta la ecuación [3.10]

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} \cdot dt = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p}$$

lo que nos permite enunciar el teorema del impulso: «el impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento»,

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} \quad [3.12]$$

Si la resultante de las fuerzas es constante en el tiempo podemos integrar directamente la ecuación [3.11],

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} \cdot dt = \vec{F} \cdot \int_{t_0}^{t_f} dt = \vec{F} \cdot (t_f - t_0) = \vec{F} \cdot \Delta t$$

con lo que la ecuación [3.12] queda, cuando la fuerza resultante es constante,

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p} \quad [3.13]$$

Por la ecuación fundamental de la dinámica [3.2], podemos responder a la pregunta: ¿cuándo la cantidad de movimiento de una partícula se mantiene constante? Si \vec{p} se mantiene constante en el tiempo, la derivada de \vec{p} es nula. Por consiguiente, el teorema de conservación de la cantidad de movimiento de una partícula se expresa: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$; es decir: «la cantidad de movimiento de una partícula se mantiene constante si la fuerza resultante es nula».

Ejercicio 16

Una pelota de 40 g llega perpendicularmente a la pared de un frontón con velocidad de 20 m/s. Si permanece en contacto con la pared durante 0,02 s y sale rebotada en la misma dirección y sentido contrario, a 20 m/s, calcular el impulso y la fuerza media que opone la pared.

SOLUCIÓN

Por el teorema del impulso mecánico:

$$\vec{I} = \Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_0 \quad [3.12]$$

y de acuerdo con el sistema de referencia elegido (fig. 3.51),

$$\begin{aligned} \vec{p}_0 &= m \cdot \vec{v}_0 = 0,040 \cdot 20\vec{i} = 0,8\vec{i} \\ \vec{p}_f &= m \cdot \vec{v}_f = 0,040 \cdot (-20\vec{i}) = -0,8\vec{i} \end{aligned}$$

luego,

$$\vec{I} = \Delta \vec{p} = (-0,8\vec{i}) - (0,8\vec{i}) = -1,6\vec{i}$$

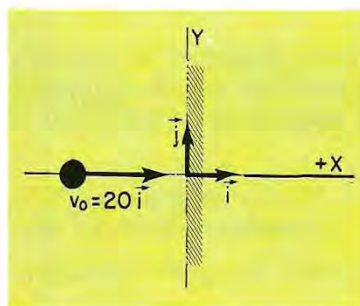


Fig. 3.51.

La fuerza media es la fuerza constante que produce el efecto observado sobre la pelota. Aplicando la ecuación [3.13] en el eje X,

$$\vec{F}_x \cdot \Delta t = \Delta \vec{p}_x \quad ; \quad \vec{F}_x = \Delta \vec{p}_x / \Delta t = (-1,6\vec{i}) / 0,02 = -80\vec{i}$$

Por consiguiente, la fuerza media ejercida por la pared es de 80 N.

Obsérvese que la cantidad de movimiento no se conserva, ¿por qué?

Ejercicio 17

Una vez disparado un proyectil, la fuerza ejercida por los gases sobre él viene dada por la expresión $|\vec{F}_g| = 800 - 2 \cdot 10^4 t$. El proyectil de 20 g sale por la boca del cañón al cabo de 0,01 s.

- Calcular el impulso ejercido sobre el proyectil.
- Realizar este cálculo utilizando la representación gráfica de la fuerza frente al tiempo.
- Calcular la velocidad del proyectil al salir del arma.

SOLUCIÓN

- a) Aplicamos la definición de impulso mecánico [3.11]:

$$|\vec{I}| = \int_{t_0}^{t_f} |\vec{F}| \cdot dt = \int_0^{0,01} (800 - 2 \cdot 10^4 t) \cdot dt = [800t - 10^4 t^2]_0^{0,01} = 7 \text{ N} \cdot \text{s}$$

- b) En la figura 3.52 se representa la fuerza frente al tiempo. Como la integral que define el impulso es equivalente al área encerrada por la gráfica, desde el tiempo inicial hasta los 0,01 s, se calcula dicha superficie (fig. 3.53). Para ello, la descomponemos en un rectángulo y un triángulo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área del rectángulo: } 600 \text{ N} \cdot 0,01 \text{ s} = 6 \text{ N} \cdot \text{s} \\ \text{Área del triángulo: } 0,5 \cdot 0,01 \text{ s} \cdot (800 - 600) \text{ N} = 1 \text{ N} \cdot \text{s} \end{array} \right\} \text{Total: } 7 \text{ N} \cdot \text{s}$$

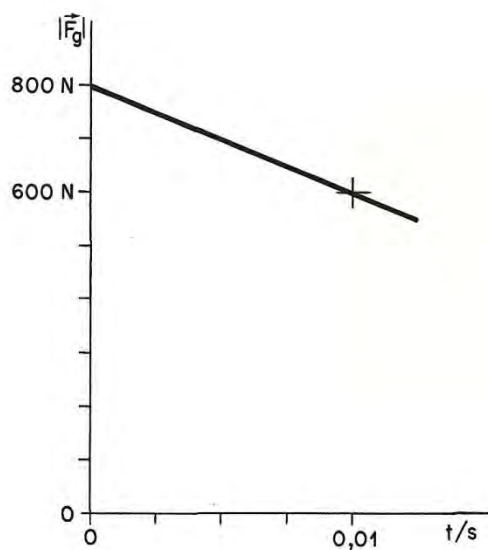


Fig. 3.52. Gráfica de $|\vec{F}_g|$ respecto de t .

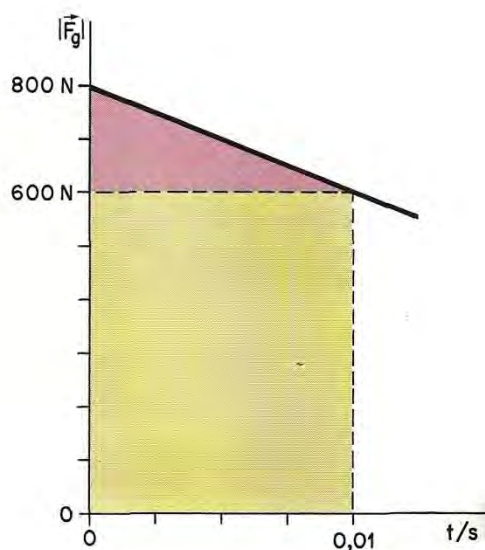


Fig. 3.53. Gráfica de $|\vec{F}_g|$ respecto de t (cálculo del área).

- c) Teniendo en cuenta el teorema del impulso,

$$\begin{aligned} |\vec{I}| &= |\Delta \vec{p}| = |m \cdot \vec{v}_f - m \cdot \vec{v}_0| \\ 7 \text{ N} \cdot \text{s} &= |0,02 \text{ kg} \cdot \vec{v}_f - 0| \end{aligned}$$

de donde la velocidad final es $|\vec{v}_f| = 350 \text{ m/s}$.

11. Sistemas de referencia. Relatividad

Sean Z y Z' dos sistemas de referencia desde los que se estudia el movimiento de una partícula cuya posición viene dada por los respectivos vectores de posición \vec{r} y \vec{r}' (fig. 3.54). Si \vec{r}_A es el vector que nos indica la posición del sistema Z' respecto del Z podemos escribir:

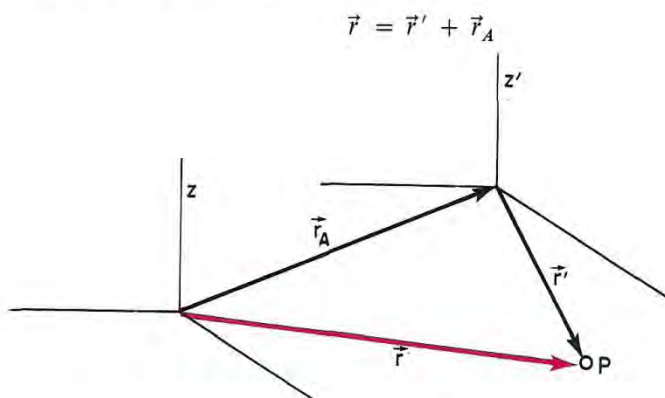


Fig. 3.54.

Si derivamos respecto del tiempo, se obtiene:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

es decir,

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_A \quad [3.14]$$

en la que:

\vec{v} es la velocidad de la partícula respecto del sistema de referencia Z ;

\vec{v}' es la velocidad de la partícula respecto de Z' , que también se llama velocidad relativa: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_A$;

\vec{v}_A es la velocidad con que evoluciona el sistema de referencia Z' , observado desde Z .

Si Z' está en reposo respecto de Z , \vec{v}_A es nula y, por tanto, $\vec{v} = \vec{v}'$; es decir, la velocidad con la que se observa la partícula será la misma para los dos observadores Z y Z' .

Si derivamos la ecuación [3.14] respecto del tiempo, se obtiene:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_A \quad [3.15]$$

En lo que sigue consideraremos que Z es inercial. Si Z' también lo es, su aceleración, \vec{a}_A , será nula y, por tanto, $\vec{a} = \vec{a}'$; es decir, la **aceleración de una partícula es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales**. Por consiguiente, dado que la aceleración de una partícula es igual en ambos sistemas, la segunda ley de Newton nos indica que la resultante también será la misma en ambos sistemas de referencia.

Imaginemos una persona que se encuentra en el interior de un barco aislado del exterior y que se eliminan posibles sacudidas y vibraciones. A este observador le «resultará imposible establecer por experiencias mecánicas si se encuentra en reposo o animado de un movimiento rectilíneo uniforme, ya que en ambas situaciones la aceleración observada es la misma» (Principio de relatividad de Galileo).

Si en lugar de estudiar el movimiento de una partícula estudiamos el de la luz, la ecuación [3.14] nos indicaría que la velocidad de la luz dependería de la velocidad propia del observador. Se realizaron muchos intentos para medir esa variación, obteniéndose resultados negativos. Este hecho constituye uno de los postulados de la Teoría Especial de la Relatividad (Einstein, 1905): «La velocidad de la luz es una constante universal independiente del movimiento del emisor o del receptor. Ninguna señal o energía puede transmitirse con velocidad superior a la de la luz». Además, «todas las leyes de la Física son invariantes en cualquier sistema de referencia inercial».

La Teoría Especial de la Relatividad establece que la relación de velocidades entre los sistemas de referencia viene dada por la ecuación [3.16] en lugar de la [3.14],

$$v = \frac{v' + v_A}{1 + \frac{v' \cdot v_A}{c^2}} \quad [3.16]$$

siendo c la velocidad de la luz en el vacío (300 000 km/s).

No obstante, como en los casos que estudiaremos ($v' \cdot v_A \ll c^2$), es válida la relación: $v = v' + v_A$; de modo que, salvo en los dominios relativistas (con $v \geq 10^7$ m/s), podemos seguir utilizando la expresión [3.14].

Ejemplo: supongamos dos satélites artificiales que avanzan a 25 000 km/h, en sentidos opuestos. Al calcular la velocidad v de uno de ellos observada desde el otro, $v' = v_A = 25\,000$ km/h y el valor del denominador de la ecuación [3.16] es 1,000 000 000 5; por tanto, prácticamente no hay diferencia entre los valores calculados por una u otra ecuación.

Otra de las consecuencias de la Teoría Especial de la Relatividad es el que la masa es función de la velocidad. Si m_0 es la masa en reposo, la masa m a la velocidad v viene dada por la ecuación

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad [3.17]$$

Las leyes de la mecánica clásica formuladas por Newton resultan inadecuadas en algunas situaciones muy especiales. Cuando las partículas avanzan a velocidades próximas a la de la luz se utiliza la mecánica relativista. No obstante, la mecánica clásica, dentro de su campo de validez, nos proporciona una descripción satisfactoria de los fenómenos físicos.

12. Fuerzas de inercia

Consideremos nuevamente el ejercicio 3: una persona de 70 kg se encuentra sobre una báscula en el interior de un ascensor que asciende incrementando su velocidad a razón de 1 m/s cada segundo. Si un observador situado en el interior del ascensor desea calcular —mediante las leyes de Newton— la indicación de la balanza, hará el siguiente razonamiento: puesto que la persona está en reposo, la resultante será nula y, por tanto, la fuerza ejercida por la báscula será de igual valor que el peso, es decir, 686 N. Sin embargo, si lee la indicación de la báscula, ésta señala 756 N, es decir, 70 N más que los calculados por el observador.

La discrepancia entre el valor real y el calculado por un observador no inercial, aplicando las leyes de Newton, tiene su explicación en el hecho de que dichas leyes sólo se aplican en sistemas de referencia inerciales.

Por tanto, debemos establecer otro método para abordar problemas de dinámica desde sistemas de referencia no inerciales. Para ello, consideremos de nuevo la ecuación [3.15] que relaciona la aceleración de una partícula en un sistema inercial (\vec{a}) con la que presenta en otro sistema no inercial (\vec{a}'), siendo \vec{a}_A la aceleración del sistema no inercial respecto del inercial:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_A \quad [3.15]$$

o bien,

$$\vec{a} - \vec{a}_A = \vec{a}'$$

si multiplicamos por la masa de la partícula, resulta:

$$m \cdot \vec{a} - m \cdot \vec{a}_A = m \cdot \vec{a}'$$

El término $-m \cdot \vec{a}_A$, que se representa por \vec{F}_I , tiene las dimensiones de una fuerza; su **dirección es la de la aceleración del sistema de referencia no inercial** y su **sentido, el contrario**. Este término se denomina **fuerza de inercia**, y la ecuación anterior puede escribirse:

$$\vec{F} + \vec{F}_I = m \cdot \vec{a}' \quad [3.18]$$

Según esto, el **producto de la masa de la partícula por la aceleración con que la ve un observador no inercial es igual a la suma de la resultante de las fuerzas (reales) que actúan sobre ella más las fuerzas de inercia**.

En el caso del ascensor, el observador no inercial resolverá el problema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{P} + \vec{B} = -686\vec{j} + \vec{B} \\ \vec{F}_I &= -m \cdot \vec{a}_A = -70\vec{j} \\ \vec{a}' &= 0 \end{aligned}$$

pues la aceleración del referencial (ascensor) respecto del observador es nula, ya que ambos llevan la misma velocidad. Sustituyendo en la ecuación [3.18] se obtiene:

$$\begin{aligned} -686\vec{j} + \vec{B} - 70\vec{j} &= 0 \\ \vec{B} &= 756\vec{j} \end{aligned}$$

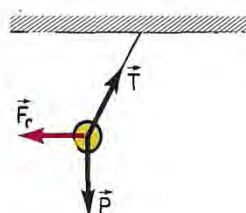
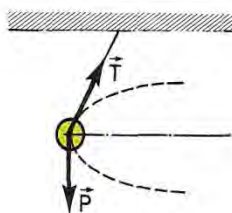
En definitiva, lo que se ha hecho es sumar la fuerza de inercia a la resultante.

El nombre de «fuerza» de inercia no es muy afortunado, pues, en realidad, no son verdaderas fuerzas, ya que no hay ningún agente que las ejerza. Hemos de considerarlas como un término que los observadores no inerciales deben sumar a las fuerzas reales.

Los observadores que describen una trayectoria circular son no inerciales, puesto que, al menos, llevan aceleración centrípeta, dirigida hacia el centro de la trayectoria. La fuerza de inercia en este caso es $\vec{F}_I = -m \cdot \vec{a}_c$. Este vector tiene igual módulo ($m \cdot \omega^2 \cdot R$) y dirección (radial) que la fuerza centrípeta, pero su sentido es opuesto, es decir, dirigido hacia fuera. Esta fuerza de inercia de los sistemas rotatorios se conoce como **fuerza centrífuga**, aunque hemos de insistir, es una pseudofuerza, pues ningún agente la aplica.

Estudiemos, como aplicación, un péndulo que cuelga del techo de un automóvil que avanza por una curva. La experiencia nos indica que el péndulo se separa de la vertical hacia el exterior de la curva:

	OBSERVADOR INERCIAL	OBSERVADOR NO INERCIAL
Observador:	Persona fija en el exterior, en la carretera.	Persona en el interior del vehículo.
Observación:	La partícula describe una trayectoria circular.	Péndulo en reposo, separado de la vertical.
Fuerzas:	Peso y tensión de la cuerda.	Peso, tensión y fuerza centrífuga.



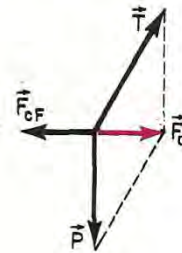
Razonamiento: La resultante de esas dos fuerzas es la fuerza centrípeta que lo hace girar

$$|\vec{F}_c| = m \cdot v^2/R$$



La resultante es nula; la fuerza centrífuga anula a la resultante de las otras dos

$$|\vec{F}_{cf}| = |\vec{F}_l| = m \cdot v^2/R$$



Por tanto, los problemas de dinámica se pueden resolver desde sistemas de referencia inerciales o no inerciales. La elección de uno u otro tipo de sistema de referencia viene dada, generalmente, por el camino más simple para su resolución; pero en el segundo referencial, no se puede prescindir de las fuerzas de inercia.

Fuerza de Coriolis

En los sistemas de referencia no inerciales que giran, como sucede con la Tierra, además de la fuerza centrífuga debe considerarse otra fuerza de inercia: **la fuerza de Coriolis**.

Consideremos una plataforma giratoria desde cuyo eje lanzamos un objeto en dirección radial hacia un observador A situado en la periferia de la plataforma (fig. 3.55). Para un observador inercial, situado fuera de la plataforma, la trayectoria es una línea recta (fig. 3.56), mientras que el observador A ve cómo el cuerpo no le alcanza, sino que queda por detrás de él (fig. 3.57).

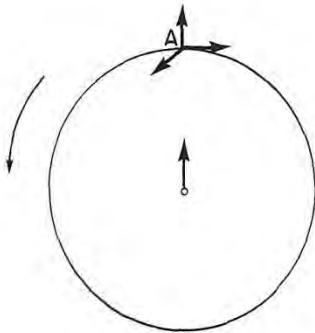


Fig. 3.55.

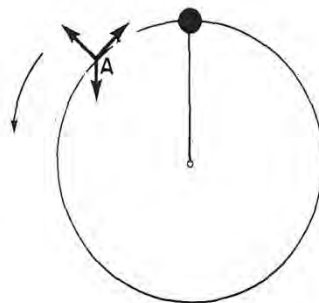


Fig. 3.56.

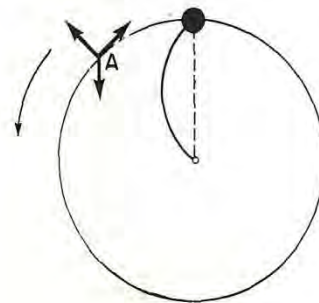


Fig. 3.57.

Para el **observador no inercial** este hecho no tiene justificación si se considera sólo la fuerza centrífuga, que hace que el cuerpo salga hacia fuera en dirección radial, y debería alcanzarle. Por tanto, para describir la situación real se debe suponer la existencia de otra pseudofuerza (fuerza de Coriolis) que justifique, en este caso, que el cuerpo se desvíe hacia la derecha.

La fuerza de Coriolis actúa perpendicularmente a la velocidad relativa y su valor viene dado por la expresión:

$$\vec{F}_{co} = 2 \cdot m \cdot \vec{v}' \wedge \vec{\omega}$$

siendo \vec{v}' la velocidad relativa de la partícula respecto de la plataforma, y $\vec{\omega}$ la velocidad angular del sistema no inercial.

La Tierra es un sistema de referencia no inercial, pues posee movimiento de rotación; por tanto, habrá de tenerse en cuenta la fuerza de Coriolis en los móviles que evolucionen sobre su superficie. Esta fuerza es la responsable de que los ciclones (vistos desde arriba) tengan sentido de giro antihorario en el hemisferio norte, mientras que en el hemisferio sur giran en el mismo sentido que las agujas del reloj.

Cuestiones

- 3.1. Comentar la frase: «El movimiento de un cuerpo siempre tiene lugar en la dirección de la fuerza resultante».
- 3.2. Comentar la frase: «Si una partícula se mueve con velocidad constante, no actúan fuerzas sobre ella».
- 3.3. Comentar la frase: «La fuerza con que la Tierra atrae a una manzana es mayor que la fuerza con que la manzana atrae a la Tierra».
- 3.4. Una fuerza actúa 1 s sobre un cuerpo de 4 kg. La misma fuerza actúa 4 s sobre un cuerpo de 1 kg. ¿Se produce el mismo efecto en ambos cuerpos?
- 3.5.* Sobre una masa m actúa una fuerza \vec{F} produciéndole una aceleración \vec{a} . Dos fuerzas iguales \vec{F} , formando un ángulo de 90° , actúan sobre la misma masa y le producen una aceleración \vec{a}' . ¿En qué relación están los módulos de \vec{a} y \vec{a}' ?

Universidad de Cantabria, 1984

- 3.6. Desde una misma altura se sueltan de forma simultánea dos objetos, A y B . En el movimiento de caída sufren la acción del rozamiento del aire, que consideramos constante y de igual valor en ambos. Estudiar qué cuerpo llegará antes al suelo, si A tiene mayor masa.
- 3.7. Dibujar todas las fuerzas que actúan sobre la bola de corcho sumergida en agua mediante una cuerda fijada al fondo del recipiente (fig. 3.58).

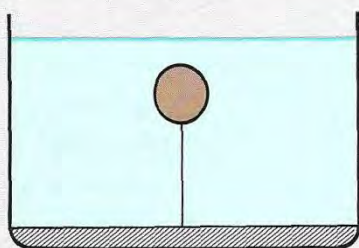


Fig. 3.58.

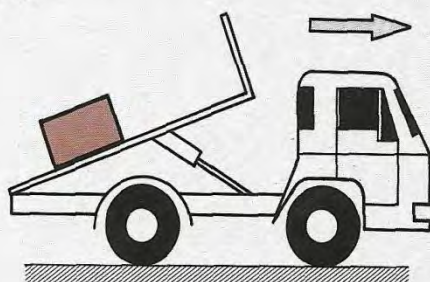


Fig. 3.59.

- 3.8. Un paquete se encuentra sin deslizar sobre la plataforma inclinada de un camión que acelera hacia adelante (fig. 3.59). Dibujar todas las fuerzas que actúan sobre el paquete. En otro gráfico, dibujar la resultante e indicar el sistema de coordenadas más adecuado para el estudio de esta situación.
- 3.9. Cuando arrastramos un cuerpo pesado, ¿por qué cuesta más ponerlo en movimiento que mantenerlo en movimiento después de iniciado éste?
- 3.10. Una fuerza de 55 N empuja un bloque de 22 N de peso contra la pared (fig. 3.60). El coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y la pared es 0,6. Si el bloque está inicialmente en reposo:

- a) ¿seguirá en reposo?;
- b) ¿cuál es la fuerza que ejerce la pared sobre el cuerpo?

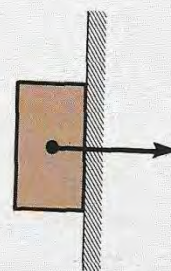


Fig. 3.60.

3.11.* Si un cuerpo se desliza sobre un plano horizontal con rozamiento, ¿cuáles de los siguientes factores influyen en el tiempo que tarda en pararse?:

- a) velocidad inicial de lanzamiento;
- b) masa del cuerpo;
- c) material de que está constituido el cuerpo y la superficie del plano.

¿De qué forma influyen?

Universidad de Santiago de Compostela, 1986

3.12. En la figura 3.61 se representan las dos fuerzas que actúan sobre la masa de un péndulo simple que oscila: el peso y la tensión. El vector peso se ha descompuesto en dos componentes. ¿Son iguales la componente \vec{P}_n y la tensión \vec{T} ?

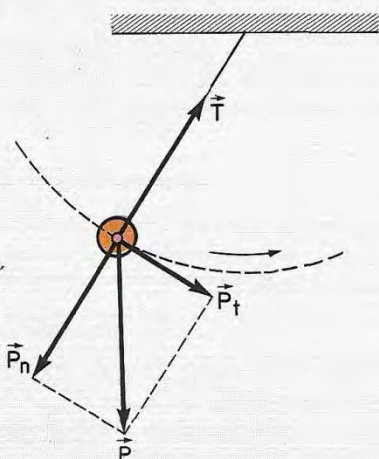


Fig. 3.61.

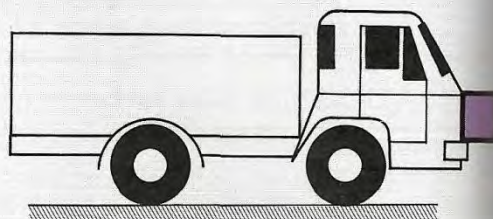


Fig. 3.62.

3.13. La masa de un péndulo simple oscilante pasa por la posición más baja; la tensión y el peso de la masa oscilante, ¿son iguales?

3.14. Explicar por qué se peraltan las curvas de las carreteras.

3.15. La Tierra atrae a la Luna; pero a pesar de la acción de esa fuerza, la Luna no gira cada vez con mayor velocidad ni cae sobre la Tierra. Justifica este hecho suponiendo que la órbita es circular, sin tener en cuenta la influencia de otros planetas.

3.16. La aceleración de una partícula, ¿es la misma en todos los sistemas inerciales?

3.17. El vehículo de la figura 3.62 se mueve hacia la derecha con aceleración constante. En la parte delantera hay un cuerpo colocado según se ve en la figura. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el vehículo es μ , estudiar el valor mínimo de la aceleración para que el cuerpo no caiga.

3.18. Si se hace girar un cubo de agua rápidamente en un plano vertical, el agua no se derrama. ¿Qué explicación da un observador fijo en el suelo?, ¿y un observador que se encontrase en el cubo?

Problemas

- 3.1. Un cuerpo de 20 kg se encuentra en reposo en un suelo horizontal. Se le aplica una fuerza de 20 N paralela al suelo. Calcular la velocidad del cuerpo después de recorrer los dos primeros metros. Despreciar los rozamientos.
- 3.2. Una persona de 70 kg está atada a una cuerda que pende de un helicóptero, prácticamente en reposo. Calcular la tensión de la cuerda en los siguientes casos:
- se sube a la persona con aceleración de 1 m/s^2 ;
 - baja con aceleración de 1 m/s^2 .
- 3.3.* Un aviador y su paracaídas tienen en conjunto una masa de 150 kg. En cierto instante de su caída su aceleración es de $2,45 \text{ m/s}^2$. ¿Qué fuerza de rozamiento actúa sobre el sistema en ese momento?
- 3.4.* Un cuerpo de 70 kg se encuentra suspendido de un dinamómetro que cuelga del techo de un ascensor. ¿Cuáles son las indicaciones del dinamómetro en los siguientes casos?:
- el ascensor está en reposo;
 - sube con velocidad constante;
 - asciende con aceleración de 1 m/s^2 ;
 - se rompe el cable.

Universidad Autónoma de Barcelona, 1987

- 3.5. Un cuerpo de 10 g se deja caer (caída libre). Cuando su velocidad es de 20 m/s se le aplica una fuerza en sentido opuesto al del movimiento y tarda 4 s en detenerlo. Calcular el valor de la fuerza y el camino total recorrido por el cuerpo desde que se soltó.
- 3.6.* Sobre una masa de 100 g, en reposo, actúa una fuerza vertical y hacia arriba de 1,20 N, durante 4 s. Calcular:
- módulo, dirección y sentido de la aceleración durante los 4 s;
 - altura máxima;
 - tiempo total que tarda en pasar de nuevo por la posición inicial.
- ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Universidad de Valencia, 1985

- 3.7. Una partícula de 5 kg avanza con la velocidad $\vec{v} = \vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$. Se le aplica la fuerza constante $\vec{F} = \vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$. Calcular la velocidad al cabo de 10 s. Discutir si la celeridad aumenta por la acción de la fuerza.
- 3.8. Un buzo sumergido en el mar, a 5 m de profundidad suelta una bolita de corcho de 6 cm de diámetro y 70 g de masa. Calcular la velocidad con que llega a la superficie. Datos: la fuerza de rozamiento con el agua es un tercio del peso de la bola. La densidad del agua del mar es 1030 kg/m^3 .
- 3.9. ¿Qué fuerza constante \vec{M} hay que aplicar al cuerpo de 20 kg de la figura 3.63, que se encuentra en reposo, para que alcance el punto B al cabo de dos segundos? Despreciar los rozamientos.

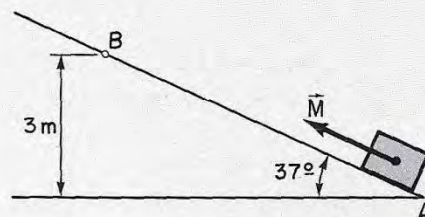


Fig. 3.63.

- 3.10. Se desea subir un cuerpo de 20 kg por una rampa de 37° de inclinación. ¿Qué fuerza horizontal se necesita para que ascienda con velocidad constante? Despreciar el rozamiento.
- 3.11.* Por un suelo horizontal se dispara un cuerpo con velocidad de 6 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el suelo y el cuerpo es 0,3, calcular la distancia que recorre hasta detenerse.

Universidad Complutense, 1980

- 3.12. Un cuerpo se encuentra en el punto A de la figura 3.64. Se le comunica una velocidad inicial de 6 m/s hacia la derecha de forma que rebasa el punto B, siguiendo la trayectoria que se indica. Calcular la velocidad con que llega al suelo teniendo en cuenta que el coeficiente de rozamiento en el tramo AB es 0,1; las distancias AB y BD miden 10,2 y 2,4 m, respectivamente.

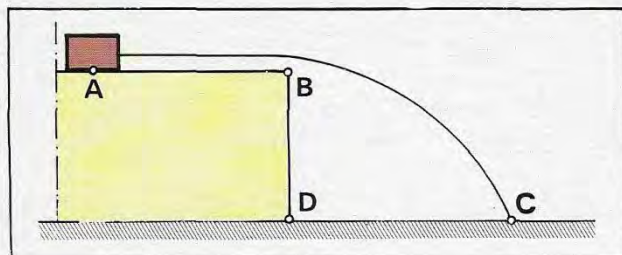


Fig. 3.64.

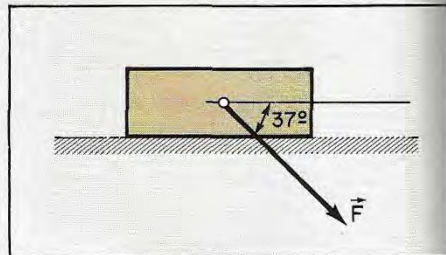


Fig. 3.65.

- 3.13. A un cuerpo de 20 kg en reposo sobre un suelo horizontal, con un coeficiente de rozamiento 0,2, se le aplica una fuerza de 100 N formando un ángulo de 37° por debajo de la horizontal (fig. 3.65). Calcular la distancia que recorre al cabo de 10 s.
- 3.14.* Desde una altura de 60 cm, en una rampa de 30° , se dispara un cuerpo a 2 m/s, y llega al suelo con velocidad de 0,5 m/s. ¿Cuánto vale el coeficiente de rozamiento con el plano inclinado?

Universidad Complutense, 1979

Universidad Autónoma de Barcelona, 1986

- 3.15. Resolver el problema 3.9 si hay un coeficiente de rozamiento de 0,2.
- 3.16. Un cuerpo de 50 kg está en reposo sobre un suelo horizontal. La fuerza horizontal mínima para que inicie el movimiento es de 147 N; y la fuerza horizontal mínima para mantenerle en movimiento con velocidad constante, 98 N. Calcular:
- el coeficiente de rozamiento estático y dinámico;
 - el valor de la fuerza de rozamiento si se aplica al cuerpo en reposo una fuerza horizontal de 49 N.
- 3.17. Un vagón de ferrocarril frena de forma uniforme y en 3,3 s su velocidad pasa de 47,5 a 30 km/h. Calcular el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático entre una maleta y el suelo del vagón para que la maleta no deslice al frenar.
- 3.18. Un cuerpo macizo de 5 kg se encuentra en reposo sobre una rampa de 37° de inclinación, sumergido en una piscina llena de agua. Calcular el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para que el cuerpo no deslice.
Datos: el líquido de la piscina es agua pura y la densidad del cuerpo es 2000 kg/m^3 .
- 3.19. En el sistema de la figura 3.66 la masa de cada cuerpo es 20 kg. El coeficiente de rozamiento entre A y el suelo es 0,25. Calcular el tiempo que transcurre desde que se sueltan los cuerpos hasta que A avanza 2 m, suponiendo despreciable el rozamiento en la polea.

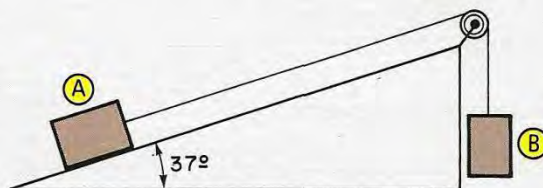


Fig. 3.66.

3.20.* En el sistema de la figura 3.66 la masa de A es 20 kg y el coeficiente de rozamiento con el suelo es 0,4. Establecer:

- valor máximo de la masa de B para que ésta ascienda;
- valor mínimo de la masa de B para que descienda.

Universidad de Valencia, 1987

3.21. En una máquina de Atwood (polea) los dos cuerpos que penden de los extremos de la cuerda tienen ambos 7,8 kg de masa. Si inicialmente están a la misma altura, ¿qué sobrecarga hay que poner en uno de ellos para que se desnivelen 1 m en 1 s?

3.22. Sea el sistema de la figura 3.67. Calcular la tensión de la cuerda teniendo en cuenta que la masa de cada cuerpo es de 20 kg y el coeficiente de rozamiento 0,2 para ambos. El módulo de \vec{M} es de 300 N.

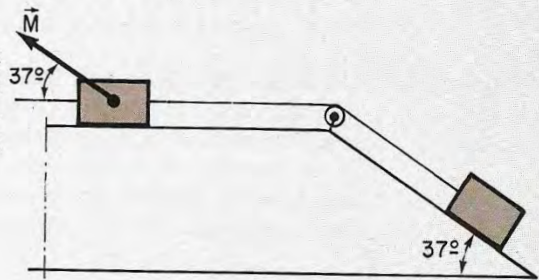


Fig. 3.67.

3.23.* En el sistema de la figura 3.68 las masas son:

$$A = 2 \text{ kg} \quad B = 3 \text{ kg} \quad C = 5 \text{ kg}$$

El coeficiente de rozamiento entre A , B y el suelo es 0,2. Calcular las tensiones y la aceleración.

Universidad de Valencia, 1985

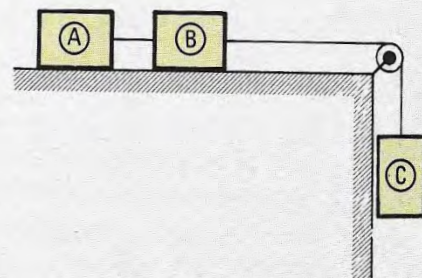


Fig. 3.68.

3.24.* En el sistema de la figura 3.69, en el que se desprecia la inercia de la polea y sus rozamientos, el coeficiente de rozamiento de los cuerpos con el suelo es 0,2. Calcular:

- aceleración;
- tensión;
- espacio recorrido por cada peso y velocidad al cabo de 1 s.

Universidad Autónoma de Barcelona, 1987

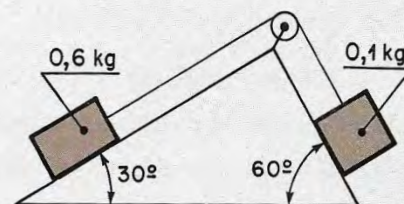


Fig. 3.69.

3.25.* En la figura 3.70 las masas de A y B son 10 y 5 kg, respectivamente. El coeficiente de rozamiento entre A y la mesa es 0,2. Determinar:

- masa mínima de C que evitará el movimiento del sistema;
- aceleración del sistema si se elimina C .

Universidad de Valladolid, 1985

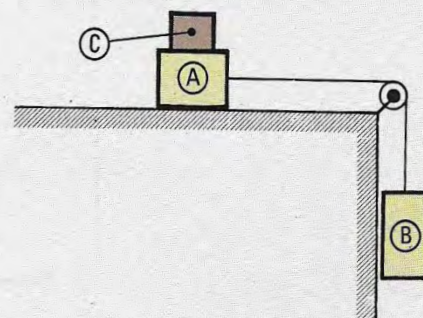


Fig. 3.70.

- 3.26. Una cuerda de 1 m de longitud se rompe cuando de ella se cuelga un cuerpo de 10 kg. Con esta cuerda y una piedra de 200 g se construye una honda de pastor. La hacemos girar pero, en un instante dado, la cuerda se rompe al pasar la piedra por la posición más baja de su trayectoria. ¿Cuál es la velocidad de la piedra en ese punto?
- 3.27. Un automóvil avanza por una carretera horizontal con velocidad constante de 20 m/s. Calcular la fuerza que ejerce el suelo del vehículo sobre un pasajero de 70 kg en los siguientes casos:
- si el vehículo avanza por un tramo recto;
 - en el punto más alto de un cambio de rasante;
 - en el punto más bajo de un badén, suponiendo que el badén y el cambio de rasante tienen de radio de curvatura 100 m.

- 3.28. Un tiovivo consta de un aro horizontal de 3 m de radio del que cuelgan cuerdas de 4 m de longitud. Si en el extremo de la cuerda se sienta un hombre de 80 kg, ¿con qué velocidad angular debe girar el tiovivo para que el hilo forme un ángulo de 37° con la vertical?

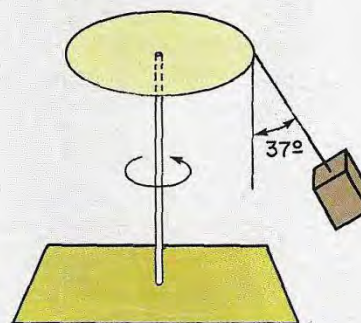


Fig. 3.71.

- 3.29. Un cubo está atado a una cuerda de 60 cm. El cubo contiene agua; la masa del cubo más el agua es 3 kg. Hallar la velocidad mínima para que no se derrame el agua al pasar el cubo por la posición más desfavorable de su trayectoria circular en el plano vertical.
- 3.30.* Un avión vuela a 900 km/h y «riza el rizo», es decir, describe una circunferencia en un plano vertical. ¿Qué radio debe tener el rizo si la fuerza que ejerce el piloto contra el asiento es diez veces su peso, al pasar por el punto más bajo?
- 3.31. El péndulo que cuelga del techo de un tren que avanza a velocidad constante, se desvía 37° de la vertical cuando describe una curva de 100 m de radio. Calcular la velocidad del tren.
- 3.32. Un cuerpo de 8 kg avanza a 10 m/s. Una fuerza constante y opuesta al movimiento actúa durante 3 s y le comunica una velocidad de 2 m/s en sentido contrario al inicial. Calcular los valores del impulso y de la fuerza aplicada.
- 3.33. Resolver el problema 3.4 desde un sistema de referencia ligado al ascensor.
- 3.34. Resolver el problema 3.31 desde un sistema de referencia ligado al tren.
- 3.35. Calcular la aceleración hacia la derecha que hay que comunicar al plano inclinado para que el cuerpo permanezca en reposo respecto del plano inclinado. Se desprecia el rozamiento. Resolver el problema:
- desde un sistema de referencia inercial;
 - desde un sistema fijo en el plano inclinado.

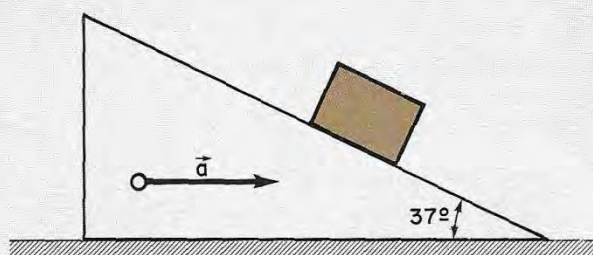


Fig. 3.72.

Respuesta a los problemas

- 3.1. 2 m/s.
3.2. a) 756 N; b) 616 N.
3.3. 1 102,5 N ó 1 837,5 N.
3.4. a) 686 N; b) 686 N; c) 756 N; d) 0.
3.5. 0,148 N , 60,4 m.
3.6. a) 2 m/s² vertical hacia arriba; b) 19,2 m; c) 6,8 s.
3.7. $\vec{v} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$; no varía.
3.8. 5,6 m/s.
3.9. 167,6 N.
3.10. 147 N.
3.11. 6,1 m.
3.12. 7,9 m/s.
3.13. 72 m.
3.14. 0,75.
3.15. 199 N.
3.16. a) 0,3 , 0,2; b) 49 N.
3.17. 0,15.
3.18. 0,75.
3.19. 2 s.
3.20. a) 5,6 kg; b) 18,4 kg.
3.21. 1,77 kg.
3.22. 193 N.
3.23. 3,92 m/s² , 11,8 N y 29,4 N.
3.24. a) 1,39 m/s²; b) 1,09 N; c) 0,7 m , 1,39 m/s.
3.25. a) 15 kg; b) 1,96 m/s².
3.26. 22 m/s.
3.27. a) 686 N; b) 406 N; c) 966 N.
3.28. 1,17 rad/s.
3.29. 2,42 m/s.
3.30. 709 m.
3.31. 27,1 m/s.
3.32. 96 N s , 32 N.
3.33. a) 686 N; b) 686 N; c) 756 N; d) 0.
3.34. 27,1 m/s.
3.35. 7,35 m/s².

Determinación de coeficientes de rozamiento

Material:

- Taco de madera.
- Dinamómetro.
- Pesas (ranuradas).

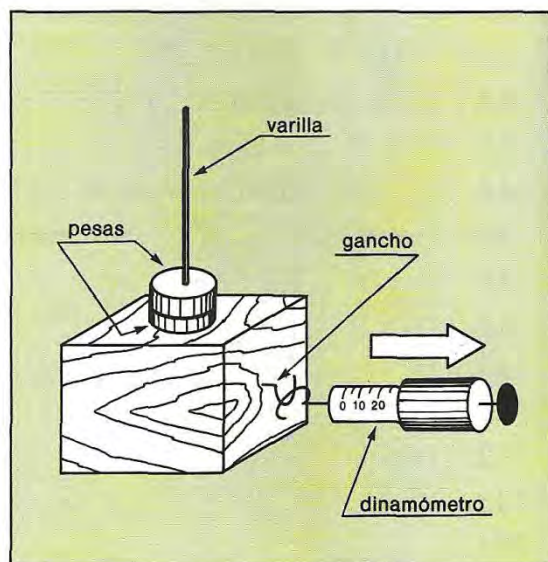
Realización:

1. Pesar el taco de madera.
2. Tirar **lentamente** del taco mediante el dinamómetro, en posición horizontal. Anotar la fuerza que indica el dinamómetro cuando el taco se pone en movimiento.
3. Tirar del taco de forma que la velocidad sea lo más uniforme posible, anotando la fuerza aplicada.
4. Repetir varias veces el experimento.
5. Aumentar la masa del taco, mediante la adición de pesas. Repetir el procedimiento.
6. Una vez realizada la experiencia para más de cinco pesas, representar la fuerza de rozamiento estática frente a la fuerza normal. Determinar el coeficiente de rozamiento estático entre el taco y la superficie de la mesa.
7. Representar la fuerza de rozamiento dinámica frente a la fuerza normal. Determinar el coeficiente de rozamiento.
8. Repetir la experiencia con otra superficie (por ejemplo, papel esmeril).

Teoría:

En cada experiencia, la fuerza paralela al plano que inicia el movimiento de la masa, \vec{F} es igual a la fuerza de rozamiento estático máxima \vec{F}_{REM} . Por definición, $|\vec{F}_{REM}| = \mu_e \cdot |\vec{N}|$; y el coeficiente de rozamiento vale, en cada experiencia:

$$\mu_e = \frac{|\vec{F}_{REM}|}{|\vec{N}|}$$



Para valores obtenidos con diferentes masas que contactan con una superficie dada, se hace el cuadro adjunto. Luego se llevan a la gráfica los valores de $|\vec{F}_{REM}|$ frente a los de $|\vec{N}|$ y se obtiene una recta para cada superficie y sustancia. ¿Qué mide la pendiente de dicha recta?

Confirmar que corresponde al valor medio de μ_e .

Deducir el error absoluto del coeficiente estático de rozamiento, y expresar el valor de la medida con el error cometido.

CUADRO DE VALORES

$ \vec{F}_{REM} $	$ \vec{N} $	$\mu_e = \frac{ \vec{F}_{REM} }{ \vec{N} }$	μ_e Valor medio

Cuestiones:

- A) ¿Cuál es la desigualdad correcta?:
 $\mu_E < \mu_D$; $\mu_E > \mu_D$.
- B) ¿Qué unidades tiene el coeficiente de rozamiento?

TEMA V

DINÁMICA II

Dinámica de los sistemas de partículas

La dinámica de la partícula es un caso singular dentro de la dinámica, ya que pocas veces interviene en la realidad una partícula aislada. Se deben considerar, por tanto, las fuerzas que actúan sobre sistemas de partículas: desde dos, hasta un número indefinido de ellas.

La existencia de un punto material llamado centro de masas del sistema simplifica el problema en muchos casos, pues se aplican a dicho punto las mismas leyes que rigen en la partícula.



Introducción

Un punto material, al carecer de dimensiones, no puede girar sobre sí mismo y, por tanto, en la Dinámica del punto (capítulo 3) sólo se estudian movimientos de traslación (en trayectoria rectilínea, circular, elíptica...).

En aquellos casos en los que el sistema objeto de estudio no puede ser considerado como un punto material cabe la posibilidad de estudiarlo como un conjunto de partículas, a cada una de las cuales podremos aplicar la Dinámica del punto.

Aunque la descripción detallada del movimiento de los sistemas de partículas puede ser compleja, en este capítulo expondremos una serie de conceptos, magnitudes y teoremas que facilitan su estudio y que nos permiten abordar algunos casos interesantes como las explosiones, los choques de dos partículas, los movimientos de satélites...



La grúa levanta y traslada contenedores (de varias toneladas) como si fueran fardos.

1. Fuerzas exteriores y fuerzas interiores

Las diversas fuerzas que actúan sobre las partículas de un sistema se clasifican en fuerzas interiores y fuerzas exteriores. Denominamos **fuerzas interiores** (o internas) las que ejercen las partículas del sistema entre sí, y **fuerzas externas** (o exteriores) las que son ejercidas por agentes externos al sistema.

Consideremos el sistema representado en la figura 5.1. Dicho sistema se desliza en un suelo horizontal por la acción de la fuerza horizontal \vec{M} ejercida sobre el cuerpo A. En la figura 5.2 se indican todas las fuerzas que actúan sobre cada uno de los bloques; \vec{F}_{BA} es la fuerza ejercida por A sobre B, mientras que \vec{F}_{AB} es la fuerza de reacción de B sobre A.

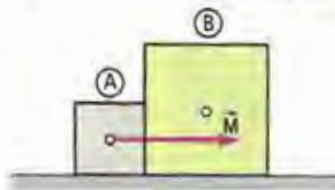


Fig. 5.1.

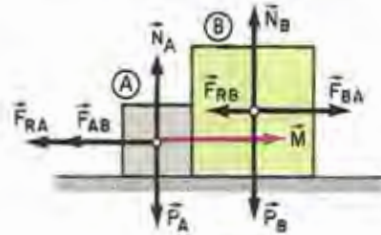


Fig. 5.2.

Podemos clasificar las nueve fuerzas que actúan en el sistema, así:

Fuerzas internas: \vec{F}_{AB} y \vec{F}_{BA}

Fuerzas externas: \vec{M} , \vec{P}_A , \vec{P}_B , \vec{F}_{RA} , \vec{F}_{RB} , \vec{N}_A y \vec{N}_B

La clasificación de las fuerzas existentes en los sistemas en externas e internas depende de lo que se considere como sistema. Por tanto, se debe delimitar cuidadosamente el sistema antes de proceder a clasificar las fuerzas. Por ejemplo, si se analiza el movimiento del sistema solar, la fuerza que atrae la Tierra hacia el Sol es una fuerza interior, mientras que si se considera el movimiento de la Tierra en su órbita alrededor del Sol, dicha fuerza es exterior.

De la ecuación [5.2] es fácil deducir el **principio de conservación** de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas: «Si la resultante de las fuerzas exteriores es nula, la cantidad de movimiento del sistema se conserva».

En efecto, si $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$, la derivada de \vec{p} respecto del tiempo también es nula, luego la cantidad de movimiento del sistema es constante en el tiempo, no varía (se conserva).

Hay muchos casos en los que se aplica este principio, especialmente en choques y explosiones. Las fuerzas que producen estos procesos son internas, y como la resultante de las fuerzas exteriores se conserva nula, en tales fenómenos la cantidad de movimiento se conserva, es constante.

Ejercicio 1*

Al dinamitar una roca de 350 kg, ésta sale despedida en tres trozos. Uno de estos trozos es de 100 kg y sale despedida a 15 m/s, mientras que otro de 200 kg es despedida perpendicularmente al anterior a 10 m/s. Hallar la velocidad del tercer trozo así como la dirección en la que avanza.

SOLUCIÓN

Las fuerzas que actúan en la explosión son:

Externas: el peso y la reacción del suelo (fig. 5.4):

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{N}$$

Internas: las propias de la explosión.

No consideramos las fuerzas de rozamiento que actúan después de la explosión, ya que nuestra atención se fija en el instante en que la misma tiene lugar. Una vez producida ya deberían tenerse en cuenta.

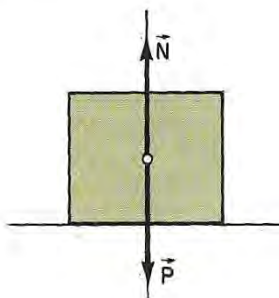


Fig. 5.4.

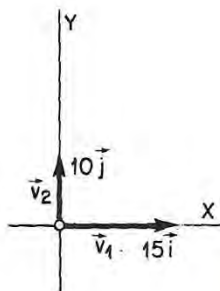


Fig. 5.5. Vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

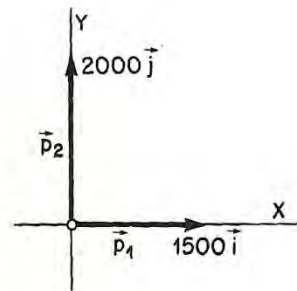


Fig. 5.6. Vectores \vec{p}_1 y \vec{p}_2 .

En el proceso de la explosión $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$, por lo que, según el principio de conservación de la cantidad de movimiento, la cantidad de movimiento es constante, es decir, la cantidad de movimiento antes de la explosión (\vec{p}_a) es igual a la cantidad de movimiento después (\vec{p}_d):

$$\vec{p}_a = \vec{p}_d$$

Antes de la explosión, la cantidad de movimiento era nula, ya que la roca estaba en reposo.

La cantidad de movimiento inmediatamente después de la explosión será la suma de las cantidades de movimiento de cada trozo:

$$\vec{p}_d = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

De la ecuación [5.2] es fácil deducir el **principio de conservación de la cantidad de movimiento** de un sistema de partículas: «Si la resultante de las fuerzas exteriores es nula, la cantidad de movimiento del sistema se conserva».

En efecto, si $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$, la derivada de \vec{p} respecto del tiempo también es nula, luego la cantidad de movimiento del sistema es constante en el tiempo, no varía (se conserva).

Hay muchos casos en los que se aplica este principio, especialmente en choques y explosiones. Las fuerzas que producen estos procesos son internas, y como la resultante de las fuerzas exteriores se conserva nula, en tales fenómenos la cantidad de movimiento se conserva, es constante.

Ejercicio 1*

Al dinamitar una roca de 350 kg, ésta sale despedida en tres trozos. Uno de estos trozos es de 100 kg y sale despedido a 15 m/s, mientras que otro de 200 kg es despedido perpendicularmente al anterior a 10 m/s. Hallar la velocidad del tercer trozo así como la dirección en la que avanza.

SOLUCIÓN

Las fuerzas que actúan en la explosión son:

Externas: el peso y la reacción del suelo (fig. 5.4):

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{N}$$

Internas: las propias de la explosión.

No consideramos las fuerzas de rozamiento que actúan después de la explosión, ya que nuestra atención se fija en el instante en que la misma tiene lugar. Una vez producida ya deberían tenerse en cuenta.

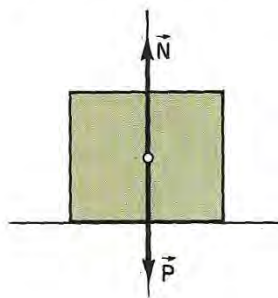


Fig. 5.4.

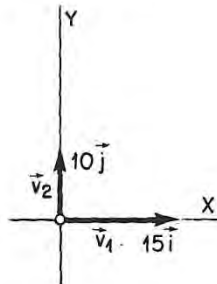


Fig. 5.5. Vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

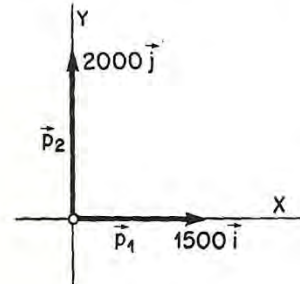


Fig. 5.6. Vectores \vec{p}_1 y \vec{p}_2 .

En el proceso de la explosión $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$, por lo que, según el principio de conservación de la cantidad de movimiento, la cantidad de movimiento es constante, es decir, la cantidad de movimiento antes de la explosión (\vec{p}_a) es igual a la cantidad de movimiento después (\vec{p}_d):

$$\vec{p}_a = \vec{p}_d$$

Antes de la explosión, la cantidad de movimiento era nula, ya que la roca estaba en reposo.

La cantidad de movimiento inmediatamente después de la explosión será la suma de las cantidades de movimiento de cada trozo:

$$\vec{p}_d = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

Ejercicio 2*

Un proyectil de 10 g avanza horizontalmente a 400 m/s y se incrusta en un bloque de madera de 500 g que se encuentra en reposo sobre el suelo.

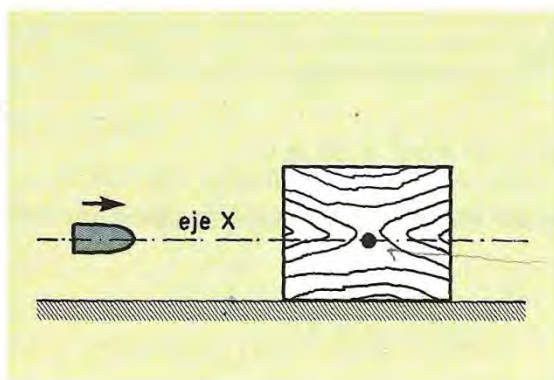
Calcular la velocidad del conjunto proyectil-bloque, inmediatamente después del impacto.

Universidad Autónoma de Barcelona, 1986

SOLUCIÓN

Este tipo de choque de los cuerpos que colisionan y dan lugar a un cuerpo único se denomina «choque perfectamente inelástico».

Según la figura 5.10, el choque tiene lugar en la dirección del eje X. Teniendo en cuenta el carácter vectorial de la ecuación [5.2], podemos escribir:



$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

[5.2]

en este caso:

$$F_{\text{ext},x} = \frac{d\vec{p}_x}{dt}$$

[5.3]

Fig. 5.10.

que nos permite decir que **la cantidad de movimiento en el eje X se conserva si la resultante de las fuerzas externas en dicho eje es nula**. En el caso estudiado, no se ejerce ninguna fuerza externa en dicho eje, ya que las fuerzas que intervienen en el proceso de incrustación del proyectil en la madera son internas. Por otra parte, como el proceso de choque es tan rápido, no se considera la acción del rozamiento entre el bloque y el suelo. No obstante, una vez que el sistema bloque-proyectil esté en movimiento es necesario tenerla en consideración.

Por consiguiente, puesto que $\vec{F}_{\text{ext},x} = 0$,

$$\vec{p}_{\text{antes},x} = \vec{p}_{\text{después},x}$$

$$\vec{p}_{\text{antes},x} = m_{\text{bala}} \cdot \vec{v}_{\text{bala}} = 0,010 \text{ kg} \cdot 400(\text{m/s})\vec{i} = 4\vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\vec{p}_{\text{después},x} = m_{\text{sist}} \cdot \vec{v}_{\text{sist}} = 0,510 \text{ kg} \cdot \vec{v}_{\text{sist}}$$

$$4\vec{i} = 0,510\vec{v}_{\text{sist}}$$

$$\vec{v}_{\text{sist}} = \frac{4}{0,510}\vec{i} = 7,8\vec{i}$$

$$|\vec{v}_{\text{sist}}| = 7,8 \text{ m/s}$$

Ejercicio 3

Con un fusil de 4 kg se dispara un proyectil de 14 g que sale a una velocidad de 800 m/s. ¿Cuál es la velocidad de retroceso del arma?

SOLUCIÓN

En los problemas en los que se pregunta la velocidad de retroceso del fusil debe hacerse la suposición de que el arma no se sujeta en la dirección del retroceso: hay que suponer, pues, que el arma se sostiene, pero no se sujeta, es decir, no se hace ninguna fuerza que reduzca el retroceso.

En la explosión producida al disparar se ejercen intensas fuerzas entre los gases, el fusil y el proyectil pero, de acuerdo con el comentario anterior, no hay fuerzas externas horizontales (fig. 5.11). Según la ecuación [5.3],

$$\vec{F}_{\text{ext},x} = \frac{d\vec{p}_x}{dt} \quad [5.3]$$

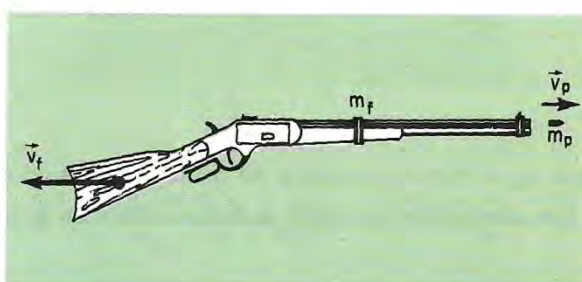


Fig. 5.11. \vec{v}_f , velocidad de retroceso del fusil.

y como $\vec{F}_{\text{ext},x} = 0$, la cantidad de movimiento horizontal es constante,

$$\vec{p}_{\text{antes},x} = \vec{p}_{\text{después},x}$$

Antes de la explosión no hay movimiento: $\vec{p}_{\text{antes},x} = 0$.

Después de la explosión (fig. 5.11)

$$\vec{p}_{\text{después},x} = m_p \cdot \vec{v}_p + m_f \cdot \vec{v}_f$$

siendo \vec{v}_f la velocidad con que el fusil inicia el retroceso. En este ejemplo, $m_p = 0,014$ kg, $m_f = 4$ kg y $\vec{v}_p = 800\vec{i}$,

$$0 = 0,014 \cdot 800\vec{i} + 4 \cdot \vec{v}_f = 11,2\vec{i} + 4 \cdot \vec{v}_f$$

$$\vec{v}_f = -\frac{11,2\vec{i}}{4} = -2,8\vec{i} \quad ; \quad |\vec{v}_f| = 2,8 \text{ m/s}$$

Por tanto, en las condiciones expuestas, el fusil retrocedería con la velocidad de 2,8 m/s.

Los cohetes y aviones «a reacción» constituyen casos semejantes al descrito en el ejercicio anterior: el cohete avanza en sentido contrario al de la salida de los gases de la combustión.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento también se aplica en diversos fenómenos a nivel atómico: desintegraciones atómicas y colisiones entre átomos y demás partículas elementales.

3. Centro de masas. Definición

El estudio del movimiento de un sistema de partículas puede facilitarse utilizando el «centro de masas» del sistema.

El **centro de masas** (CM) de un sistema de partículas es un punto cuya masa es la total del sistema y cuya posición viene dada por la expresión vectorial:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

es decir,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M} \quad [5.4]$$

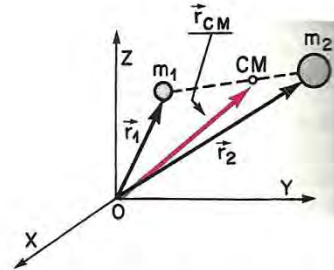


Fig. 5.12. Posición del centro de masas del sistema, en el referencial (O, X, Y, Z).

siendo \vec{r}_{CM} el vector de posición del centro de masas del sistema (fig. 5.12) en el referencial (O, X, Y, Z).

Las coordenadas del centro de masas se deducen de la ecuación [5.4],

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} \quad y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M} \quad [5.5]$$

siendo (x_i, y_i, z_i) las coordenadas correspondientes a cada uno de los vectores de posición \vec{r}_i de las partículas del sistema.

Si el sistema de partículas se puede considerar como un cuerpo continuo, el centro de masas se deduce descomponiendo el cuerpo en porciones de masa infinitesimal, dm , situadas en la posición $\vec{r} (= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$. En este caso, los sumatorios de [5.4] y [5.5] se convierten en integrales; para el vector de posición del centro de masas:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} dm}{M} \quad [5.4']$$

y para las coordenadas del centro de masas:

$$x_{CM} = \frac{\int x dm}{M} ; \quad y_{CM} = \frac{\int y dm}{M} ; \quad z_{CM} = \frac{\int z dm}{M} \quad [5.5']$$

De las ecuaciones [5.4], [5.5], [5.4'] y [5.5'] se deduce que el centro de masas de un sistema de partículas sólo depende de las masas de dichas partículas y de sus posiciones respectivas.

Si el sistema tiene algún elemento de simetría, el centro de masas del sistema es un punto del elemento de simetría.

Ejercicio 4

Hallar el centro de masas del sistema constituido por tres partículas iguales que ocupan los vértices de un triángulo equilátero de lado L .

SOLUCIÓN

En la figura 5.13, sólo cabe considerar las coordenadas x_{CM} e y_{CM} . De las ecuaciones [5.5], se deduce:

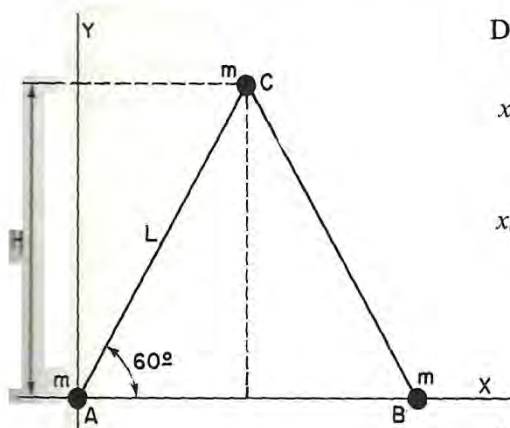


Fig. 5.13.

De acuerdo con la figura,

$$x_A = 0 \quad y_A = 0, \quad x_B = L \quad y_B = 0, \quad x_C = \frac{L}{2}$$

$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{m(x_A + x_B + x_C)}{3m} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_{CM} = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{m(y_A + y_B + y_C)}{3m} = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Respecto al valor y_C , que es la altura del triángulo,

$$\sin 60^\circ = \frac{H}{L}, \quad y_C = H = L \cdot \sin 60^\circ = L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo estos valores,

$$x_{CM} = \frac{0 + L + L/2}{3} = \frac{L}{2}; \quad y_{CM} = \frac{0 + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}L}{3} = \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

Por tanto, la posición del centro de masas es $\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2\sqrt{3}}\right)$ (es el baricentro del triángulo formado por tres masas iguales).

La definición de \vec{r}_{CM} permite resolver este problema de otro modo: en primer lugar se halla el centro de masas de las masas A y B ; después se halla el centro de masas del sistema considerando la partícula C :

Partículas A y B

$$x_{AB} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \frac{m \cdot 0 + m \cdot L}{2m} = \frac{L}{2}$$

$$y_{AB} = \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B} = \frac{m \cdot 0 + m \cdot 0}{2m} = 0$$

b) Las tres partículas (fig. 5.13 bis)

$$x_{CM} = \frac{m_{AB}x_{AB} + m_Cx_C}{m_{AB} + m_C} = \frac{2 \cdot m(L/2) + m \cdot (L/2)}{2 \cdot m + m} = \frac{L}{2}$$

$$y_{CM} = \frac{m_{AB}y_{AB} + m_Cy_C}{m_{AB} + m_C} = \frac{2 \cdot m \cdot 0 + m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L}{2 \cdot m + m} = \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

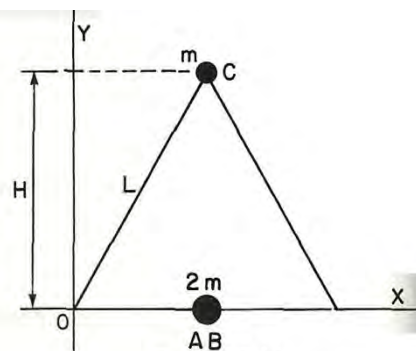


Fig. 5.13 bis.

Es decir, el centro de masas de un sistema puede calcularse: o bien considerando cada partícula individualmente para aplicar las ecuaciones [5.4] y [5.5], o bien considerando el sistema formado por varios subsistemas que serán representados por sus centros de masas respectivos.

Ejercicio 5

Hallar la posición del centro de masas de la lámina homogénea de la figura 5.14

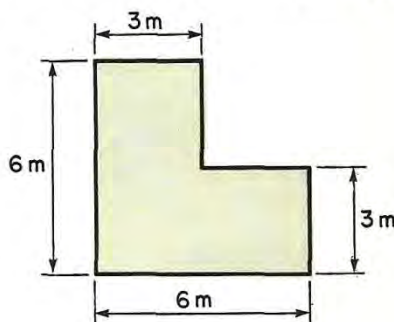


Fig. 5.14.

SOLUCIÓN

La lámina puede considerarse formada por varias piezas:

tres cuadrados iguales (fig. 5.15);
un rectángulo y un cuadrado (figs. 5.16 y 5.17).

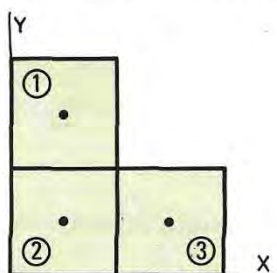


Fig. 5.15.

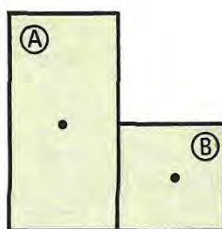


Fig. 5.16.

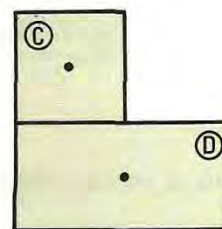


Fig. 5.17.

Obviamente, la posición del centro de masas no depende del modo como se calcule, sino de la forma de la lámina.

Utilizando la figura 5.15:

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m \cdot 1,5 + m \cdot 1,5 + m \cdot 4,5}{m + m + m} = \frac{m \cdot 7,5}{m \cdot 3} = 2,5 \text{ metros}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m \cdot 4,5 + m \cdot 1,5 + m \cdot 1,5}{m + m + m} = \frac{m \cdot 7,5}{m \cdot 3} = 2,5 \text{ metros}$$

por tanto, el centro de masas se encuentra en el punto (2,5; 2,5) (fig. 5.18).

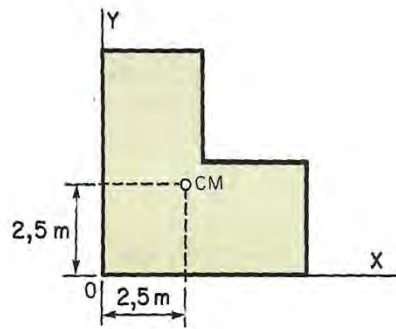


Fig. 5.18. Posición del centro de masas.

b) Utilizando la figura 5.16:

Teniendo en cuenta que la superficie del rectángulo A es el doble de la del cuadrado B,

$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \frac{m \cdot 1,5 + (m/2) \cdot 4,5}{m + (m/2)} = \frac{3,75 \cdot m}{1,5 \cdot m} = 2,5 \text{ metros}$$

$$y_{CM} = \frac{m_A y_A + m_B y_B}{m_A + m_B} = \frac{m \cdot 3 + (m/2) \cdot 1,5}{m + (m/2)} = \frac{3,75 \cdot m}{1,5 \cdot m} = 2,5 \text{ metros}$$

4. Propiedades del centro de masas

La velocidad del centro de masas viene dada por la expresión

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{M} \right) = \frac{1}{M} \cdot \frac{d}{dt} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n)$$

donde $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, la masa del sistema.

De acuerdo con la definición de velocidad de una partícula i ($\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$), dicha ecuación podrá escribirse de la siguiente forma:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \cdot (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n)$$

Como la cantidad de movimiento de una partícula i es $\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$, podemos escribir:

$$M \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \vec{p}$$

El producto $M \cdot \vec{v}_{CM}$ es la cantidad de movimiento de una partícula cuya masa es la de todo el sistema y su velocidad es la del centro de masas. Por tanto,

$$\vec{p} = \vec{p}_{CM} = M \cdot \vec{v}_{CM} \quad [5.6]$$

En resumen: **la cantidad de movimiento de un sistema de partículas es igual a la de su centro de masas.** Es para conocer la cantidad de movimiento de un sistema es suficiente conocer la de su centro de masas.

Por otra parte, a partir de la ecuación [5.2]

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad [5.2]$$

si la masa del sistema es constante podemos escribir:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{d(M \cdot \vec{v}_{\text{CM}})}{dt} = M \cdot \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = M \cdot \vec{a}_{\text{CM}}$$

en definitiva,

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M \cdot \vec{a}_{\text{CM}} \quad [5.7]$$

Según esta ecuación, el centro de masas se mueve como una partícula de masa $M \left(= \sum_{i=1}^n m_i \right)$, a la que están aplicadas todas las fuerzas externas (\vec{F}_{ext} es la resultante).

Los movimientos individuales de las partículas de un sistema suelen ser complejos pero el centro de masas permite facilitar su estudio. Esto se ve en la figura 5.19, en la que se observa el movimiento de caída de una llave inglesa: aunque hay un movimiento de rotación de la llave, su centro de masas sigue una trayectoria rectilínea porque la fuerza externa es su peso.

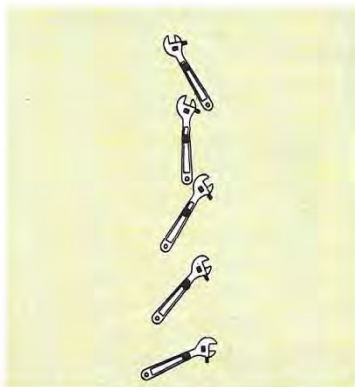


Fig. 5.19.

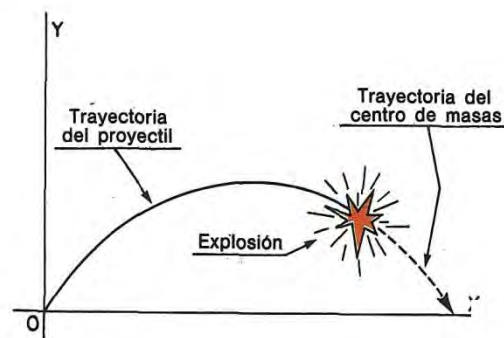


Fig. 5.20. Las fuerzas internas no afectan al movimiento del centro de masas.

Es importante resaltar que, según la ecuación [5.7], las fuerzas internas no afectan al movimiento del centro de masas; su movimiento está determinado sólo por las fuerzas externas.

Consideremos el caso de un proyectil que se dispara oblicuamente y estalla en pleno «vuelo» (fig. 5.20). Los trozos se mueven en diferentes direcciones. ¿Qué le sucede al centro de masas del sistema?: Como la resultante de las fuerzas externas es el peso del proyectil, la ecuación [5.7] tiene la siguiente forma.

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P}_{\text{Peso}} = M \cdot \vec{g} = M \cdot \vec{a}_{\text{CM}}$$

La aceleración del centro de masas continúa siendo la misma; y el centro de masas sigue describiendo la trayectoria parabólica (fig. 5.20). Aunque en la explosión actúan fuerzas internas muy intensas, como no se ejercen nuevas fuerzas externas, la explosión no modifica el movimiento del centro de masas.

Si un cuerpo en reposo estalla, el centro de masas permanece en la posición inicial, a pesar de que los trozos salgan despedidos en diversas direcciones. Al ser $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$, la aceleración del centro de masas es nula y, por tanto, dicho punto permanecerá en reposo a pesar de la explosión.

Ejercicio 6

Una persona de 75 kg se encuentra en reposo sobre una barca de 200 kg que flota en la superficie de un estanque en calma. Inicialmente la persona está a 20 m de la orilla, mientras que el centro de masas de la barca está a 17 m. ¿A qué distancia de la orilla está la persona cuando se ha desplazado 6 m dentro de la barca, hacia la orilla? (Despreciar las fuerzas horizontales que ejerce el agua sobre la barca.)

SOLUCIÓN

La situación inicial se representa en la figura 5.21.

Al andar el hombre hacia la orilla, la barca retrocede; por tanto, aunque el hombre avanza 6 m dentro de la barca, quedará a más de 14 m de la orilla. La situación final es la representada en la figura 5.22.

Las fuerzas externas (peso y empuje) dan una resultante nula. Por esto, la aceleración del centro de masas (\vec{a}_{CM}) también es nula y, en definitiva, la posición del centro de masas del sistema barca-hombre no varía, no se modifica por el hecho de que el hombre ande dentro de la barca:

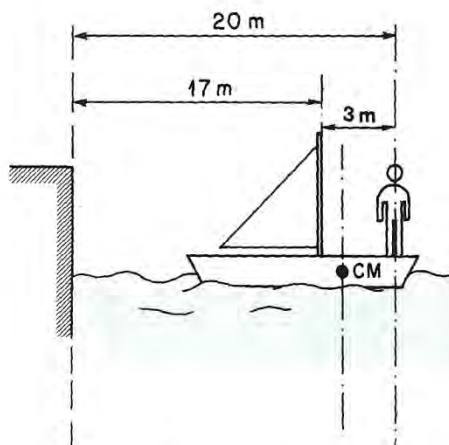


Fig. 5.21.

$$x_{CM_{antes}} = x_{CM_{después}}$$

$$x_{CM} = \frac{m_H x_H + m_B x_B}{m_H + m_B}$$

$$x_{CM_{antes}} = \frac{75 \text{ kg} \cdot 20 \text{ m} + 200 \text{ kg} \cdot 17 \text{ m}}{75 \text{ kg} + 200 \text{ kg}} = 17,8 \text{ m}$$

$$x_{CM_{después}} = \frac{75 x'_H + 200 x'_B}{75 + 200}$$

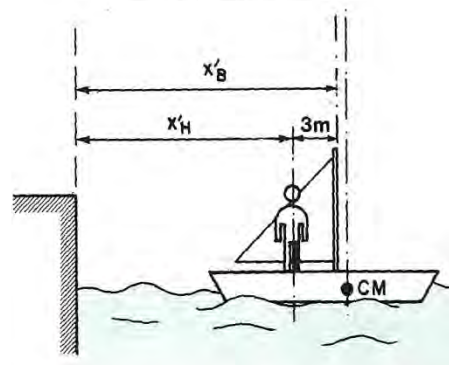


Fig. 5.22. El centro de masas del sistema barca-persona (CM) no se mueve.

De acuerdo con la figura 5.22, $x'_B = x'_H + 3 \text{ m}$, por tanto,

$$17,8 \text{ m} = \frac{75 x'_H + 200 \cdot (x'_H + 3)}{75 + 200}$$

de donde se obtiene $x'_H = 15,6 \text{ m}$.

Ejercicio 7

Un proyectil de 12 kg se lanza verticalmente hacia arriba. Al llegar a cierta altura explota y se divide en dos trozos, que salen despedidos horizontalmente y que llegan de forma simultánea al suelo. Un trozo es de 4 kg y cae a 4 m del punto de lanzamiento. ¿A qué distancia de dicho punto cae el otro trozo?

SOLUCIÓN

La única fuerza externa que actúa sobre el sistema es el peso. De acuerdo con la ecuación [5.7],

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P}_{\text{eso}} = M \cdot \vec{g} = M \cdot \vec{a}_{\text{CM}}$$

es decir, la aceleración del centro de masas es la de la gravedad, por lo que su movimiento será el de una partícula disparada verticalmente hacia arriba: trayectoria rectilínea (fig. 5.23).

Según dicha figura, la coordenada x del centro de masas es, en todo instante, $x_{\text{CM}} = 0$, de modo que al llegar al suelo,

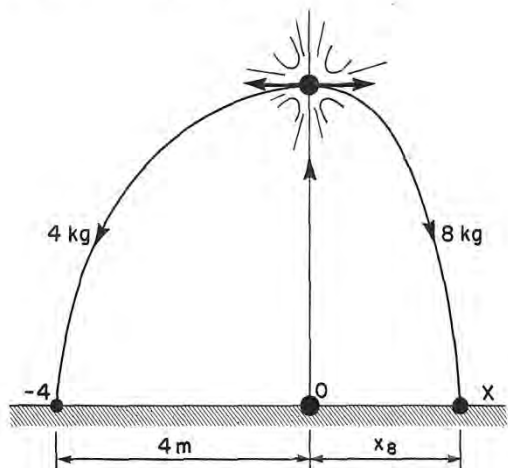


Fig. 5.23.

$$\begin{aligned} x_4 &= -4 \text{ m} \\ x_{\text{CM}} &= 0 \\ x_{\text{CM}} = 0 &= \frac{m_4 x_4 + m_8 x_8}{m_4 + m_8} = \frac{4 \cdot (-4) + 8 \cdot x_8}{4 + 8} \\ 0 &= \frac{-16 + 8x_8}{12} \end{aligned}$$

y,

$$x_8 = \frac{16}{8} = 2 \text{ m}$$

5. Energía cinética de un sistema de partículas

La energía cinética de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de las partículas que lo forman:

$$E_c = \sum_{i=1}^n E_{c_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2 \right) \quad [5.8]$$

La cantidad de movimiento del centro de masas de un sistema es igual a la cantidad de movimiento de todo el sistema (ecuación [5.6], $\vec{p} = \vec{p}_{\text{CM}}$). ¿Sucede lo mismo con la energía cinética? En lo que sigue buscaremos la respuesta a esta pregunta.

Sistema de referencia C

Además del sistema de referencia habitual, fijo en el laboratorio (llamado sistema de referencia L), también podemos considerar un sistema de referencia ligado al centro de masas (sistema de referencia C). De acuerdo con la figura 5.24, para cualquier partícula i podemos escribir:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i^* \quad [5.9]$$

en la que:

\vec{r}_i : es la posición en el sistema L.

\vec{r}_i^* : es la posición en el sistema C.

\vec{r}_{CM} : es la posición del centro de masas en el sistema L.

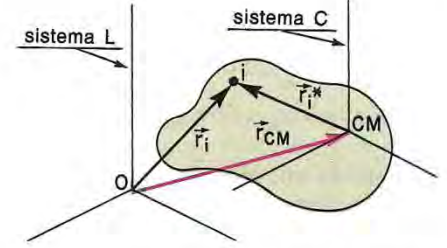


Fig. 5.24. Sistema de referencia L y sistema de referencia C.

La posición del centro de masas en el sistema de referencia C es: $\vec{r}_{CM}^* = 0$, es decir,

$$\vec{r}_{CM}^* = \frac{m_1 \vec{r}_1^* + m_2 \vec{r}_2^* + \dots + m_n \vec{r}_n^*}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^*}{M} = 0$$

por tanto, $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i^* = 0$.

Por otra parte, si derivamos la ecuación [5.9], se obtiene:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} + \frac{d\vec{r}_i^*}{dt}$$

es decir, $\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^*$

donde:

\vec{v}_i : es la velocidad de la partícula en el sistema L;

\vec{v}_{CM} : es la velocidad del centro de masas respecto del sistema L;

\vec{v}_i^* : es la velocidad de la partícula i respecto del sistema C.

Como $v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$, se puede escribir:

$$v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^*) \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^*) = v_{CM}^2 + v_i^{*2} + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i^*$$

la energía cinética,

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i [v_{CM}^2 + v_i^{*2} + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i^*] \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^{*2} \right) + \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i^*) = \\ &= \frac{1}{2} v_{CM}^2 \sum_{i=1}^n (m_i) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^{*2} \right) + \vec{v}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^*) \end{aligned}$$

El último término de la igualdad es nulo porque

$$\sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^*) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (m_i \vec{r}_i^*) = \frac{d}{dt} (0) = 0$$

por lo que escribimos:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^{*2} \right) \quad [5.10]$$

7. Choques

Cuando dos partículas se aproximan, su interacción mutua modifica el movimiento produciendo un intercambio de cantidad de movimiento y de energía: decimos que se ha producido un choque.

Para que dos partículas colisionen no es necesario que entren en contacto. Así sucede, por ejemplo, entre cargas eléctricas del mismo signo (dos núcleos, dos electrones, etc.). De hecho, el conocimiento que tenemos de los átomos, núcleos, partículas elementales y de la estructura de los gases proviene, en gran parte, de experimentos en los que intervienen choques entre partículas.

En general, en los choques **la resultante de las fuerzas externas es nula**, por lo que **la cantidad de movimiento del sistema es constante**; es decir, es la misma antes de la colisión que después.

Atendiendo a la conservación de la energía cinética, los choques se clasifican en

- **elásticos:** se conserva E_c .
- **inelásticos:** la energía cinética no se conserva. Se denominan «perfectamente inelásticos» si los cuerpos quedan unidos como resultado de la colisión.

Los choques siempre son inelásticos en mayor o menor grado, ya que los cuerpos se deforman y calientan en la colisión. Sin embargo, un gran número de choques pueden considerarse como elásticos con suficiente aproximación; en especial, así sucede en las colisiones estudiadas en física atómica y nuclear.

Ejercicio 9

Una bola de billar que avanza a 5 m/s choca con otra bola de igual masa que está en reposo.

Debido a la colisión, las bolas salen desviadas 37° y 53° (fig. 5.25).

Calcular la velocidad de cada bola después del choque y comprobar que es un choque elástico.

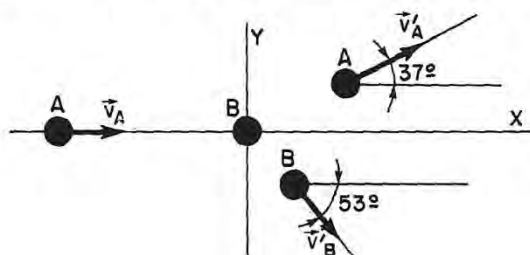


Fig. 5.25.

SOLUCIÓN

Ya que se conserva la cantidad de movimiento del sistema:

$$\vec{p}_{\text{antes}} = \vec{p}_{\text{después}}$$

La cantidad de movimiento antes del choque es:

$$\vec{p}_{\text{antes}} = m_A \cdot \vec{v}_A + m_B \cdot \vec{v}_B = m \cdot 5\vec{i} + m \cdot 0 = 5m\vec{i}$$

La cantidad de movimiento después del choque la deducimos de las figuras 5.26 y 5.27:

$$\vec{p}_{\text{después}} = m_A \cdot \vec{v}'_A + m_B \cdot \vec{v}'_B$$

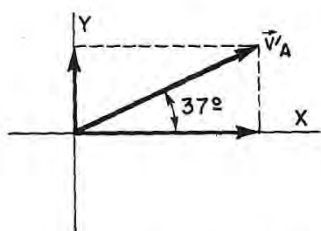


Fig. 5.26. Vector \vec{v}'_A .

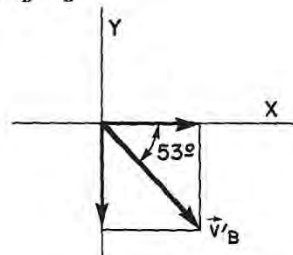


Fig. 5.27. Vector \vec{v}'_B .

$$\begin{aligned}\vec{v}'_A &= v'_A \cdot \cos 37^\circ \vec{i} + v'_A \cdot \sin 37^\circ \vec{j} = v'_A \cdot 0,8 \vec{i} + v'_A \cdot 0,6 \vec{j} \\ \vec{v}'_B &= v'_B \cdot \cos 53^\circ \vec{i} - v'_B \cdot \sin 53^\circ \vec{j} = v'_B \cdot 0,6 \vec{i} - v'_B \cdot 0,8 \vec{j} \\ \vec{p}_{\text{después}} &= m(v'_A \cdot 0,8 \vec{i} + v'_A \cdot 0,6 \vec{j}) + m(v'_B \cdot 0,6 \vec{i} - v'_B \cdot 0,8 \vec{j})\end{aligned}$$

Como $\vec{p}_{\text{antes}} = \vec{p}_{\text{después}}$,

$$5m\vec{i} = m(v'_A \cdot 0,8 \vec{i} + v'_A \cdot 0,6 \vec{j}) + m(v'_B \cdot 0,6 \vec{i} - v'_B \cdot 0,8 \vec{j})$$

Simplificando esta ecuación y separando componentes,

$$5 = 0,8 \cdot v'_A + 0,6 \cdot v'_B$$

$$0 = 0,6 \cdot v'_A - 0,8 \cdot v'_B$$

La solución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es:

$$v'_A = 4 \text{ m/s} \quad v'_B = 3 \text{ m/s}$$

Estudio de la variación de la energía cinética:

$$E_c (\text{antes}) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 5^2 = 12,5 \cdot m \text{ J}$$

$$E_c (\text{después}) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A'^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B'^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot 3^2 = 12,5 \cdot m \text{ J}$$

Efectivamente, en el choque estudiado se conserva la energía cinética: es un choque elástico.

Ejercicio 10

Un proyectil de masa m se dispara horizontalmente a una velocidad v sobre un bloque de madera de masa M que cuelga de una cuerda (fig. 5.28). Como consecuencia del impacto, el proyectil queda incrustado en el bloque de madera y dicho sistema proyectil-bloque se eleva a una altura H . Calcular la velocidad del proyectil en función de estos datos.

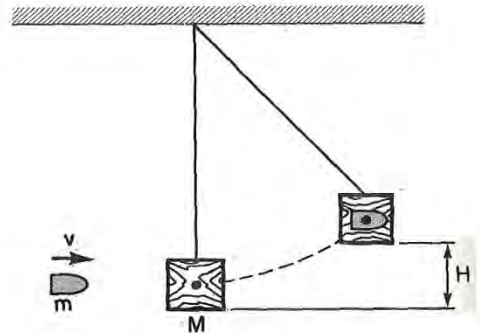


Fig. 5.28. Péndulo balístico.

SOLUCIÓN

Consideramos el proceso global constituido por dos etapas sucesivas:

- Choque (perfectamente inelástico).
- Elevación del sistema bloque-proyectil, desde la posición inicial hasta la altura H .

a) Choque perfectamente inelástico

En la dirección horizontal no se ejercen fuerzas externas, por lo que se conserva la cantidad de movimiento:

$$\vec{F}_{\text{ext}_x} = 0 \quad ; \quad \vec{p}_{\text{antes}_x} = \vec{p}_{\text{después}_x}$$

Si V es la velocidad del sistema bloque-proyectil inmediatamente después del choque,

$$\begin{aligned}\vec{p}_{\text{antes}_x} &= m \cdot \vec{v}_i + M \cdot 0 = m \cdot \vec{v}_i \\ \vec{p}_{\text{después}_x} &= (M + m) \cdot \vec{V} \\ m \cdot \vec{v}_i &= (M + m) \cdot \vec{V}\end{aligned}$$

por tanto,

$$v = \frac{M + m}{m} V$$

La velocidad V no es conocida, pero se puede hallar estudiando la elevación del sistema bloque-proyectil.

b) Elevación del sistema

En este movimiento de ascenso suponemos que no se disipa energía mecánica y, por tanto, se conserva la energía:

$$W_{nc} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

Para aplicar esta ecuación se toma como instante inicial el punto en el que el sistema inicia el movimiento de ascenso; el punto final es cuando se alcanza la altura máxima H .

En este proceso,

$$W_{nc} = 0$$

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = 0 - \frac{1}{2}(M + m)V^2$$

$$\Delta E_p = (M + m) \cdot g \cdot (h_f - h_i) = (M + m) \cdot g \cdot (H - 0)$$

Por tanto,

$$0 = -\frac{1}{2}(M + m) \cdot V^2 + (M + m) \cdot g \cdot H$$

$$V = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

Sustituyendo en la ecuación deducida en el apartado a)

$$v = \frac{M + m}{m} \cdot V = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gH}$$

El dispositivo descrito en este ejercicio recibe el nombre de péndulo balístico y se utiliza para determinar la velocidad de proyectiles.

Choque frontal elástico

Sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 que inicialmente se mueven con velocidades v_1 y v_2 , respectivamente. Las velocidades con que avanzan después del choque las representamos por v'_1 y v'_2 , respectivamente. El movimiento tiene lugar en una dirección única y estos valores se consideran positivos o negativos según el sentido del mismo (fig. 5.29).

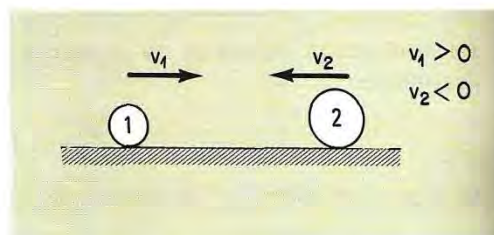


Fig. 5.29. Choque frontal.

Si la resultante de las fuerzas externas es nula, la cantidad de movimiento del sistema se conserva:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (a)$$

agrupando los valores de cada partícula,

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2) \quad (a')$$

Como el choque es elástico, también se conserva la energía cinética:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (v'_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2$$

Simplificando el término $\frac{1}{2}$ y agrupando los valores de cada cuerpo,

$$\begin{aligned} m_1 v_1^2 - m_1 (v'_1)^2 &= m_2 (v'_2)^2 - m_2 v_2^2 \\ m_1 (v_1^2 - v_1'^2) &= m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \end{aligned}$$

En esta ecuación, la diferencia de cuadrados puede expresarse como producto de suma por diferencia:

$$m_1 \cdot (v_1 + v'_1) \cdot (v_1 - v'_1) = m_2 \cdot (v'_2 + v_2) \cdot (v'_2 - v_2)$$

Dividiendo esta ecuación por la (a'), se tiene:

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \quad (b)$$

de donde,

$$v'_2 = v'_1 + v_1 - v_2$$

sustituyendo en (a),

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 \cdot (v'_1 + v_1 - v_2)$$

agrupando los términos que contienen la velocidad v'_1 ,

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_1 \\ (m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2m_2 v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot v'_1 \end{aligned}$$

por tanto,

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2 \quad [5.13]$$

Del mismo modo, para v'_2 se tiene:

$$v'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \quad [5.14]$$

Estas ecuaciones permiten calcular las velocidades de los cuerpos v'_1 y v'_2 , después de la colisión, en función de las masas y de las velocidades v_1 y v_2 antes del choque.

A continuación exponemos el resultado que se obtiene en algunos casos particulares:

Casos	Velocidad después del choque	Observaciones
$m_1 = m_2$	$v'_1 = v_2$ $v'_2 = v_1$	Se intercambian las velocidades. Si $v_2 = 0$; $v'_1 = 0$ y $v'_2 = v_1$.
$m_2 \gg m_1$	$v'_1 = -v_1 + 2v_2$ $v'_2 = v_2$	La partícula pesada no modifica su velocidad.
$m_2 \gg m_1$ $v_2 = 0$	$v'_1 = -v_1$ $v'_2 = 0$	La partícula más pesada, que estaba en reposo, sigue en dicho estado. La pequeña retrocede; sale rebotada.
$m_2 \gg m_1$ $v_1 = 0$	$v'_1 = 2v_2$ $v'_2 = v_2$	La partícula más pesada no altera su velocidad, mientras que la más ligera avanza con doble velocidad que la incidente y en el mismo sentido.

Coefficiente de restitución. De la ecuación (b) se deduce: $v'_2 - v'_1 = v_1 - v_2$; se llama **coeficiente de restitución**, k , el cociente: $k = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2}$, que mide el grado de **elasticidad** del choque.

- Si $k = 0$, entonces $v'_2 = v'_1$ y el choque es **perfectamente inelástico**.
- Si $k = 1$, $v'_1 + v_1 = v'_2 + v_2$ y el choque es **elástico**.
- Si $0 < k < 1$, el choque es **inelástico**.

8. Momento angular de una partícula

Consideremos una partícula de masa m y sea O un punto fijo. Recibe el nombre de **momento angular o cinético** de la partícula respecto del punto O , el vector \vec{L}_O definido por

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \quad [5.15]$$

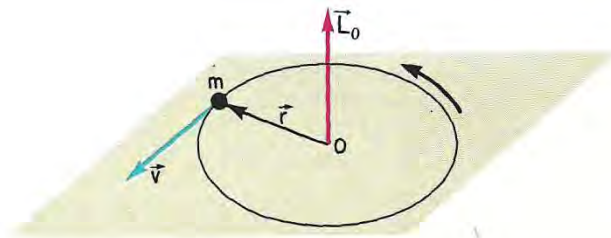


Fig. 5.30. \vec{L}_O , momento angular respecto del punto O .

donde \vec{r} , \vec{v} y \vec{p} representan, respectivamente, el vector de posición, la velocidad y la cantidad de movimiento de la partícula respecto de dicho punto (fig. 5.30).

Por definición de producto vectorial, el **momento angular** es un vector perpendicular al plano formado por \vec{r} y \vec{p} ; y su sentido se deduce de las reglas que definen este producto (regla del tornillo...).

El momento angular o cinético, cuyas unidades en el Sistema Internacional son $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, es una magnitud física que suele utilizarse en el estudio de movimientos **circulares**.

Ejercicio 11

En la figura 5.31 se representa la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol. Representar los vectores momento lineal y momento angular del planeta respecto del Sol.

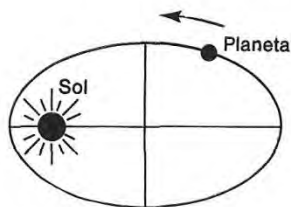


Fig. 5.31.

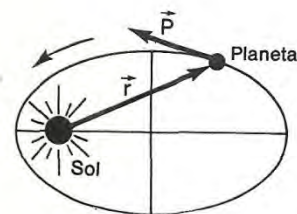


Fig. 5.32. Vector de posición y vector cantidad de movimiento.

SOLUCIÓN

El momento lineal \vec{p} (cantidad de movimiento) es el producto de la masa de la partícula por su velocidad: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$. Como el vector velocidad es tangente a la trayectoria, el vector \vec{p} también lo es (fig. 5.32).

El momento angular respecto del Sol es

$$\vec{L}_s = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

Los vectores \vec{r} y \vec{p} se han representado nuevamente en la figura 5.33, pero con origen común en el Sol, con objeto de facilitar la visualización del vector \vec{L}_s .

$$|\vec{L}_s| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin \alpha$$

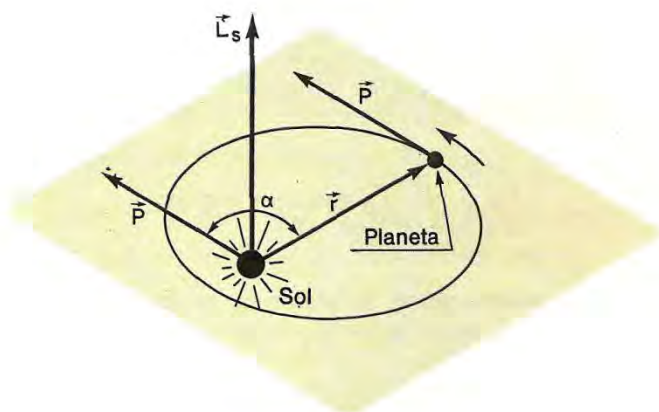


Fig. 5.33. Vector \vec{L}_s , momento angular del planeta respecto del Sol.

8.1. Teorema del momento angular

Estudiemos la derivada del momento angular respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad , \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad , \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{v} \wedge m\vec{v} = 0$$

pues \vec{v} y $m\vec{v}$ son vectores que tienen la misma dirección, la derivada queda:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_0 \quad [5.16]$$

siendo \vec{M}_0 el momento de la fuerza resultante respecto del punto O .

«La derivada del momento angular de una partícula respecto del tiempo con relación a un punto fijo O , es igual al momento de la resultante respecto del mismo punto O .» (Teorema del momento angular.)

8.2. Conservación del momento angular de una partícula

Según la ecuación [5.16], si el momento de la fuerza resultante es nulo, el momento angular de la partícula es constante, se conserva.

Un caso interesante en el que se conserva el momento angular es el de las **fuerzas centrales**, es decir, las fuerzas cuya línea de acción pasa por un punto fijo (centro de fuerza) y cuyo módulo depende de la distancia a dicho punto. En las fuerzas centrales el momento angular respecto al centro de fuerzas es constante, porque el vector de posición y el vector fuerza se encuentran en la misma dirección (fig. 5.34) y, tanto, el producto vectorial $\vec{r} \wedge \vec{F}$ es nulo, ya que $\sin(\vec{r}, \vec{F}) = 0$.

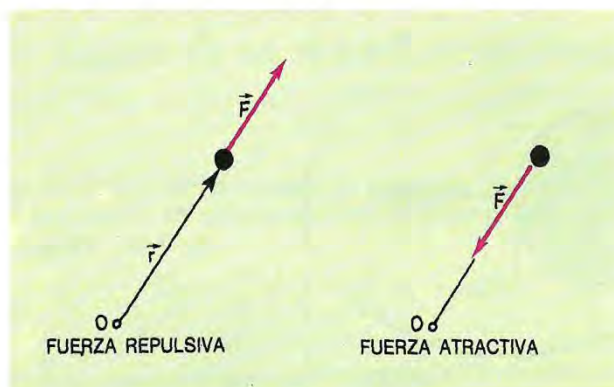


Fig. 5.34. Fuerzas centrales (O , es el centro de fuerza).

Ejercicio 12

Un satélite de la Tierra de masa m describe una órbita elíptica. Las distancias máxima y mínima a la superficie de la Tierra son 2 600 y 350 km, respectivamente. Si la velocidad máxima del satélite es de 26 000 km/h, hallar la velocidad de dicho satélite en los dos puntos de máximo y mínimo acercamiento.

Dato: radio de la Tierra, 6 400 km.

SOLUCIÓN

El satélite se mueve bajo la acción de la atracción gravitatoria terrestre, que es una fuerza central. En todos los puntos de la trayectoria el momento de la fuerza es nulo; por tanto, el momento angular del satélite respecto de la Tierra se conserva:

$$\vec{L}_{T_A} = \vec{L}_{T_B}$$

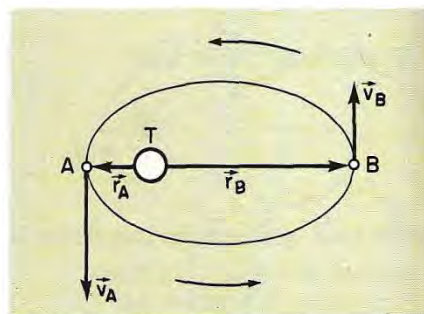


Fig. 5.35. Vectores posición y velocidad del satélite en las posiciones A y B.

es decir, $\vec{r}_A \wedge m\vec{v}_A = \vec{r}_B \wedge m\vec{v}_B$

en módulos, $r_A \cdot m \cdot v_A = r_B \cdot m \cdot v_B$

$$\frac{r_B}{r_A} = \frac{v_A}{v_B}$$

De esta ecuación, como $r_B > r_A$, la velocidad en A será superior a la de B; es decir, la máxima velocidad se presenta en el lugar de mayor proximidad. Por tanto, la velocidad en el punto que dista 350 km de la superficie es de 26 000 km/h.

La velocidad en el punto B es:

$$v_B = v_A \cdot \frac{r_A}{r_B} = 26\,000 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{r_A}{r_B}$$

Los valores r_A y r_B se deducen de la figura 5.36 que representa la situación descrita en el problema:

$$v_B = 26\,000 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{(6\,400 + 350) \text{ km}}{(6\,400 + 2\,600) \text{ km}} = 19\,500 \text{ km/h.}$$

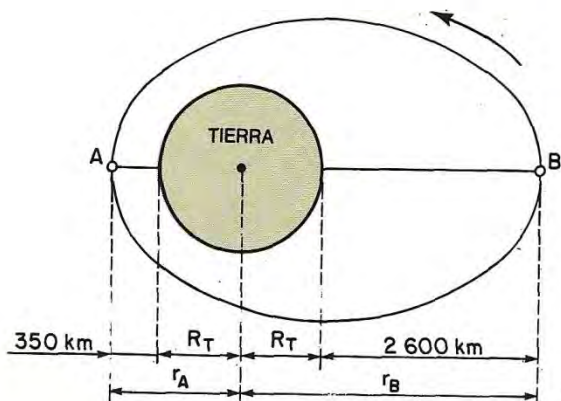


Fig. 5.36. Deducción de los valores r_A y r_B .

Teorema de las áreas

En el movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza central su momento angular es constante y, además, el vector de posición respecto del centro de la fuerza barre áreas iguales en tiempos iguales (fig. 5.37).

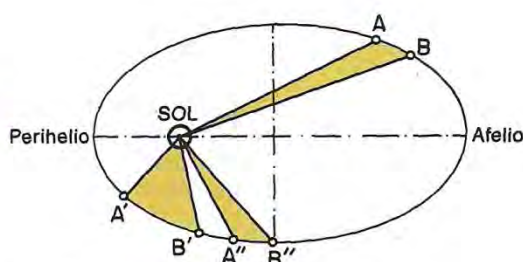


Fig. 5.37. Segunda ley de Kepler:
«El radio vector que une el Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.»

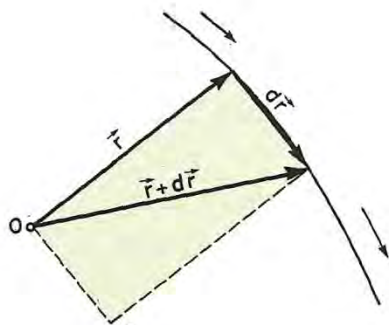


Fig. 5.38.
Área del paralelogramo = $|\vec{r} \wedge d\vec{r}|$.
Área barrida por $\vec{r} = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge d\vec{r}|$.

Teniendo en cuenta la relación entre el área y el producto vectorial (párrafo 1.8.1), el área dA barrida por el vector de posición \vec{r} en un intervalo de tiempo dt es (fig. 5.38):

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge d\vec{r}|$$

Por la definición de velocidad, $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$; por tanto,

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v} \cdot dt|$$

y el área barrida en la unidad de tiempo («velocidad areolar») se deduce de esta última ecuación:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v}|$$

Al ser $|\vec{L}| = |\vec{r} \wedge m\vec{v}|$, la velocidad areolar expresada en función del momento angular es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{L}|}{m}$$

y como $|\vec{L}|$ y m son constantes, «la velocidad areolar de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central es constante» (teorema de las áreas).

9. Momento angular de un sistema de partículas

El momento angular o cinético de un sistema de partículas respecto de un punto es la suma del momento angular de cada partícula del sistema respecto de dicho punto:

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n (\vec{L}_{0i}) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i)$$

El momento angular de un sistema de partículas respecto de un punto, y su valor cuando el punto de referencia es el centro de masas, están relacionados de forma análoga a la establecida en el apartado 5.5 para la energía cinética:

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0_{CM}} + \vec{L}_C$$

en la que:

- \vec{L}_0 es el momento angular del sistema respecto del punto O .
- $\vec{L}_{0_{CM}}$ es el momento angular del centro de masas respecto del punto O .
- \vec{L}_C es el momento angular del sistema respecto del centro de masas.

El cuadro adjunto presenta las diversas relaciones entre los valores de las magnitudes estudiadas según se refieran al sistema de referencia L o al sistema de referencia del centro de masas (sistema de referencia C).

Magnitud del sistema	Valor para el C.M.	Valor respecto del C.M.	Relación entre estos valores
$\vec{p} = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i)$	$\vec{p}_{CM} = M \vec{v}_{CM}$	$\vec{p}_C = \sum_{i=1}^n (m_i \vec{v}_i^*) = 0$	$\vec{p} = \vec{p}_{CM}$
$E_c = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$	$E_{c_{CM}} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$	$E_{c_c} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^{*2}$	$E_c = E_{c_{CM}} + E_{c_c}$
$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i)$	$\vec{L}_{0_{CM}} = \vec{r}_{CM} \wedge M \vec{v}_{CM}$	$\vec{L}_C = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i^*)$	$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0_{CM}} + \vec{L}_C$

Nota:

Los valores con asterisco corresponden al sistema de referencia C (centro de masas). Por ejemplo, \vec{v}_i^* simboliza la velocidad de la partícula i respecto del centro de masas.

9.1. Teorema del momento angular (sistema de partículas)

Consideremos la partícula i -ésima. La ecuación [5.16] (teorema del momento angular) permite escribir:

$$\frac{d\vec{L}_{0i}}{dt} = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

Si la resultante \vec{F}_i se descompone como suma de la resultante de las fuerzas externas más la resultante de las fuerzas internas que actúan sobre dicha partícula,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{ext_i} + \vec{F}_{int_i}$$

se tiene:

$$\frac{d\vec{L}_{0i}}{dt} = \vec{r}_i \wedge (\vec{F}_{ext_i} + \vec{F}_{int_i}) = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ext_i} + \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{int_i}$$

Teniendo presente la definición de momento de una fuerza,

$$\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{int_i} = \vec{M}_{0_{int_i}} \quad ; \quad \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ext_i} = \vec{M}_{0_{ext_i}}$$

Para todo el sistema se puede escribir:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \vec{L}_{0_i} \right) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{0_{int_i}} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_{0_{ext_i}}$$

Consideremos el caso de un sistema formado por dos partículas, y sean \vec{F}_{AB} y \vec{F}_{BA} las fuerzas internas (de repulsión) que se ejercen (fig. 5.39).

El término $\sum_{i=1}^n \vec{M}_{0_{int_i}}$ vale:

$$\sum_{i=1}^2 \vec{M}_{0_{int_i}} = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_{AB} + \vec{r}_B \wedge \vec{F}_{BA}$$

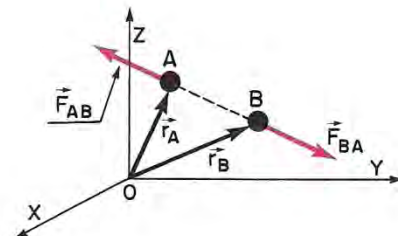


Fig. 5.39. \vec{F}_{AB} y \vec{F}_{BA} , fuerzas internas.

Teniendo en cuenta que $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$,

$$\sum_{i=1}^2 \vec{M}_{0_{int_i}} = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_{AB} + \vec{r}_B \wedge (-\vec{F}_{AB}) = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \wedge \vec{F}_{AB}$$

En la figura 5.40 se han dibujado los vectores \vec{F}_{AB} y $(\vec{r}_A - \vec{r}_B)$. De dicha figura se deduce:

$$\begin{aligned} \vec{r}_A &= \Delta\vec{r} + \vec{r}_B \\ \vec{r}_A - \vec{r}_B &= \Delta\vec{r} \end{aligned}$$

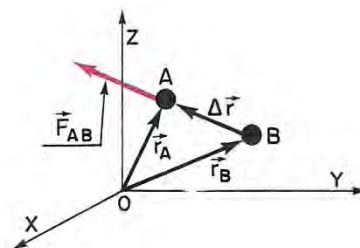


Fig. 5.40.

por lo que el producto $(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \wedge \vec{F}_{AB}$ es igual al de los vectores $\Delta\vec{r} \wedge \vec{F}_{AB}$, dos vectores que tienen la misma dirección y, por tanto, su producto vectorial es nulo.

En este sistema de dos partículas, como en los demás sistemas de partículas, el momento total de las fuerzas internas es nulo, por tanto,

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{0_{ext_i}}$$

Si la suma de los momentos de las fuerzas externas la representamos por $\vec{M}_{0_{ext}}$, podemos escribir:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_{0_{ext}} \quad [5.17]$$

Es decir, «el momento total de las fuerzas externas respecto de un punto fijo es igual a la derivada respecto del tiempo del momento angular total del sistema, respecto de dicho punto» (teorema del momento angular).

De acuerdo con esta ecuación, podemos afirmar que «el momento angular de un sistema de partículas se conserva siempre que el momento total de las fuerzas externas sea nulo» (teorema de conservación del momento angular).

Cuestiones

- 5.1. El centro de masas de un sistema de dos partículas está situado en la línea que las une y en su punto medio (cierto/falso).
- 5.2. El centro de masas de un sistema de partículas está localizado en la partícula más próxima al centro geométrico del sistema (cierto/falso).
- 5.3. La cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es igual a su masa total multiplicada por el vector velocidad del centro de masas (cierto/falso).
- 5.4. La resultante de las fuerzas internas que actúan sobre una partícula de un sistema siempre es nula (cierto/falso).
- 5.5. Aplicando el teorema de conservación de la cantidad de movimiento, justificar la velocidad de retroceso de las armas de fuego.

- 5.6. La figura 5.41 representa un vagón que está al borde de un precipicio. ¿Hacia dónde debe dirigirse la persona si desea salvarse? No puede quedarse en la posición inicial; debe ir hacia la derecha o hacia la izquierda. Despreciar el rozamiento con la vía.

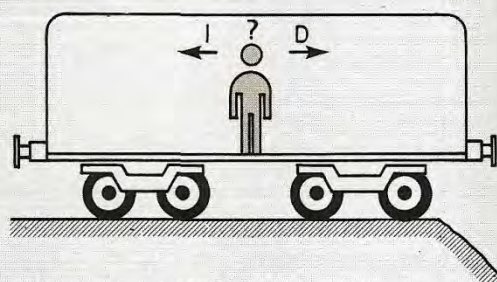


Fig. 5.41. ¿Hacia dónde debe dirigirse?

- 5.7. Si en un sistema de partículas se conserva la cantidad de movimiento, ¿podemos asegurar que también se conserva la energía cinética? Razonar la respuesta, utilizando ejemplos aclaratorios.
- 5.8. La ecuación que relaciona la energía cinética de un sistema con la de su centro de masas es:

$$E_c = \frac{1}{2} M \cdot v_{CM}^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} m_i \cdot v_i^{*2} \right)$$

Indicar el significado de cada uno de los símbolos.

- 5.9. Una granada explota, dividiéndose en tres fragmentos iguales. Dos de ellos salen despedidos perpendicularmente entre sí con la misma velocidad. ¿El tercer fragmento puede salir despedido formando un ángulo de 30° con uno de ellos?
- 5.10. ¿Qué disco posee mayor cantidad de movimiento: un LP que gira a 33 rpm o un «single» que lo hace a 45 rpm?
- 5.11. Todo sistema de partículas que posee cantidad de movimiento, ¿tiene energía cinética? Todo cuerpo que posee energía cinética, ¿tiene cantidad de movimiento?
- 5.12.* Un cuerpo de masa M tiene igual energía cinética de traslación que otro B de masa $m = 10M$, ¿cuál de los dos tiene mayor cantidad de movimiento? Justificar la respuesta.
- 5.13.* En un choque elástico la energía de cada partícula ¿es la misma antes y después del choque?
- 5.14. Demostrar que la pérdida de energía cinética en un choque perfectamente inelástico viene dada por la expresión

$$\Delta E_c = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot (v_1 - v_2)^2}{2 \cdot (m_1 + m_2)}$$

siendo m_1 y m_2 las masas y v_1 y v_2 las velocidades iniciales.

Universidad de Cantabria, 1981

Universidad de Valladolid, 1985

- 5.15. Demostrar que una partícula de masa m_1 que choca elásticamente con otra de masa m_2 , que está en reposo, le transfiere una energía cinética igual a la fracción

$$\frac{4 \cdot m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

de la que tenía inicialmente.

- 5.16. Una partícula se mueve en el eje X por la acción de una fuerza constante que le aleja del origen de coordenadas. Estudiar la variación en el tiempo del momento angular de la partícula respecto del origen.
- 5.17.* Una partícula de peso $m\vec{g}$ se mueve suspendida de un punto P por un hilo de masa despreciable. Describe una trayectoria circular como indica la figura 5.42. El ángulo entre el hilo y la vertical es α y la velocidad angular, constante, ω .
- Calcular el momento angular de la partícula respecto del punto O .
 - Demostrar que el momento angular respecto de P no es constante.

Universidad de Zaragoza, 1988

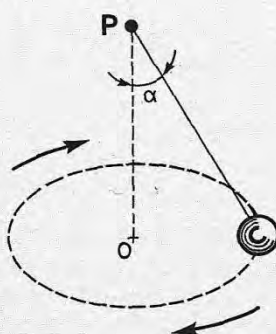


Fig. 5.42. Péndulo cónico.

Problemas

- 5.1. Dos masas de 6 y 9 kg se encuentran separadas 3 m, ¿dónde está situado el centro de masas?
- 5.2. Hallar el centro de masas de un alambre homogéneo que tiene forma de triángulo equilátero de 1 m de lado.
- 5.3. En un disco homogéneo de radio R se ha practicado un agujero circular de radio $1/2 R$ como muestra la figura 5.43. Hallar el centro de masas de la pieza.

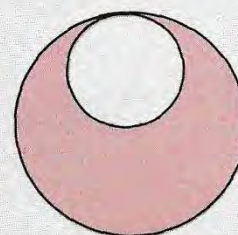


Fig. 5.43.

- 5.4. Las posiciones y velocidades de tres partículas que avanzan en el eje X son, en un instante dado:

masa (kg)	velocidad (m/s)
2	5
4	-10
6	10

Calcular, en dicho instante:

- cantidad de movimiento total del sistema;
- velocidad del centro de masas.

- 5.5. Una partícula de 5 kg se mueve a 3 m/s en el eje X . Al cabo de 15 segundos explota y se escinde en dos partes de 4 y 1 kg. La fracción de 4 kg se mueve formando un ángulo de 30° con dicho eje, a 9 m/s. Calcular la posición del centro de masas 10 s después de la explosión.
- 5.6. Un vaso, inicialmente en reposo sobre una mesa, estalla de forma espontánea en tres trozos que se mueven horizontalmente sobre la mesa. Dos de ellos, de igual masa, salen disparados con la misma velocidad de 10 m/s, formando entre sí un ángulo de 37° . El tercero tiene una masa triple de uno de los otros. Hallar la velocidad del tercer fragmento y la dirección en la que se mueve. ¿Qué velocidad posee el centro de masas inmediatamente después de la explosión?
- 5.7. Una granada, moviéndose horizontalmente a 2 m/s, hacia la derecha, explota en tres fragmentos de masas: $m/2$, $m/3$ y $m/6$, respectivamente. Después de la explosión, el segundo fragmento se mueve horizontalmente a 5 m/s, el primero forma un ángulo de 45° con la horizontal y el tercero, un ángulo de -45° (fig. 5.44). Calcular las velocidades del primer y tercer fragmento.

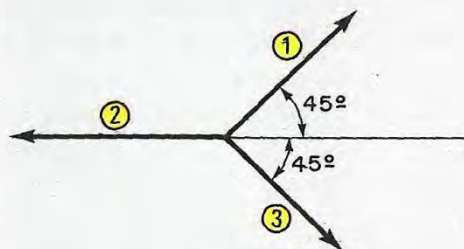


Fig. 5.44.

- 5.8. En la figura 5.45 se muestra el sistema formado por un muelle comprimido por dos cuerpos A y B de masas $m_A = 2$ kg y $m_B = 5$ kg, que se encuentran en reposo sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Al soltar estos cuerpos de forma simultánea, el cuerpo A sale despedido con $v = 4$ m/s. Calcular la velocidad del cuerpo B y la energía cinética del sistema, antes y después de soltar dichos cuerpos.

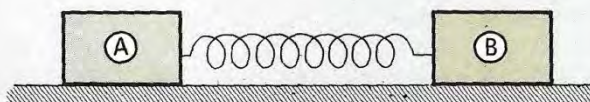


Fig. 5.45.

- 5.9. Dos cuerpos de masas $m_1 = 1$ g y $m_2 = 5$ g están en reposo separados entre sí 10 cm en una superficie horizontal. Están cargados eléctricamente de modo que se atraen. Si los soltamos, ¿a qué distancia de la posición inicial de m_1 chocarán?
- 5.10. Sobre un vagón de mercancías descubierto que avanza libremente en una vía horizontal cae bruscamente un alud de nieve. La masa del vagón es de 20 000 kg; la masa de la nieve, de 4 000 kg y la velocidad inicial del vagón era de 54 km/h. ¿Cuál es la velocidad del vagón con la nieve?
- 5.11.* Un patinador de 70 kg lanza un cuerpo de 1 kg a 20 m/s hacia adelante. Describir lo que ocurre, si el coeficiente de rozamiento entre los patines y el suelo es 0,1.
- Universidad Autónoma de Barcelona, 1986
- 5.12. Un pez de 8 kg está nadando con $v = 0,5$ m/s hacia la derecha. Se traga otro pez de 0,25 kg que nada hacia él a 1,5 m/s. Calcular la velocidad del pez mayor inmediatamente después de tragarse al pequeño.
- 5.13.* Un hombre de 60 kg va corriendo a 8 km/h y da alcance a una carretilla de 80 kg que marcha a 2,9 km/h, montándose en ella. Calcular la velocidad adquirida por la carretilla inmediatamente después de subirse el hombre.

- 5.14. En el punto A de la figura 5.46 se rompen los frenos de un vagón de 20 t en reposo. Debido a esta circunstancia, el vagón desciende por la rampa y en el tramo horizontal choca con otro vagón que se encuentra en reposo, al que no se le han aplicado los frenos, de masa 10 t. Ambos vagones quedan empotrados y se dirigen hacia la pendiente de la derecha, por la que suben hasta detenerse a una altura H . Calcular la altura H , despreciando el rozamiento en todos los tramos.

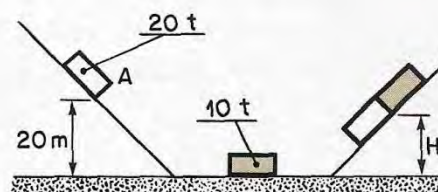


Fig. 5.46.

- 5.15. Un automóvil de 2 000 kg avanza a lo largo de una calle, en dirección Este, y choca a la velocidad de 50 km/h con un camión de 4 t que atraviesa la misma calle en dirección Sur, a la velocidad de 20 km/h. Como consecuencia del choque, ambos vehículos quedan unidos; ¿cuál es la magnitud y dirección de su velocidad inmediatamente después del choque?
- 5.16. Sea M la masa de un péndulo balístico de longitud L . Hallar la velocidad del proyectil de masa m si el péndulo sube hasta quedar el hilo horizontal.
- 5.17.* Un proyectil de 10 g se dispara horizontalmente contra un bloque de madera de 4 kg en reposo sobre un suelo horizontal con un coeficiente de rozamiento 0,25. La bala queda incrustada en la madera y el conjunto recorre 1,84 m hasta pararse. Calcular la velocidad del proyectil en el momento de chocar con la madera.
- 5.18.* Dos bloques de masas respectivas 15 y 5 g se mueven en la misma dirección, pero en sentido opuesto, con velocidades de 10 y 5 m/s, respectivamente. Calcular sus velocidades después del choque elástico.
- 5.19.* Resolver el problema anterior suponiendo que ambos cuerpos avanzan en el mismo sentido y que el más lento es alcanzado por el más rápido.
- 5.20.* Un péndulo simple de 2 m de longitud se separa de su posición de equilibrio un ángulo de 37° y se abandona libremente. Calcúlese:
- su velocidad en el punto más bajo de la trayectoria;
 - si la masa del péndulo es de 100 g y choca con otra masa puntual de 200 g situada en ese punto, ¿cuál será la velocidad de cada una de las masas después del choque, si es completamente elástico?

Universidad de Santiago, 1987

- 5.21. Una bola de hockey B , en reposo sobre una superficie lisa de hielo, es golpeada por una segunda bola A , de igual masa, que se mueve inicialmente a 24 m/s y desviada 30° de su dirección inicial. La bola B adquiere una velocidad que forma un ángulo de 45° con la velocidad inicial. Calcular la velocidad de cada bola después del choque y discutir si es elástico.
- 5.22.* Una bala de 10 g choca contra un bloque de 990 g que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa, quedando incrustada en él. El bloque está unido a un resorte cuya constante elástica es 1 N/m. Si el choque comprime el resorte 10 cm, calcular:
- velocidad del bloque inmediatamente después del choque;
 - velocidad inicial de la bala.

Universidad de Barcelona, 1984

- 5.23. Una partícula de 2 kg se mueve con velocidad de $4\vec{i}$ m/s y su vector de posición, en el instante inicial, es $6\vec{j}$ metros. Calcular su momento angular respecto del origen de coordenadas.
- 5.24. La ecuación del movimiento de un cuerpo de 2 kg es:

$$\vec{r} = 3t\vec{i} - 2t^2\vec{j}$$

Calcular el momento angular del cuerpo respecto del origen de coordenadas en el instante $t = 5$ s.

- 5.25. Un objeto pequeño está unido a una cuerda que pasa por el interior de un tubo, como indica la figura 5.47. El objeto describe un movimiento circular de 0,5 m de radio en el plano horizontal, con velocidad angular de 20 rpm. Al tirar de la cuerda hacia abajo se reduce el radio de la trayectoria. ¿Cuál es la velocidad angular cuando el radio mide 0,25 m?

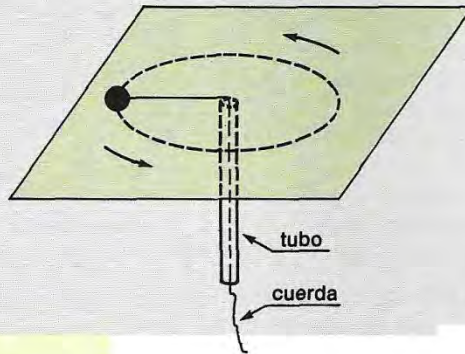


Fig. 5.47.

Respuesta a los problemas

- 5.1. A 1,8 m de la partícula de 6 kg.
 5.2. $x_{CM} = 0,5 \text{ m}$ $y_{CM} = 0,29 \text{ m}$.
 5.3. $x_{CM} = 0$ $y_{CM} = (-1/6)R$.
 5.4. a) $30\vec{i} \text{ kg m/s}$ b) $2,5\vec{i} \text{ m/s}$.
 5.5. 75 m.
 5.6. 6,3 m/s , 198,5° , 0 m/s.
 5.7. $v_1 = 5,2 \text{ m/s}$ $v_3 = 15,6 \text{ m/s}$
 5.8. $v_B = 1,6 \text{ m/s}$, $E_c \text{ (antes)} = 0 \text{ J}$, $E_c \text{ (después)} = 22,4 \text{ J}$.
 5.9. 8,3 cm.
 5.10. 45 km/h (12,5 m/s).
 5.11. retrocede 4 cm.
 5.12. 0,44 m/s.
 5.13. 5 km/h (1,4 m/s).
 5.14. 8,9 m.
 5.15. 21,3 km/h (5,9 m/s) 38° 39' Sudeste.
 5.16. $v = \frac{m + M}{m} \cdot \sqrt{2gL}$.
 5.17. 1 203 m/s.
 5.18. $v_{15} = 2,5 \text{ m/s}$ $v_5 = 17,5 \text{ m/s}$.
 5.19. $v_{15} = 7,5 \text{ m/s}$ $v_5 = 12,5 \text{ m/s}$.
 5.20. a) 2,8 m/s; b) $v_{100} = -0,93 \text{ m/s}$; $v_{200} = 1,87 \text{ m/s}$.
 5.21. $v_A = 17,6 \text{ m/s}$ $v_B = 12,4 \text{ m/s}$.
 No se conserva la energía cinética.
 5.22. a) 0,1 m/s; b) 10 m/s.
 5.23. $-48\vec{k}$.
 5.24. $-300\vec{k}$.
 5.25. $\omega = 8,38 \text{ rad/s}$ (= 80 rpm).

TEMA VI

FLUIDOS

Estática de fluidos



A. HIDROSTÁTICA

La hidrostática estudia las fuerzas que intervienen en los líquidos que están en equilibrio.

1. Propiedades de los líquidos

Hechos de observación

Vamos a apuntar algunos hechos o datos de observación fácilmente comprobables:

- Los líquidos adoptan la *forma del recipiente* que los contiene, pero su volumen permanece constante.
- Cualquier cuerpo puede ser introducido con facilidad en el interior de los líquidos con tal de que estos tengan superficie libre en contacto con la atmósfera.

Densidad o masa en volumen

Densidad (ρ) de una sustancia es la masa que hay en su unidad de volumen.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

En el SI la densidad o masa en volumen se expresa en kilogramo por metro cúbico (kg/m^3).

Ejemplo 1

Si la masa de una canica es 8,20 g y su volumen $3,50 \text{ cm}^3$, ¿cuál es su densidad en kg/m^3 ?

$$\rho = \frac{8,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}{3,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}$$
$$\rho = 2\,342,86 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Presión

Presión es la fuerza ejercida sobre la unidad de superficie. Se halla dividiendo la fuerza entre la superficie.

$$p = \frac{F}{S}$$

En el SI la unidad de presión es el pascal (Pa). Un pascal es la presión uniforme que, actuando sobre una superficie plana de 1 metro cuadrado, ejerce perpendicularmente a esta superficie una fuerza total de 1 newton (N).

$$1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2}$$

- La *superficie libre* de los líquidos en equilibrio es *plana y horizontal* en extensiones pequeñas. Con todo, en la zona de contacto con las paredes del recipiente no lo es, debido a la formación de meniscos. Para extensiones grandes, la superficie es aproximadamente esférica (curvatura de la hidrosfera terrestre).
- Los líquidos *fluyen* con facilidad. Aunque esta propiedad varía mucho de unos a otros. En un mismo líquido la fluidez aumenta con la temperatura.
- Si una botella está llena de un líquido, no se puede introducir un tapón por más que lo intentes, a no ser que salga parte del líquido (Fig. 7.1).

Los hechos de observación apuntados pueden explicarse sabiendo que los líquidos poseen principalmente *dos propiedades generales*: son *incompresibles y fluidos*.

Un modelo del estado líquido

Estas propiedades de los líquidos se comprenden mejor si suponemos que los líquidos están formados por partículas muy pequeñas (las moléculas) que apenas dejan espacios libres entre ellas. Según este modelo, no sería posible reducir el volumen del líquido. Por otra parte las partículas pueden deslizarse unas sobre otras a la menor fuerza ejercida sobre la masa líquida, como los perdigones contenidos en un recipiente. Tan sólo las pequeñas fuerzas de cohesión entre las moléculas puede impedir en parte el deslizamiento de las mismas.

Así este modelo corpuscular explica las dos propiedades más destacadas de los líquidos: la *movilidad o fluidez* y la *incompresibilidad*.

- La *movilidad o fluidez* es la propiedad que tienen las partículas de los líquidos de poderse deslizar o fluir unas sobre otras. Los líquidos *poco fluidos* se dice que son *viscosos*. La fluidez aumenta con la temperatura.
- La *incompresibilidad* es la propiedad que impide a los líquidos reducir su volumen por compresión.

2. Presión en el interior de los líquidos

La presión en el interior de los líquidos es debida a la parte de líquido que está por encima. Si esto es así, los puntos de mayor profundidad o más alejados de la superficie libre deben soportar más presión. Así sucede, en efecto, según se desprende de muchos hechos observados y de diversas experiencias.

Hechos observados

- Los *batiscafos*, diseñados para investigar las profundidades marinas, tienen un casco de acero más resistente aún que el de los submarinos para que puedan soportar la enorme presión hidrostática a la que están sometidos.

- Los *submarinistas* no pueden descender a grandes profundidades, aunque lleven botellas de aire para respirar, pues no soportarían la presión del agua. Los buzos se protegen con trajes apropiados.

Experiencias

① **Cápsula manométrica.** Consiste en una caja cilíndrica abierta por una base en la que se pone una membrana de goma. En la otra base se ajusta un tubo de plástico o de vidrio cuyo extremo va prolongado con un manómetro de agua coloreada. Las dos ramas del manómetro están al mismo nivel si sobre la membrana no se ejerce fuerza. Bastará que se presione suavemente sobre dicha membrana para que el manómetro lo acuse, desnivelándose. Así, cuando sumergimos la cápsula manométrica en un recipiente con agua, la presión ejercida por el agua provoca en el manómetro la diferencia de niveles. Con este aparato podemos comprobar cómo la *presión crece con la profundidad* (Fig. 7.2).

② Tomemos un tubo, uno de cuyos extremos puede cerrarse mediante un disco poco pesado y que puede sujetarse por medio de un hilo como se indica en el grabado (Fig. 7.3).

- Si se introduce el tubo, cerrado con el disco, en el interior del líquido, el disco no se cae aunque soltemos el hilo debido a la presión que sobre el mismo ejerce el líquido.
- Si ahora echamos líquido en el interior del tubo, mediante un cuentagotas, el disco obturador se desprende cuando el nivel del líquido en el tubo y en la vasija coinciden.

Según esta experiencia, la *fuerza ejercida por el líquido sobre el obturador es igual al peso de la columna de líquido que se ha echado en el interior del tubo.*

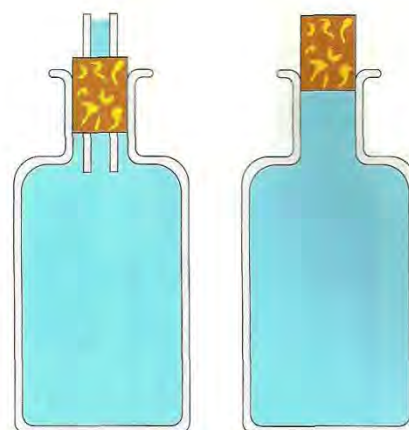


Fig. 7.1. Los líquidos son incompresibles: no modifican su volumen.

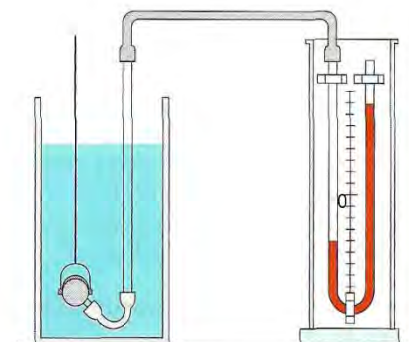


Fig. 7.2.

Cálculo de la presión hidrostática

La experiencia anterior nos da una pauta para calcular la presión en el interior de un líquido en equilibrio o *presión hidrostática*.

Pero el peso de la columna líquida es igual a la masa (m) por la gravedad (g). La masa a su vez es igual al volumen (V) del líquido por su densidad (ρ) que es igual en todos los puntos por ser los líquidos incompresibles. Es decir:

$$P = mg = V\rho g$$

Y como el volumen del cilindro líquido es igual a la sección (S) por la altura (h), se obtiene:

$$P = Sh\rho g$$

Sustituyendo en la fórmula de la presión:

$$p = \frac{P}{S} = \frac{Sh\rho g}{S} = \rho gh \quad [7.1]$$

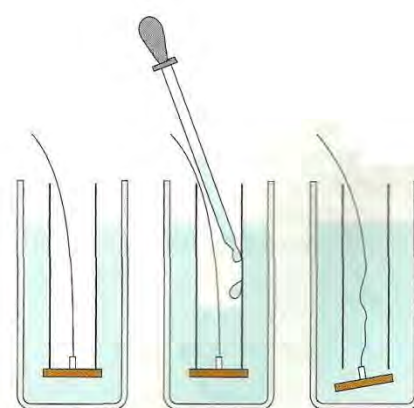


Fig. 7.3. El disco obturador se desprende cuando el nivel del líquido en el tubo y en la vasija coinciden.

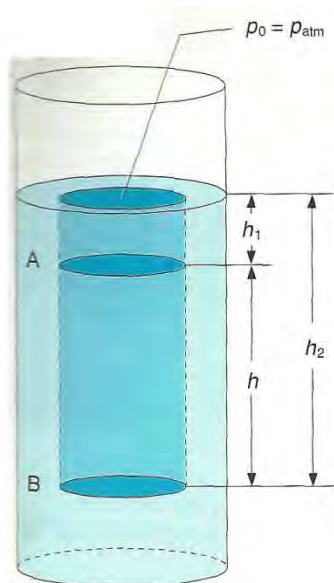


Fig. 7.4.

Ejemplo 2

¿Qué presión hidrostática soporta la escotilla de un submarino que navega a 50 m de profundidad? ¿Qué fuerza deberíamos ejercer para abrir la compuerta si el radio es de 40 cm? (Densidad del agua de mar $1,1 \text{ g/cm}^3$.)

- La presión se calcula sustituyendo en la [7.1]

$$\rho = 1,1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1\,100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$p = \rho gh = 1\,100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50 \text{ m}$$

$$p = 539\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 539\,000 \text{ Pa}$$

$$F = pS = 539\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0,5024 \text{ m}^2$$

$$F = 270\,793,6 \text{ N}$$

Ya que

$$S = \pi R^2 = 3,14 \cdot (0,4 \text{ m})^2$$

$$S = 0,5024 \text{ m}^2$$

Nota: Se pregunta por la presión hidrostática. Si nos pidiesen la presión total habría que sumar la que hay en la superficie libre: la presión atmosférica.

La presión hidrostática ejercida en el interior de un líquido por el propio líquido es igual a la densidad del mismo por la gravedad y por la distancia entre ese punto y la superficie libre del líquido.

Principio fundamental de la hidrostática

Si consideramos dos puntos A y B situados a la distancia h_2 de la superficie libre, la presión de las columnas líquidas respectivas son:

$$p_1 = \rho gh_1 \quad \text{y} \quad p_2 = \rho gh_2$$

La diferencia de presión en el interior del líquido entre puntos A y B será:

$$p_2 - p_1 = \rho gh_2 - \rho gh_1 = \rho g(h_2 - h_1)$$

$$p_2 - p_1 = \rho gh$$

El principio fundamental de la hidrostática dice:

La diferencia de presión entre dos puntos A y B de un líquido en equilibrio es igual al producto de la densidad del líquido por la gravedad y por la distancia h entre los niveles de esos dos puntos.

3. Aplicaciones y consecuencias del principio fundamental de la hidrostática

- La primera es mera aclaración de la fórmula [7.2]: La diferencia de presión entre dos puntos del interior de un líquido, supuesta g constante, varía solamente con la densidad (constante para cada líquido) y con la diferencia de nivel. No influyen, por tanto, ni la forma ni la magnitud del recipiente.
- La presión en el interior de un líquido en un punto a la distancia h de la superficie, aplicando la [7.2] a este caso resulta:

$$p = p_0 + \rho gh$$

En donde p_0 es la presión exterior ejercida sobre la superficie libre. Con frecuencia en la superficie libre (en contacto con la atmósfera) solamente se ejerce la presión atmosférica.

- La presión sobre las paredes del recipiente o sobre cualquier objeto situado en el interior del líquido, se ejerce perpendicularmente a su superficie y depende de los mismos factores que la presión en cualquier punto del líquido.

- La *superficie libre* de un líquido en equilibrio es plana y horizontal, ya que la única presión en todos los puntos de la superficie es la presión atmosférica:

$$p - p_0 = \rho gh = 0 \quad \text{ya que} \quad p = p_0$$

Como ρ y g son distintas de cero, $h = 0$.

4. Los líquidos en equilibrio

Cuando los líquidos están en reposo sabemos por experiencia que su superficie libre es horizontal.

Veamos varios casos que pueden presentarse.

- **Un solo líquido en un recipiente**

Cuando un recipiente contiene un solo líquido, su superficie libre es plana y horizontal. En efecto, si se agita el líquido y después se deja en reposo de forma que no actúen otras fuerzas que las gravitatorias, es decir, el peso de sus moléculas, éstas resbalan y tienden a ocupar las posiciones más bajas, la mínima distancia al centro de la Tierra adoptando así una *superficie horizontal*. Por esto las superficies de mares y océanos son aproximadamente esféricas.

- **Un solo líquido en vasos comunicantes**

Si se echa un líquido en varios vasos comunicados entre sí, la superficie libre del líquido en cada uno alcanza el mismo nivel, es decir, pertenece a la misma horizontal. Tiene que ser así como consecuencia de la movilidad de las moléculas y la acción gravitatoria.

El *tubo de nivel* muy utilizado por los albañiles es una aplicación de los vasos comunicantes. Consiste en un tubo flexible de plástico transparente que se llena de agua. El nivel de agua en los dos extremos, una vez que el líquido está en equilibrio, es el mismo.

- **Varios líquidos no miscibles en un vaso**

Si se echan varios líquidos no miscibles en un solo vaso, los líquidos se situarán separados en columnas superpuestas y en orden decreciente de densidades de abajo arriba. Las superficies de separación son horizontales, salvo en los bordes debido a la formación de meniscos (Fig. 7.7).

- **Dos líquidos no miscibles en un tubo en U**

Experiencia

Para *determinar* de forma sencilla la *densidad* de un *líquido no miscible* en *agua* se toma un tubo de vidrio de unos 60 cm de largo y se dobla en forma de U calentándolo en un soplete o mechero de gas. Después se sujeta verticalmente en un soporte. Por uno de sus extremos se echa agua destilada y por el otro aceite y otro líquido no miscible en agua.

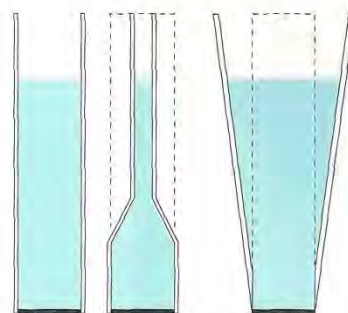


Fig. 7.5. La fuerza ejercida por un líquido sobre el fondo del recipiente que lo contiene es igual al peso de una columna de ese líquido que tenga como base el fondo del recipiente y como altura la distancia a la superficie. Esta fuerza no depende, por lo mismo, de la forma del recipiente ni de la cantidad de líquido.

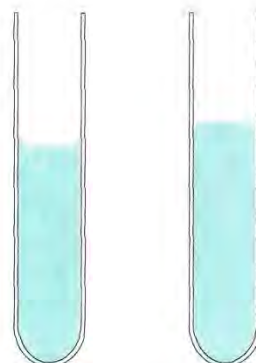


Fig. 7.6. En la zona de la superficie libre del líquido que limita con las paredes del recipiente, tienen lugar, además de las fuerzas de cohesión entre las moléculas del líquido, las fuerzas de adhesión entre las moléculas del líquido y del recipiente. Como resultante de esas fuerzas intermoleculares, aparecen los meniscos.



Fig. 7.7. De abajo arriba: mercurio, tetracloruro de carbono coloreado con yodo, agua y gasolina.

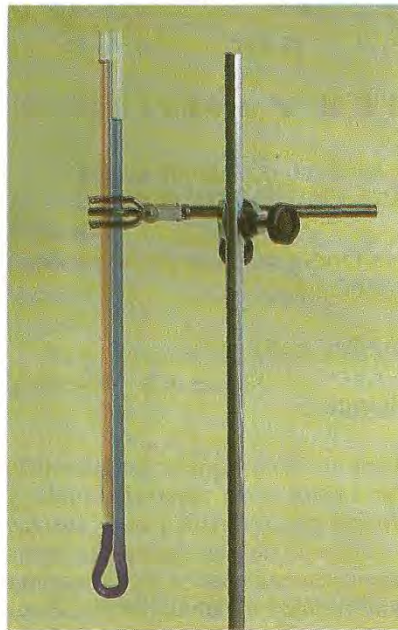
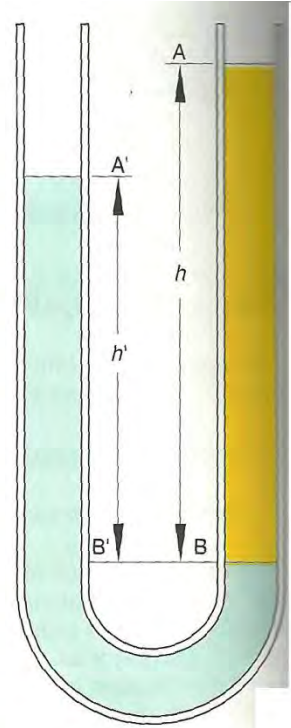


Fig. 7.8.



Ejemplo 3

¿Qué columna de agua ejercerá la misma presión que una de 12 mm de mercurio? Densidad del mercurio:

$$\rho' = 13,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

De la [7.3]

$$h = \frac{\rho' h'}{\rho} = \frac{13,6 \cdot 12 \text{ mm}}{1}$$

$$h = 163,2 \text{ mm} = 16,32 \text{ cm}$$

Cuando los líquidos estén en equilibrio, la presión de la columna de agua desde B' a A' debe ser igual a la presión de la columna de aceite desde B a A. En otros términos la presión en el interior de los dos líquidos en el nivel BB' es la misma:

$$\rho g h = \rho' g h'$$

$$\rho h = \rho' h'$$

[7.3]

Siendo ρ y ρ' las densidades del aceite y del agua, respectivamente; h y h' son las alturas de las columnas de los líquidos.

Mediante la relación [7.3] se puede hallar la densidad del aceite o del líquido en cuestión conociendo la densidad del agua destilada. Deberemos medir las alturas h y h' .

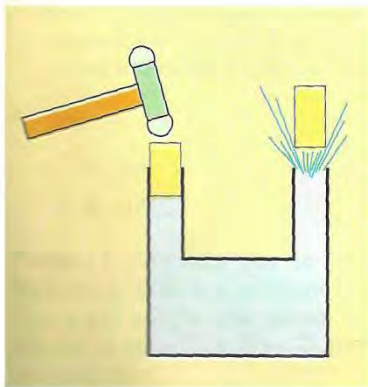


Fig. 7.9. Los líquidos transmiten la presión.

5. Transmisión de la presión en los líquidos. Principio de Pascal

Para comprender cómo se transmiten las presiones a través de un líquido reflexionemos sobre esta

Experiencia

Tomamos un frasco de dos bocas, lo llenamos de agua y lo cerramos con sendos tapones. Damos un golpe «seco» en uno de ellos y veremos cómo el otro sale disparado al mismo tiempo. La

presión ejercida sobre el primer tapón, se ha transmitido a todos los puntos del agua, debido a que los líquidos son incompresibles. Las paredes del recipiente han soportado ese incremento de presión, pero no así el tapón que ha salido impulsado por la fuerza ejercida sobre el mismo.

El **principio de Pascal** es en realidad una consecuencia del principio general de la hidrostática.

Según este principio un aumento de presión en un punto o zona de un líquido se transmite de forma súbita y por igual a todos los puntos del líquido.

Tiene que suceder así, ya que partiendo de la fórmula

$$p_2 - p_1 = \rho gh$$

si p_1 aumenta en un cierto valor, como los líquidos son incompresibles el valor ρgh se mantiene constante, por lo que p_2 tiene que aumentar en el mismo valor que p_1 .

6. Aplicaciones del principio de Pascal

La prensa hidráulica

El fundamento de la prensa hidráulica y de los elevadores hidráulicos se pone de manifiesto en el siguiente grabado (Fig. 7.10):

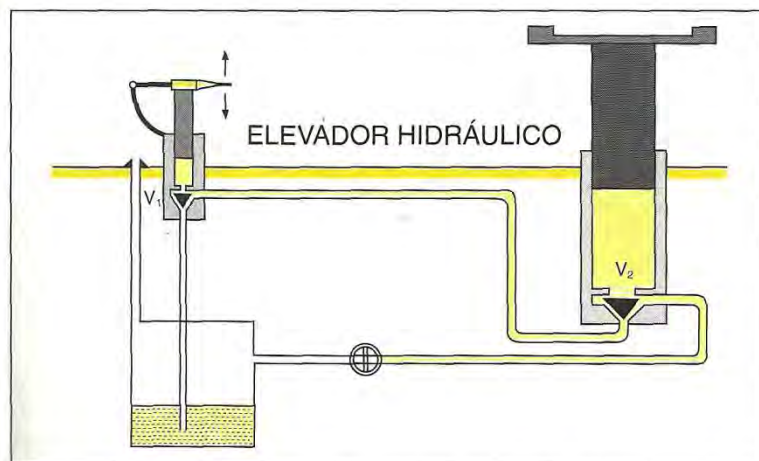


Fig. 7.10.

Consta de dos cuerpos de bomba de distinta sección, recorridos ambos por sendos pistones que ajustan perfectamente. Los dos cuerpos de bomba están comunicados entre sí y con un depósito de líquido hidráulico. A la salida de los mismos hay dos válvulas que se abren o cierran en el momento oportuno (Fig. 7.10).

Otras aplicaciones del principio de Pascal

- La fuerza necesaria para frenar los vehículos se transmite mediante un sistema hidráulico a través del líquido de frenos.
- Las bombas de profundidad pueden dañar seriamente a los submarinos y a los barcos sin que haya contacto directo con el casco del buque. ¿Por qué?
- En ocasiones, pescadores furtivos han utilizado cargas explosivas para matar peces.

Ejemplo 4

¿Qué fuerza es ejercida sobre el émbolo mayor de un elevador hidráulico cuya sección es de 500 cm^2 si el émbolo menor de 25 cm^2 de sección es impulsado con una fuerza de 200 N ?

A partir de la [7.4]:

$$F = \frac{fS}{s} = \frac{200 \text{ N} \cdot 500 \text{ cm}^2}{25 \text{ cm}^2}$$

$$F = 4\,000 \text{ N}$$

El funcionamiento de la prensa consta de dos tiempos o movimientos:

- El émbolo del primer cuerpo de bomba, accionado por medio de una palanca o de un motor, aspira el líquido hidráulico del depósito. En este tiempo, la válvula V_2 está cerrada y la V_1 abierta.
- El líquido hidráulico es impulsado por el émbolo del primer cuerpo de bomba y transmite la presión al émbolo del segundo cuerpo, cuerpo que experimenta un desplazamiento. En este tiempo, la válvula V_1 está cerrada y la V_2 abierta.

La fuerza ejercida por el cilindro menor origina la presión:

$$p = \frac{f}{s}$$

La fuerza ejercida sobre el cilindro mayor origina una presión exactamente igual, de acuerdo con el principio de Pascal:

$$p = \frac{F}{S}$$

Por tanto, tiene que cumplirse:

$$\frac{F}{S} = \frac{f}{s}$$

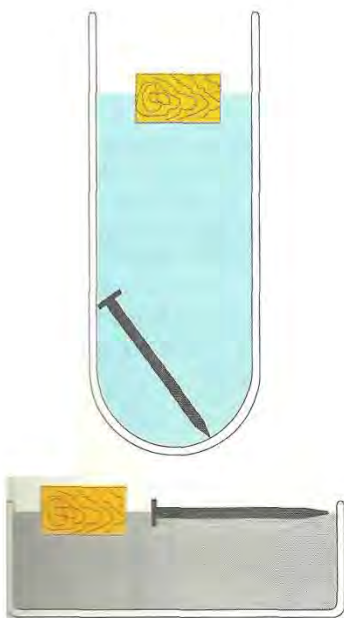


Fig. 7.11. Los cuerpos más densos que el líquido se sumergen; si son menos densos flotan. En los recipientes hay agua y mercurio.

7. Principio de Arquímedes

Algunos fenómenos de observación frecuente nos llevan al convencimiento de que los cuerpos sumergidos en cualquier líquido experimentan un empuje hacia la superficie libre.

- Para introducir una pelota dentro del agua hay que realizar una fuerza tanto mayor cuanto mayor sea el volumen de la pelota.
- Es más fácil flotar en agua de mar que en una piscina.
- Una piedra pesa menos dentro que fuera del agua.

Experiencias

① Toma un trozo de madera y un clavo de hierro. Ponlos en una probeta y echa agua. La madera flota y el hierro queda en el fondo. Parece ser que una propiedad, característica de esos objetos, hace que uno flote y otro se vaya al fondo.

Si echamos ahora los dos cuerpos en un recipiente que contenga mercurio, los dos flotan. Parece ser, entonces, que el hecho de flotar o sumergirse depende también de una propiedad del líquido (Fig. 7.11).

② Se suspende del extremo de un dinamómetro un cuerpo sólido insoluble en agua. El dinamómetro marca el peso del cuerpo. Después se sumerge el cuerpo suspendido del dinamómetro en un recipiente que contenga agua. Aquí el dinamómetro marca menos.

Según esta experiencia, es razonable pensar que el cuerpo en el agua experimenta una fuerza vertical hacia arriba, y por eso el dinamómetro marca menos. A esta fuerza la llamaremos *fuerza de empuje* (Fig. 7.12).

③ Cómo comprobar el valor del empuje

El peso del cuerpo en el aire es F_d que es lo que marca el dinamómetro. El peso dentro del agua (peso aparente) es menor: F'_d . La diferencia, por tanto, es debida al empuje.

$$E = F_d - F'_d$$

Ahora el volumen del agua antes y después de meter el cuerpo en el interior de una probeta. La diferencia es el volumen del cuerpo e igual al agua desalojada:

$$V = V_f - V_i$$

Comprueba que el *peso del agua desalojada es igual al empuje experimentado por el cuerpo*.

④ Determinación de la fuerza de empuje con la balanza hidrostática.

1. De uno de los platillos de la balanza, según se indica en la fotografía de este experimento, cuelga un cilindro hueco en el que encaja otro macizo que se suspende del anterior. La balanza se ha equilibrado con una tara de arena.
2. Al sumergir el cilindro macizo en el agua que contiene el vaso, la balanza se desequilibra, debido al empuje experimentado por el cilindro.
3. Se consigue equilibrar de nuevo la balanza si llenamos el cilindro hueco con el líquido donde está sumergido el macizo.

Podemos afirmar que el empuje experimentado por el cilindro macizo sumergido en el líquido es equivalente al peso del líquido desalojado, ya que el volumen del cilindro hueco es igual al del macizo.

También en los gases se ejerce una fuerza vertical hacia arriba sobre los cuerpos que se encuentran en su interior, aunque mucho menor que en los líquidos y con frecuencia queda inadvertida.

Las comprobaciones anteriores se resumen en el llamado **principio de Arquímedes**:

Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del fluido desalojado.

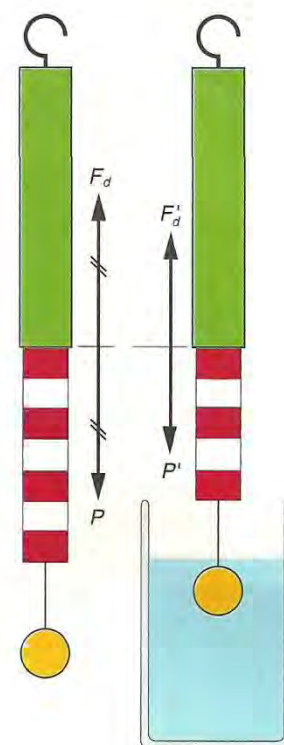


Fig. 7.12. El empuje del agua es la diferencia entre el peso en el aire F_d menos el peso en el agua F'_d .



8. Consecuencias del principio de Arquímedes

Por lo dicho anteriormente, todo *cuerpo sumergido* en un fluido está sometido a *dos fuerzas verticales*, pero de sentido contrario: el *peso* del cuerpo que se aplica en el *centro de gravedad (G)* y el *empuje* que se aplica en el *centro geométrico* de la parte sumergida (C).

La resultante de estas dos fuerzas, aplicadas al cuerpo sumergido, le comunica un movimiento acelerado hacia arriba o hacia abajo, según sea la intensidad de cada fuerza.

Si la densidad del cuerpo es ρ' y la del fluido ρ , la resultante entre el peso (P) y el empuje (E) es:

$$F = P - E = \rho'gV - \rho gV$$

$$F = (\rho' - \rho)gV \quad [7.5]$$

Pueden presentarse tres casos:

1. El cuerpo *se hundirá* si el peso es superior al empuje:

$$P > E, \quad \text{o bien} \quad \rho' > \rho$$

2. El cuerpo permanece en el *seno del líquido* en equilibrio estático, si su peso es igual al empuje:

$$P = E, \quad \text{o bien} \quad \rho' = \rho$$

3. El cuerpo *flotará* si el peso es inferior al empuje:

$$P < E, \quad \text{o bien} \quad \rho' < \rho$$

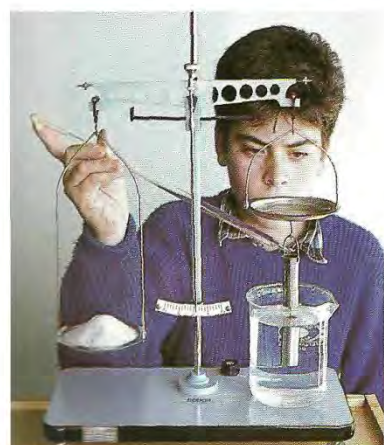


Fig. 7.13. Empuje de los cuerpos sumergidos. El peso se ejerce en el centro de gravedad (G) y el empuje en el centro de empuje (C), que es el centro geométrico del volumen sumergido.

Experiencia

Las tres situaciones anteriores las podemos comprobar con el mismo cuerpo, pero variando la densidad del líquido.

- En un recipiente que contiene agua echamos un huevo. El huevo se hunde.
- Echamos sal para que se disuelva en el agua. Llegará un momento en que el huevo se mantiene en el seno del líquido.
- Si seguimos disolviendo sal hasta disolución saturada, el huevo sube a la superficie y flota.

El empuje es distinto en cada caso, e igual al peso del líquido desalojado. Al disolver sal en agua el peso del líquido desalojado va aumentando porque lo hace la disolución.

Cuerpos flotantes en equilibrio

Para aplicar correctamente el principio de Arquímedes a los cuerpos flotantes en equilibrio debe tenerse presente que *el peso del cuerpo ha de ser igual al peso del líquido desalojado*.

Si echamos una esfera metálica hueca en agua, parte de su volumen (V_s) está dentro del agua y parte fuera. Una vez alcanzado el equilibrio, el peso de la esfera (P) es igual al empuje (E), es decir, al peso del agua desalojada (V_s):

$$E = P = mg = \rho V_s g$$

En donde ρ es la densidad del líquido, aquí del agua.

Flotación de los barcos

Los barcos, a pesar de estar contruidos con materiales de elevada densidad, flotan en el agua, debido a los espacios huecos que poseen.

La condición general de flotación es aplicable también a los barcos, es decir, *el peso total del barco tiene que ser igual al empuje experimentado por la parte sumergida*. Además de esta condición, el centro de gravedad y el de empuje han de estar en la misma vertical para que esté en equilibrio.

La estabilidad del barco aumenta si el *centro de gravedad* está lo más bajo posible. Por eso los barcos llevan la carga en la parte más baja de los mismos.

Ejemplo 5

Un ortoedro de madera flota en agua. Si sus dimensiones son: $a = 20$ cm, $b = 12$ cm y $c = 4$ cm, calcula la parte de la tercera arista que está sumergida. (Densidad del agua: $\rho = 1\,000$ kg/m³; densidad de la madera: $\rho' = 624$ kg/m³.)

El peso del agua desalojada (E) es igual al peso del ortoedro de madera (P):

$$E = V_s \rho g = abh \rho g \quad P = V \rho' g = abc \rho' g$$

Como $abch \rho g = abc \rho' g$, despejando h se obtiene:

$$h = \frac{c \rho'}{\rho} = \frac{4 \text{ cm} \cdot 624 \text{ kg/m}^3}{1\,000 \text{ kg/m}^3} = 2,49 \text{ cm}$$

Areómetros o densímetros

Los *areómetros* o *densímetros* son aparatos muy utilizados para medir la densidad relativa de los líquidos (Fig. 7.16).

Son unos flotadores de vidrio que llevan en su parte inferior un lastre de mercurio o de perdigones para que el centro de gravedad esté bajo y floten verticalmente. En su parte superior llevan una escala de densidades introducida en el tubo de vidrio de sección constante que forma parte del aparato. El peso



Fig. 7.14. El empuje aumenta con la densidad del líquido: agua, disolución de sal común y disolución saturada de sal.

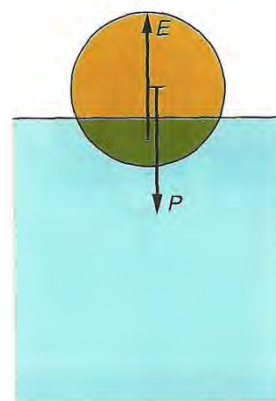


Fig. 7.15. El empuje es igual al peso del agua desalojada: volumen V_s .

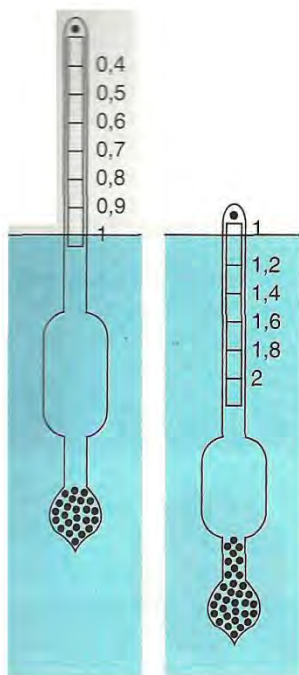


Fig. 7.16.

del densímetro es constante, pero el empuje aumenta con la densidad del líquido. Por esta razón, el densímetro emerge más o menos de la superficie del líquido, según sea la densidad del mismo.

Suelen emplearse dos tipos: uno sirve para medir densidades superiores a la del agua y, otro, para densidades inferiores a la de este líquido. Obsérvese en el grabado cómo están graduados cada uno de los dos tipos de densímetros.

B. AEROSTÁTICA

Esta parte de la Física estudia lo relativo a las fuerzas que intervienen en los gases en equilibrio.

9. Características del estado gaseoso

Los gases junto con los líquidos forman el grupo de 1 o sustancias cuyas moléculas gozan de cierta movilidad.

Pero en los gases la *movilidad* de las moléculas es considerablemente superior a la de los líquidos.

Los gases pueden *reducir su volumen* si se les comprime; comportamiento muy distinto del de los líquidos.

Uno de los *modelos* que mejor explica las propiedades de los gases es la llamada *teoría cinética* que podemos resumir en los siguientes postulados:

- Las moléculas gaseosas se *mueven en todas las direcciones*. En este movimiento caótico, como las abejas de un enjambre, no hay ninguna dirección más probable que otra. Su dirección es siempre rectilínea, entre dos choques sucesivos.
- En sus movimientos las moléculas *chocan entre sí* y con las *paredes* del recipiente que contiene al gas. Estos choques se suponen perfectamente elásticos, es decir, sin pérdida de energía cinética.
- Las *fuerzas de cohesión* son muy *pequeñas* en los gases. Solamente tienen lugar cuando las moléculas chocan debido a su proximidad.
- El *volumen real de las moléculas es insignificante* frente al volumen del gas. En consecuencia los espacios vacíos son incomparablemente superiores al espacio ocupado por las moléculas. Para facilitar los cálculos, en los gases ideales, se supone que las moléculas son puntuales y sin volumen.

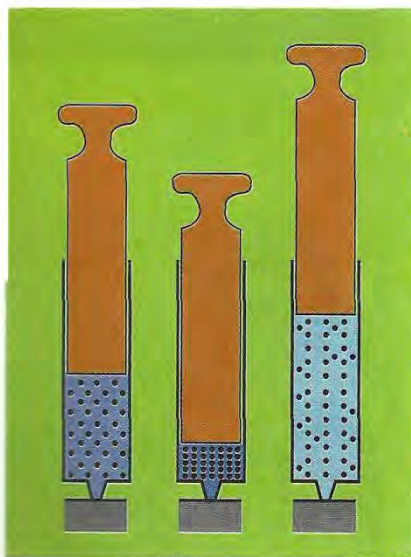


Fig. 7.17. Los gases son **compresibles** y **expansibles**, es decir, **elásticos**.

Los gases son *compresibles*. Es razonable que así suceda debido a los espacios *intermoleculares*, mucho mayores en los gases que en los sólidos y líquidos. Estos espacios libres permiten que las moléculas se aproximen unas a otras.

Los gases son *elásticos*, porque pueden recuperar su volumen primitivo, cuando éste ha disminuido por la acción de una fuerza o presión exterior, tan pronto como cesa dicha acción. Para comprobar estas últimas propiedades, podemos hacer la siguiente

Experiencia

- Se toma una jeringa y se desplaza el émbolo hasta la mitad, y después se tapa el orificio de salida con un dedo o un tapón. Si se ejerce presión, el volumen de gas se reduce, pero en cuanto cesa la fuerza ejercida, el émbolo vuelve al punto de partida (Fig. 7.17).
- Si ahora, en vez de presionar, se tira del émbolo como para sacarlo, aumenta el volumen de gas. Pero si se suelta el émbolo, de nuevo vuelve a la posición inicial.

- Los gases son *expansibles* y tienden a ocupar todo el volumen del recipiente que los contiene. Su poder de expansión, debido a la gran velocidad de sus moléculas, hace que se difundan en el seno de otros gases. En la ilustración (Fig. 7.18) se observa la difusión del dióxido de nitrógeno en la atmósfera. Esta propiedad hace que los gases se mezclen perfectamente constituyendo disoluciones gaseosas como el aire.
- Aunque son *poco densos*, debido a los espacios vacíos que quedan entre las moléculas, los gases pesan, porque sus moléculas, como las de todos los cuerpos, son materiales y tienen masa.

Experiencia

- Hincha un balón hasta que tome su forma y volumen característicos. Pévalo en una balanza de precisión media (o en un pesacartas) o equilíbralo con una tara de arena.
- Sigue hinchándolo y equilibra de nuevo poniendo pesas en el platillo que lleva la arena. Estas pesas equivalen al peso del aire introducido la segunda vez.



Fig. 7.18. El dióxido de nitrógeno (NO_2), de color rojizo, obtenido el fondo de la copa se difunde en la atmósfera.

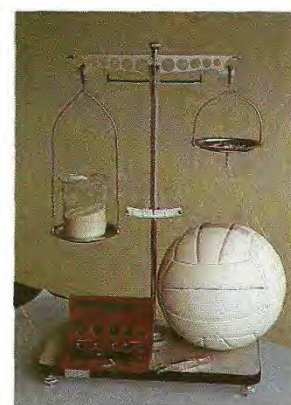


Fig. 7.19. Los gases pesan.

10. Presión atmosférica

Se entiende por atmósfera la capa de aire que rodea la Tierra.

El aire está retenido por la Tierra y no se difunde alejándose al espacio exterior, porque pesa. Por otra parte, como todos los gases, es compresible y las capas más próximas a la superficie terrestre soportan el peso de las más altas y, por tanto, la *densidad* del aire es *mayor* en las *zonas más próximas al suelo* que en las más alejadas.

Se define presión atmosférica a la fuerza ejercida por la atmósfera sobre cada unidad de superficie de los objetos que están en el interior de la misma.

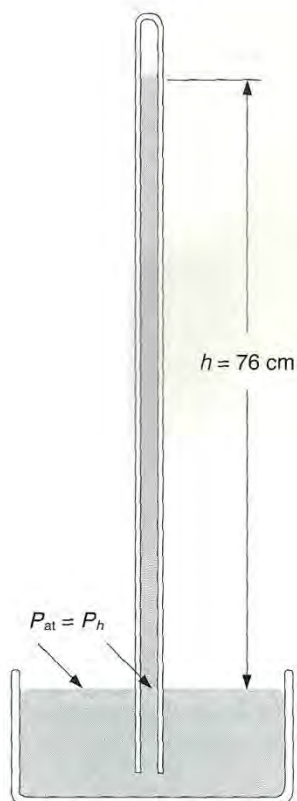


Fig. 7.20. La presión atmosférica normal es de 76 cm de mercurio.

Torricelli, en 1643, demostró la existencia de la presión atmosférica y determinó su valor mediante la experiencia siguiente, que podemos reproducir si disponemos de mercurio suficiente y de un tubo de vidrio cerrado por uno de sus extremos, de 1 m de longitud aproximadamente.

Se llena el tubo de mercurio, se tapa con el dedo el extremo abierto y se invierte tapado en una cubeta del mismo líquido, como se indica en el grabado. Se quita el dedo, y del tubo sale parte del mercurio a la cubeta hasta que el nivel del mercurio en el interior del tubo es de unos 76 cm respecto al de la cubeta.

En todos los puntos de la superficie libre de la cubeta y en los del interior del tubo que están al mismo nivel, la presión tiene que ser la misma (Fig. 7.20). En el interior del tubo de Torricelli se ejerce únicamente la presión hidrostática debida a la columna de mercurio (p_h), y en la superficie libre de la cubeta se ejerce la presión atmosférica (p_{at}). Por tanto:

$$p_{at} = p_h$$

La columna de mercurio varía de un lugar a otro y depende del tiempo meteorológico. Se ha tomado como valor medio el del nivel del mar, presión de una columna de mercurio de 76 cm (76 cm Hg). Este valor corresponde a la presión atmosférica normal.

Cálculo del valor de la presión atmosférica normal

Como la densidad del mercurio es de $13\,600\text{ kg/m}^3$, la presión atmosférica normal, presión hidrostática de una columna de mercurio de 76 cm es:

$$p_{\text{atm}} = \rho g h = 13\,600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,76 \text{ m} = 101\,300 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$p_{\text{atm}} = 101\,300 \text{ Pa}$$

A la *presión atmosférica normal* se le llama *atmósfera física* (atm) o simplemente *atmósfera* y es una unidad práctica de presión:

$$1 \text{ atm} = 101\,300 \text{ Pa}$$

También se emplean como unidades prácticas de presión el centímetro de mercurio (cm Hg) y el milímetro de mercurio (mm Hg)

$$1 \text{ atm} = 76 \text{ cm Hg} = 760 \text{ mm Hg}$$

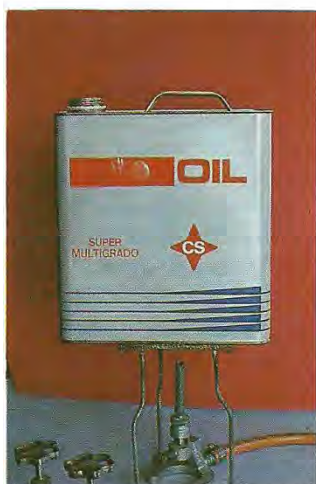
Experiencias

Aunque la presión atmosférica es muy grande, su acción sobre los objetos queda inadvertida porque se ejerce por igual sobre todos los puntos de su superficie. Las siguientes experiencias ponen de manifiesto los efectos de la presión atmosférica.

1. Llena un vaso de agua, pon encima una cartulina y sujetándola con la mano, invierte rápidamente el vaso. ¿Cómo es que no se derrama el agua si retiras la mano de la

cartulina? Sabes que la presión atmosférica normal es de 101 293 Pa, y que empuja a la cartulina hacia arriba. Pues bien, hacia abajo se ejerce la presión hidrostática de la columna de agua. ¿Sabrías calcularla si el vaso tiene una altura de 15 cm y la densidad del agua es 1 000 kg/m³?

2. Toma una lata de aceite de unos 5 litros. Lávala bien con agua y después, calienta hasta que hierva durante un rato unos dos dedos de agua. Cuando ya lleve saliendo vapor de agua durante unos cinco minutos, retírala del fuego y ciérrala fuertemente. Al cabo de un rato la lata quedará aplastada. Explica por qué has operado así y por qué se ha aplastado. La fotografía es de una experiencia análoga.



g. 7.21.

3. Sobre una mesa, y sobresaliendo algo de la misma, pon una regla plana de madera, no muy gruesa. Encima coloca un par de hojas de periódico que levantarás fácilmente al apalancar con la regla. Pero si en vez de levantarlos suavemente, das un golpe «seco» en la regla, ésta se rompe. ¿Por qué?
4. Poco tiempo después del experimento de Torricelli fue inventada por Otto de Guericke, alcalde de Magdeburgo, la primera bomba de vacío. Ante sus conciudadanos hizo la experiencia siguiente. Tomó dos hemisferios huecos de unos 50 cm de diámetro y después de unirlos extrajo el aire de su interior. Para separarlos fue preciso que tirasen ocho caballos de cada hemisferio.
5. En un frasco de cuello ancho se introduce un papel ardiendo; cuando está ya para apagarse, se ajusta en la boca del frasco un huevo cocido desprovisto de su cáscara. El huevo, empujado por la presión atmosférica, va penetrando en el frasco a medida que los gases se enfrían y disminuye la presión en el interior.
6. Cuando se toma un refresco con una pajita se aspira, y disminuye la presión dentro de la misma. Entonces la presión atmosférica ejercida sobre la superficie del refresco empuja al líquido y éste sube por la pajita.

Otras unidades de presión

Unidades de presión
<i>Sistema Cegesimal</i>
$1 \text{ baria} = \frac{\text{dina}}{\text{cm}^2} = 0,1 \text{ Pa}$ $1 \text{ Bar} = 10^6 \text{ barias} = 10^5 \text{ Pa}$ $1 \text{ Milibar} = 10^3 \text{ barias} = 100 \text{ Pa}$
<i>Sistema Técnico</i>
$\frac{\text{kp}}{\text{m}^2} = \frac{9,8 \text{ N}}{\text{m}^2} = 9,8 \text{ Pa}$
<i>Otras unidades</i>
Atmósfera técnica (at) $1 \text{ at} = \frac{1 \text{ kp}}{\text{cm}^2}$ Atmósfera física (atm) = presión atmosférica normal $1 \text{ atm} = 101\,300 \text{ Pa}$ $1 \text{ atm} = 1\,013 \text{ milibares (mB)}$ $1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}$ $1 \text{ atm} = 1,033 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}$

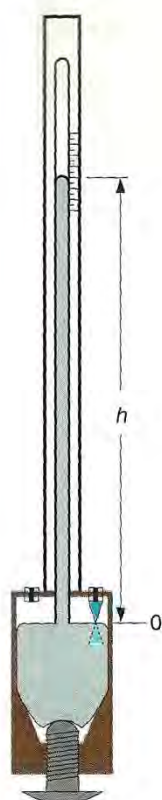


Fig. 7.22. Barómetro de Fortin.

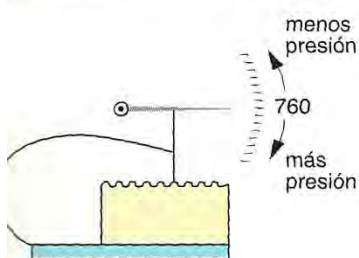


Fig. 7.23. Barómetro de Vidi.

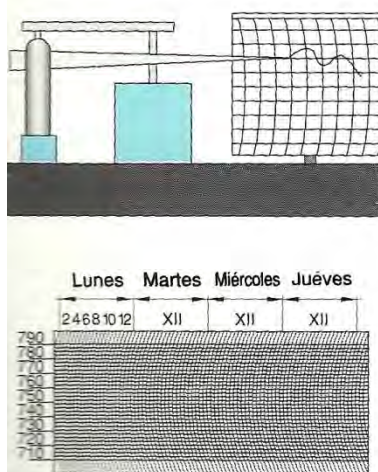


Fig. 7.24.

11. Barómetros

Son aparatos destinados a medir la presión atmosférica. Los hay de dos tipos: de mercurio y metálicos.

Barómetros de mercurio

El dispositivo de Torricelli para medir la presión atmosférica fue el primer barómetro de la historia. Si la presión atmosférica aumenta, la columna de mercurio sube, ya que a mayor presión atmosférica mayor presión hidrostática para que se dé el equilibrio. Si la presión atmosférica baja, también bajará la columna de mercurio. Un par de escalas situadas, una en la cubeta y otra en la columna de mercurio, nos permiten saber la altura barométrica, que es la distancia entre los dos niveles.

El barómetro de Fortin tiene la ventaja de poseer solamente una escala, que nos indica en cada momento la altura barométrica. Con este objeto, la cubeta tiene el fondo deformable y puede subirse y bajarse mediante un tornillo, con el fin de conseguir que el nivel de mercurio en la cubeta sea siempre el mismo. Antes de hacer la lectura barométrica se enrasa el mercurio de la cubeta hasta que entra en contacto con una punta cónica de marfil que coincide con el cero de la escala barométrica (Fig. 7.22).

Barómetros metálicos

Hoy día se utilizan muchos barómetros no basados en la experiencia de Torricelli. Aunque no sean tan precisos como los de mercurio, son más prácticos y cómodos. Entre ellos están los barómetros metálicos o aneroides (sin aire).

El barómetro de Vidi consta de una caja de paredes muy finas y elásticas. Para aumentar más la superficie de la caja, sus paredes suelen ser onduladas. En el interior se ha practicado el vacío. Cualquier variación en la presión atmosférica es acusada en la caja, la cual varía su volumen. Estas variaciones se amplifican mediante un sistema mecánico de ruedas dentadas y palancas, las cuales mueven una aguja indicadora de la presión (Fig. 7.23). Estos barómetros se gradúan con otro de mercurio.

Una modificación del barómetro de Vidi ha dado origen al barómetro registrador o barógrafo (Fig. 7.24). Consta de una caja metálica en forma de cilindro, pero cuya superficie está ondulada. Las variaciones de presión hacen que se mueva una larga aguja en cuyo extremo lleva un rotulador. Este rotulador va señalando la presión en un tambor que gira a velocidad angular constante, movido por un sistema de relojería. El tambor lleva enrollado un papel cuadriculado y en el mismo quedan grabadas las variaciones de presión de un día o de una semana, según dé el tambor una vuelta por día o por semana.

Influencia de la presión en el tiempo meteorológico

La presión atmosférica influye en el tiempo meteorológico. Por lo general si la presión es superior a la normal, el tiempo es seco y

Manómetros metálicos

Los manómetros utilizados en instalaciones industriales para medir la presión dentro de tuberías o recintos son *manómetros metálicos*.

Se diferencian de los barómetros metálicos en lo siguiente: El interior de la cápsula de paredes finas y elásticas está en comunicación con el gas cuya presión se desea medir. Exteriormente esa cápsula soporta la presión atmosférica. Por tanto, el mecanismo que transmite los movimientos de la cápsula mide la diferencia de presión que hay entre el gas y la atmósfera.

El aparato mide, por tanto, la sobrepresión o presión por encima de la atmosférica. Entre los más usados está el de *Bourdon* (Fig. 7.26).

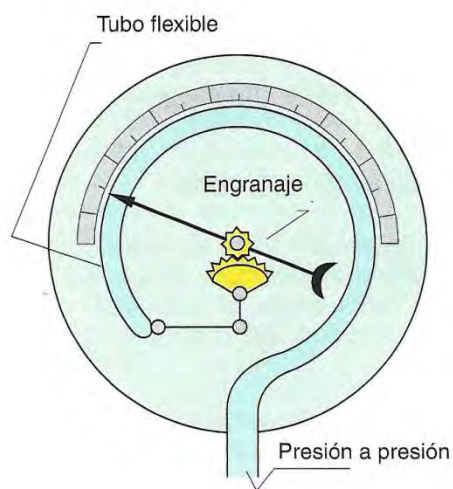


Fig. 7.26. Manómetro de Bourdon.



Fig. 7.27. Los manómetros de las instalaciones industriales suelen ser metálicos. Manómetro de una vieja locomotora de vapor.



Fig. 7.28. Manómetro para medir la presión de los neumáticos.

13. Principio de Arquímedes aplicado a los gases

Como en los líquidos, todo cuerpo en el interior de un gas experimenta un empuje vertical hacia arriba igual al peso del gas desalojado. Por tanto:

$$E = \rho g V$$

En la atmósfera el empuje no es constante por no serlo la densidad del aire, ya que disminuye con la altura. Se suele tomar para puntos no muy alejados de la superficie terrestre una densidad media para el aire de $1,29 \text{ kg/m}^3$.

Navegación aerostática. Globos

Esta ha sido la aplicación más importante del principio de Arquímedes aplicado a los gases.

Aunque sustituida esta forma de navegación aérea por el avión, sigue aplicándose el lanzamiento de globos con fines científicos. Los observatorios meteorológicos lanzan con frecuencia globos radiosonda a la atmósfera para conocer la temperatura, presión, humedad, etc., en las distintas capas de la atmósfera.

Para que un globo ascienda, el empuje debe ser superior al peso del globo.

La fuerza ascensional (F) es igual al empuje (E) menos el peso del globo (P):

$$F = E - P$$

Demostración del empuje de Arquímedes en los gases

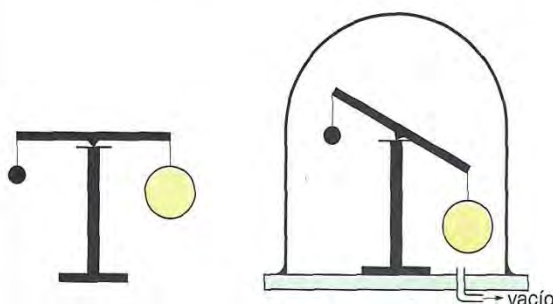


Fig. 7.30. La esfera hueca pesa más que la maciza. En la atmósfera está equilibrada con la maciza porque ésta experimenta menos empuje que aquella por tener menos volumen. Dentro de la campana neumática se pone de manifiesto el desequilibrio cuando practicamos el vacío dentro de la misma.



Fig. 7.29. Por el empuje del aire los globos ascienden. Se llenan de un gas menos denso que el aire, como helio o hidrógeno. En la actualidad van llenos de aire caliente producido por una fuente de calor instalada en su base.

Experiencia

Principio de Arquímedes aplicado a los gases

Observa las fotografías y procede según se indica (Fig. 7.31).

1. Equilibra la balanza después de suspender de uno de los platillos una pelota que quepa en el vaso. El tubo de ensayo contiene trozos de mármol y ácido clorhídrico diluido. Producirá una corriente de dióxido de carbono, que es un gas más denso que el aire, por lo que la balanza se desequilibrará. ¿Por qué?
2. Prepara una disolución acuosa con un detergente líquido. Con un tubo de vidrio echa burbujas de jabón sobre el vaso que contiene dióxido de carbono. Las pompas de jabón que caen al suelo en atmósfera de aire flotan en el dióxido de carbono.

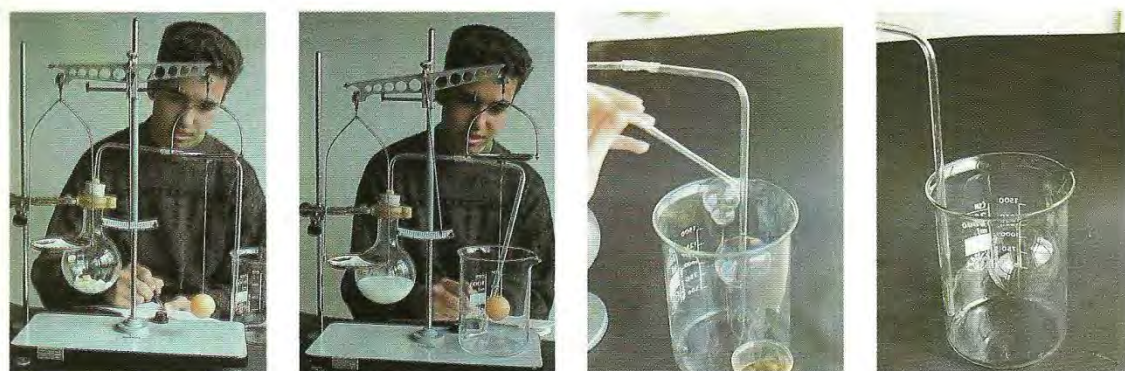


Fig. 7.31

Cuestionario de autoevaluación

1. Cita las propiedades más importantes de los líquidos.
2. ¿Qué es lo contrario de fluidez?
3. Transforma la presión 1 kp/cm^2 en N/m^2 .
4. Si la densidad del agua es 1 g/cm^3 , halla su valor en el SI.
5. Rellena el cuadro adjunto indicando el número y la unidad de la magnitud.

Fuerza	Superficie	Presión
0,2 N	20 cm^2	
	30 cm^2	10 Pa
10 N		1,2 Pa
5 kp	25 cm^2	
	$1,5 \text{ m}^2$	50 Pa

6. Responde si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
 - El aire se puede comprimir, el agua no.
 - La presión de los líquidos es tangencial a la superficie.
 - La presión en el agua y en el aire actúa lo mismo en todas las direcciones.
 - Todos los puntos interiores de un fluido en equilibrio, en el mismo plano horizontal, poseen la misma presión.
 - A mayor profundidad, mayor presión.
7. Contesta razonadamente cómo varía la presión, a medida que nos hundimos en el mar o subimos a la atmósfera.
8. Un tonel de madera lleva en una base un tubo de goma largo. Se echa agua hasta rebosar; el tonel revienta. ¿Por qué?
9. Los submarinistas, aun con escafandra, no deben descender más de unos 30 m, ¿por qué?
10. ¿Es aplicable a los gases el principio de Pascal? Razona la respuesta.
- 7.11. ¿Cuándo se hunde más un barco, navegando por alta mar o si lo hace por un río? ¿Por qué?
- 7.12. Indica las semejanzas y diferencias, repasando sus características, entre los líquidos y los gases.

Problemas de aplicación

1. Dos vasos comunicantes contienen sulfuro de carbono (densidad $1\,270\text{ kg/m}^3$). En una de las ramas se echa agua que se eleva 28 cm sobre la superficie de separación de los líquidos. Calcula la altura que alcanza el sulfuro de carbono respecto de la misma superficie de separación.
2. En un recipiente hay agua destilada y encima un líquido no miscible cuya densidad es $0,91\text{ g/cm}^3$. Si las alturas de ambos líquidos son 18 y 40 cm , respectivamente, calcula la diferencia de presión entre el fondo y la superficie de contacto de los dos líquidos.
Soluc.: $\Delta p = 1\,764\text{ Pa}$.
3. En un tubo que tiene forma de U se vierten dos líquidos no miscibles: agua destilada y otro líquido de densidad desconocida. Si la relación entre la altura del líquido y la del agua es $1,2$, ¿cuál es la densidad de dicho líquido?
Soluc.: $\rho = 833,3\text{ kg/m}^3$.
4. Si la presión atmosférica es 74 cm Hg , ¿a qué presión estará sometido un submarinista cuando se encuentra sumergido en un lago a 8 m de profundidad?
Soluc.: $p = 132,8\text{ cm Hg} = 1,75\text{ atm}$.
5. En un vaso cilíndrico de 200 cm^2 de superficie en la base, se vierten 2 litros de mercurio ($\rho = 13,6\text{ g/cm}^3$) y 4 litros de agua ($\rho_1 = 1\text{ g/cm}^3$). Calcula el aumento de presión cuando pasamos de la superficie libre al fondo del vaso.
Soluc.: $\Delta p = 15\,288\text{ Pa}$.
6. Una cápsula manométrica formada por una caja cilíndrica de 4 cm de diámetro se sumerge a 25 cm de profundidad dentro del agua. Calcula:
 - a) La presión que existe en el centro de la cápsula a esa profundidad.
 - b) La fuerza que recibe la membrana.
 - c) El valor de esta fuerza, si el agua fuera salada, de densidad, $1\,020\text{ kg/m}^3$. Se supone que la presión es la misma en toda la membrana.
7. Un vaso cilíndrico contiene 1 litro de agua. La base, plana y horizontal, mide 50 cm^2 de superficie. Calcula:
 - a) La diferencia de presión entre el fondo y un punto de la superficie libre del líquido. Da el resultado en pascles.
 - b) La presión en un punto del fondo del vaso, si la presión atmosférica vale $1,013 \cdot 10^5\text{ Pa}$.
8. Se llena de agua un tonel de 1 m de alto. ¿Qué presión ejerce el agua sobre la base inferior del mismo? Se adapta un tubo de 4 m y se llena de agua. ¿Cuál es ahora la presión en las dos bases del tonel?
Soluc.: $p = 9\,800\text{ Pa}$; $p_1 = 39\,200\text{ Pa}$; $p_2 = 49\,000\text{ Pa}$.
9. La superficie del pistón pequeño de una prensa hidráulica mide 3 cm^2 y la de mayor, $1,5\text{ dm}^2$. Calcula la fuerza que recibirá el émbolo mayor cuando se aplica una fuerza de 5 kgf en el pequeño.
Soluc.: $F = 2\,450\text{ N}$.
10. En una prensa hidráulica cuyos pistones tienen $s = 8\text{ cm}^2$ y $S = 800\text{ cm}^2$ de superficie se colocan 5 kg sobre el émbolo pequeño. Calcula:
 - a) El peso que habrá que colocar en el émbolo grande para que ambos pistones se encuentren en la misma horizontal.
 - b) El peso que habrá que colocar en el pistón pequeño para que éste descienda $0,60\text{ cm}$.

11. Los diámetros de los cuerpos de bomba de una prensa hidráulica son de 3 y 42 cm respectivamente. Mediante una palanca, un obrero impulsa el émbolo pequeño con fuerza de 1960 N. Calcula:
- La fuerza que recibe el émbolo grande.
 - La altura a que sube este pistón después de 10 emboladas del pequeño, si en cada embolada éste descende 20 cm.
12. ¿Qué fuerza es ejercida sobre el émbolo mayor de una prensa hidráulica cuya sección es de 500 cm² si el émbolo menor de 25 cm² de sección es impulsado con la fuerza de 196 N?
13. ¿A qué presión está sometida una burbuja de gas situada en un pozo con agua y a 8 m de profundidad? Supóngase normal la presión atmosférica.
- Soluc.: $p = 134,8 \text{ cm Hg} = 1,77 \text{ atm} = 179\,674 \text{ Pa}$.*
14. Un cuerpo pesa en el aire 12,14 g y dentro del agua 0,02 g. ¿Cuál es su densidad?
- Soluc.: $\rho = 1\,001,6 \text{ kg/m}^3$.*
15. Del platillo de una balanza equilibrada pende una bola de acero inoxidable. Si la bola se introduce en agua destilada, la balanza se desequilibra, pero vuelve a equilibrarse colocando 2,05 g en el platillo donde está suspendida. Si es introducida en otro líquido, la balanza se equilibra con 1,85 g. ¿cuál es la densidad de este líquido?
16. Calcula el peso aparente de un kilogramo de corcho de densidad, 0,24 g/cm³ cuando se pesa en el aire, de densidad, 0,001293 g/cm³.
17. La altura barométrica mide 76 cm de mercurio (densidad del mercurio 13,6 g/cm³). Calcula la fuerza que soporta el cuerpo de un hombre de superficie 1,5 m².
- Soluc.: $F = 151\,939,2 \text{ N}$.*
18. Calcula en kg/f/cm², en milibares y en pascuales la presión atmosférica de 70 cm de mercurio.
19. Un tubo de ensayo cuya sección es 1,5 cm² se introduce en el agua con 4 g de plomo en su interior y se sumerge 6 cm dentro del agua. ¿Cuánto pesa el tubo de ensayo?
20. El diámetro del émbolo mayor de un elevador hidráulico es de 40 cm. Si soporta el peso de un automóvil que es de 1 600 kg, ¿qué presión tendrá que ejercer?
- Soluc.: $p = 124\,777,18 \text{ Pa}$.*
21. Se echa una caja cerrada (forma de paralelepípedo) sobre el agua y se sumerge hasta la décima parte de su arista menor. El grosor de la paredes de la misma es de 1 mm y sus dimensiones 10, 20 y 40 cm, respectivamente. ¿Cuál es la densidad media de la caja?
22. Una esfera metálica hueca de 5 cm de diámetro flota en el agua aunque sumergiéndose hasta el plano diametral. Calcula su peso. Si se la hace flotar en alcohol de densidad 800 kg/m³, calcula el volumen sumergido de la esfera.
- Soluc.: $P = 0,32 \text{ N}$. $V = 40,8 \text{ cm}^3$.*
23. Se sumerge la esfera del problema anterior totalmente en agua, mediante un lastre que se le pone dentro; ¿cuánto pesa el lastre? ¿El equilibrio es estable? ¿Por qué?
- Soluc.: $P = 0,32 \text{ N}$.*
24. Una esfera hueca está sumergida hasta la mitad en agua. Su radio interior es de 10 cm y el exterior de 10,5 cm. ¿Cuál es la densidad del material con que está hecha la esfera?
- Soluc.: $\rho = 3,67 \text{ g/cm}^3 = 3\,670 \text{ kg/m}^3$.*

Fluidos en movimiento

1. Cinemática de fluidos

- Se llama *trayectoria* de una partícula el lugar geométrico de las posiciones de la partícula en el transcurso del tiempo.
- Se denomina *línea de corriente* la curva tangente, en cada uno de sus puntos, al vector velocidad, \mathbf{v} , en ese punto. Su ecuación es:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \quad (1)$$

donde v_x , v_y , v_z son, en general, funciones del tiempo, t . Las líneas de corriente se deforman con el tiempo, en general, y no coinciden con las trayectorias.

El conjunto de líneas de corriente que se apoyan sobre un contorno cerrado constituyen un *tubo de corriente*.

- Una corriente se llama *permanente* (o estacionaria) si la velocidad, presión y densidad en cada punto no varían con el tiempo.

En este caso, las líneas de corriente son independientes del tiempo y se confunden con las trayectorias.

- *Caudal*, Q , es el volumen de fluido por unidad de tiempo que pasa a través de una sección transversal a la corriente. Si dS representa el elemento infinitesimal de superficie y v_n la componente de la velocidad normal a ese elemento, se tendrá:

$$Q = \int v_n dS, \quad (2)$$

o bien:

$$Q = \bar{v}S, \quad (3)$$

donde \bar{v} es la velocidad media normal a la sección S .

- La *ecuación de continuidad* establece que la masa que, por unidad de tiempo, pasa a través de cualquier sección de un tubo de corriente es constante si el régimen es permanente. O sea:

$$\rho_1 \bar{v}_1 S_1 = \rho_2 \bar{v}_2 S_2 = \text{cte.}$$

donde ρ_1 y ρ_2 representan las densidades en las secciones 1 y 2, respectivamente, y \bar{v}_1 y \bar{v}_2 , las componentes normales de las velocidades medias en las secciones 1 y 2.

Para un fluido *incompresible*, la densidad es constante en todos los puntos, $\rho_1 = \rho_2$, y la ecuación precedente se transforma en:

$$\bar{v}_1 S_1 = \bar{v}_2 S_2 = \text{cte.}, \quad (4)$$

que indica que el *caudal es constante* en todas las secciones de un tubo de corriente.

2. Dinámica de los fluidos perfectos incompresibles en régimen permanente

• Para el flujo *permanente* de un fluido *ideal* (sin rozamiento) e *incompresible*, si la gravedad es la única exterior, se verifican las *ecuaciones de Euler*:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (5)$$

y si la aceleración es nula, de la tercera ecuación se deduce:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g, \quad \text{que integrada da: } p = -\rho g z + C,$$

que es el teorema fundamental de Hidrostática (véase el capítulo precedente). O sea, *la distribución de presiones en un plano normal a la corriente es hidrostática*.

• Integrando las ecuaciones de Euler a lo largo de *una línea de corriente*, se obtiene para cualquier par de puntos, 1 y 2, de la misma línea de corriente, la siguiente relación, denominada *ecuación de Bernoulli*:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 = \text{cte.}, \quad (6)$$

donde p denota presión, z altura vertical sobre un nivel de referencia arbitrario y la constante del último miembro toma, en general, diferentes valores para distintas líneas de corriente.

Para que la ecuación de Bernoulli se cumpla entre dos puntos cualesquiera, *no situados en una misma línea de corriente* de un tubo de corriente, es necesario añadir a las tres condiciones anteriores: régimen *permanente*, fluido *ideal* (sin viscosidad) e *incompresible*, una cuarta: flujo *irrotacional* ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$, o sea, las partículas se trasladan sin realizar giro alguno alrededor de su centro de gravedad). En este caso, la ecuación (6) *se cumple entre dos puntos cualesquiera de un fluido*. La constante del último miembro representa la energía total por unidad de volumen y la ecuación de Bernoulli expresa el principio de conservación de la energía mecánica.

La técnica de la construcción de máquinas hidráulicas, por ejemplo, hace frecuente uso de la ecuación (6) y, a pesar de que a la hipótesis simplificadora del fluido *ideal* se añade la más simplificadora aún del flujo *irrotacional*, esta ecuación constituye un instrumento de trabajo excelente.

También es muy frecuente, en la práctica diaria de la ingeniería, aplicar la ecuación de Bernoulli al conjunto de la corriente que circula por un canal, tubería, etc., no entre dos puntos de una línea de corriente, sino entre dos secciones de un *tubo de corriente*, tomando en cada una de ellas los valores medios de la presión, velocidad y altura geodésica correspondientes a su sección (*método unidimensional*).

3. Dinámica de los fluidos viscosos

• Hasta ahora habíamos supuesto que en los fluidos no había la menor resistencia al deslizamiento mutuo de sus partes o, lo que es lo mismo, que no había posibilidad de que se engendraran en ellos fuerzas tangenciales (fluidos *ideales*). En realidad, ningún

líquido posee tal propiedad de un modo riguroso. Cuando la resistencia al deslizamiento es muy grande, el líquido fluye con dificultad y se dice que es muy viscoso.

Para que existan rozamientos internos es preciso que dos filetes líquidos contiguos se muevan con distinta velocidad. Sea una masa líquida en movimiento sobre un fondo horizontal; la velocidad, que es nula en el fondo por efecto de la adherencia, irá aumentando en las capas horizontales superiores, hasta alcanzar su valor máximo en la superficie del líquido. Cuando tal cosa ocurre, se dice que existe un *gradiente de velocidad* a lo largo de la vertical z , dv/dz . Puede admitirse que la fuerza tangencial, F , que una capa ejerce sobre la capa contigua, es proporcional a su superficie, S , y al gradiente de velocidad en dirección normal a la superficie, dv/dz :

$$F = \eta S \frac{dv}{dz}. \quad (7)$$

El coeficiente de proporcionalidad, η , depende del fluido. Es una *constante característica* del mismo y recibe el nombre de *viscosidad dinámica*. La ecuación (7) se denomina *ley de Newton de la viscosidad*.

La fórmula dimensional de la viscosidad dinámica es $[\eta] = L^{-1}MT^{-1}$ y su unidad en el SI, el $Pa \cdot s$.

El cociente $\nu = \eta/\rho$ se denomina *viscosidad cinemática*. Tiene por dimensiones $[\nu] = L^2T^{-1}$ y su unidad en el SI es el m^2/s .

- Cuando un fluido se mueve de modo que las diversas capas del mismo deslicen unas sobre otras sin entremezclarse, se dice que reina el régimen *laminar*. En cambio, cuando las partículas se dispersan irregularmente, las capas fluidas se difunden y pierden su identidad, dando lugar a remolinos libres que agitan toda la masa líquida, en cuyo caso el flujo se denomina *turbulento*.

La naturaleza del flujo, es decir, el que sea laminar o turbulento, se determina por el *número de Reynolds*, Re :

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (8)$$

donde ρ es la densidad del fluido, v la velocidad, η la viscosidad y l una longitud característica. Todos los experimentos hasta este momento indican que, *por debajo de 2300*, sólo puede existir un flujo *laminar*. El flujo correspondiente a un número de Reynolds que exceda de 2300 puede considerarse inestable, ya que cualquier perturbación fortuita originará las fluctuaciones de un régimen turbulento.

- En régimen laminar y permanente, es posible calcular el caudal, Q , que circula por un tubo de radio R y longitud l , pues siendo igual la velocidad en ambos extremos, todo el trabajo realizado por la caída total de presión, Δp , se invierte en vencer la viscosidad, η :

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 \eta l}. \quad (9)$$

Esta expresión se conoce con el nombre de *fórmula de Poiseuille*.

La *distribución de velocidades* en la sección del tubo es parabólica:

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2), \quad (10)$$

donde v representa la velocidad en un punto situado a la distancia r del eje del tubo. La velocidad *máxima*, $v_{\text{máx}}$, corresponde, según (10), al eje del tubo ($r=0$):

$$v_{\text{máx}} = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} R^2, \quad (11)$$

mientras que la mínima, $v=0$, a las paredes ($r=R$). La velocidad media, \bar{v} , tiene por expresión:

$$\bar{v} = \frac{1}{8\eta} \frac{\Delta p}{l} R^2. \quad (12)$$

PROBLEMAS

10.1. A través de la tubería de la figura circula aceite. En A el diámetro de la tubería es $d_A=400$ mm y, en B, $d_B=200$ mm. A partir de B, la tubería se bifurca en dos, la C, de diámetro $d_C=100$ mm, y la D, de diámetro

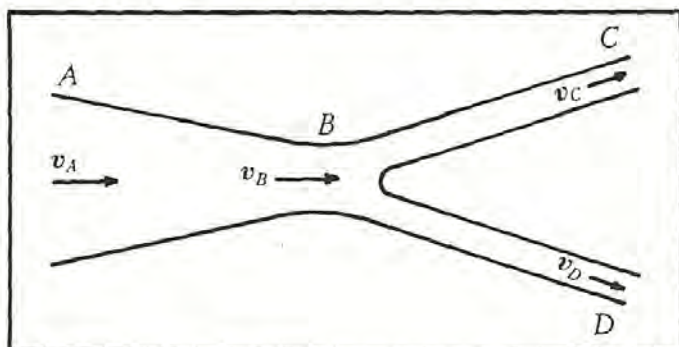


FIG. 10.1

$d_D=150$ mm. Si la velocidad en A es $v_A=2,0$ m/s y en D $v_D=8,0$ m/s, ¿cuál será: a) el caudal en C; b) la velocidad en B?

Solución:

a) En virtud de la ecuación de continuidad, se sabe que el caudal en A, Q_A , es igual que en B, Q_B , y es igual a la suma de caudales en C y D, Q_C+Q_D . Así, pues:

$$Q_A = Q_C + Q_D \Rightarrow S_A v_A = S_C v_C + S_D v_D,$$

$$\pi \frac{d_A^2}{4} v_A = \pi \frac{d_C^2}{4} v_C + \pi \frac{d_D^2}{4} v_D, \quad 0,4^2 \times 2 = 0,1^2 \times v_C + 0,15^2 \times 8 \Rightarrow v_C = 14 \text{ m/s}.$$

En consecuencia:

$$Q_C = \pi \frac{d_C^2}{4} v_C = \pi \frac{0,1^2}{4} \times 14 \Rightarrow \boxed{Q_C = 0,11 \text{ m}^3/\text{s}}.$$

b) De $Q_A = Q_B$ se desprende:

$$\pi \frac{d_A^2}{4} v_A = \pi \frac{d_B^2}{4} v_B, \quad 0,4^2 \times 2 = 0,2^2 \times v_B \Rightarrow \boxed{v_B = 8 \text{ m/s}}.$$

10.2. Un líquido de densidad 900 kg/m^3 fluye por una tubería horizontal convergente-divergente. La velocidad del líquido en la sección más estrecha es de 12 m/s y la diferencia de presiones del líquido en las secciones más ancha y más estrecha es de $48,6 \text{ kPa}$. Averiguar la relación de dichas áreas.

Solución:

Aplicando la ecuación de continuidad a las secciones estrecha, 1, y ancha, 2, se tiene:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (a)$$

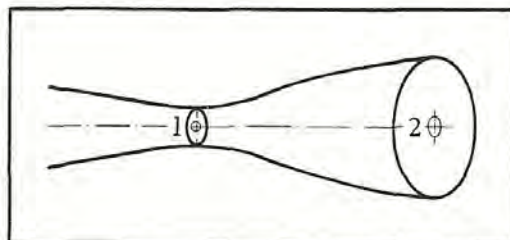


FIG. 10.2

y como $v_1 = 6$ m/s, el problema se reduce a averiguar v_2 , lo cual se logra aplicando la ecuación de Bernoulli a 1 y 2:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2,$$

y puesto que $z_1 = z_2$, ya que se toma la altura correspondiente al centro de gravedad de cada sección, como se dijo en la página 178, resulta:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}.$$

O sea:

$$v_2^2 = 12^2 + \frac{2 \times (-48,6 \times 10^3)}{900} \Rightarrow v_2 = 6 \text{ m/s.} \quad (b)$$

Obsérvese que $p_1 - p_2$ es negativo (la presión en las secciones estrechas es menor que en las anchas).

Reemplazando (b) en (a), se concluye:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{12}{6}; \quad \boxed{\frac{S_2}{S_1} = 2}.$$

10.3. Hallar el caudal de fluido ideal que circula por la tubería de la figura, si $l = 600$ mm y los diámetros de las secciones en 1 y 2 son $d_1 = 200$ mm y $d_2 = 150$ mm.

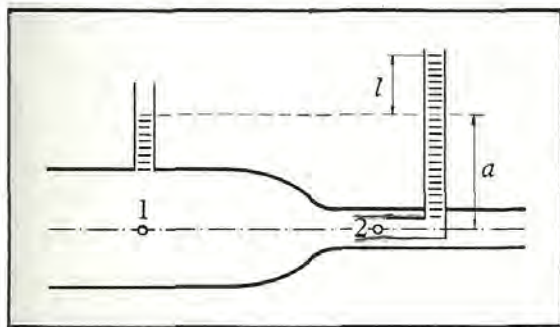


FIG. 10.3

Solución:

Como se conoce la sección en 1, bastará hallar la velocidad correspondiente, v_1 , para tener el caudal: $Q=S_1v_1$. Para ello, aplicaremos la ecuación de Bernoulli a 1 y 2, tomando el punto 2 a la entrada del tubo (punto de estancamiento, donde la velocidad es ya nula, $v_2=0$):

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_2,$$

puesto que las alturas, z_1 y z_2 , se consideran iguales (véase pág. 178).

De la ecuación precedente, se desprende:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} \quad (a)$$

y para hallar p_1 y p_2 recurrimos al teorema fundamental de Hidrostática, pues en el caso de p_2 se trata de hallar la presión correspondiente a una columna líquida en equilibrio, y en el de p_1 también es aplicable dicho teorema en dirección perpendicular a la corriente (véase pág. 178). O sea:

$$\left. \begin{array}{l} p_2 = \rho g(l+a) \\ p_1 = \rho ga \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p_2 - p_1}{\rho} = gl,$$

expresión que, sustituida en (a), conduce a:

$$v_1 = \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,6} = 3,43 \text{ m/s.}$$

En conclusión, el caudal valdrá:

$$Q = S_1 v_1 = \pi \frac{d_1^2}{4} v_1 = \pi \frac{0,2^2}{4} \times 3,43, \quad \boxed{Q = 0,108 \text{ m}^3/\text{s}}.$$

10.4. ¿Alcanza el líquido el mismo nivel en los tubos 1 y 2 representados en la figura?

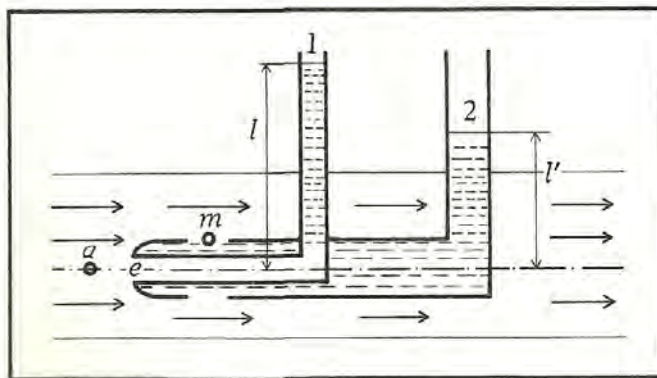


FIG. 10.4

Solución:

No, como se demuestra aplicando la ecuación de Bernoulli:

Para el tubo 1, tomando el punto de estancamiento, e , a la entrada del tubo y, por consiguiente, con velocidad nula, y el punto a , señalados en la figura 10.4, se obtiene,

en virtud de la ecuación de Bernoulli:

$$p_a + \frac{1}{2} \rho v_a^2 = p_e + 0,$$

y como $p_e = \rho g l$, resulta:

$$p_a + \frac{1}{2} \rho v_a^2 = \rho g l \Rightarrow l = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_a^2}{2g}. \quad (a)$$

Para el tubo 2 se tiene, en virtud de lo dicho en la página 178, que la distribución de presiones en la sección correspondiente al punto m es la hidrostática. O sea, que la presión de un punto situado en la misma sección de m , pero un poco fuera del tubo (moviéndose con la velocidad de la corriente) es la misma que la del punto m , que suponemos que ya está en reposo en el tubo (despreciando la pequeña diferencia de alturas que pueda existir entre uno y otro). Así, pues:

$$p_m = \rho g l' \Rightarrow l' = \frac{p_m}{\rho g},$$

y como la presión en m es igual a la presión de la corriente que circula en su proximidad, se tendrá $p_m = p_a$, despreciando la diferencia de alturas entre m y a . O sea:

$$l' = \frac{p_m}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g}. \quad (b)$$

Restando (b) de (a), se concluye:

$$l - l' = \frac{v_a^2}{2g}. \quad (c)$$

En consecuencia, el líquido *no* alcanza el *mismo nivel* en los tubos (1) y (2), sino que el nivel en (1) será mayor que en (2), según se desprende de (c). También resulta evidente que debe ser así, si se piensa que l es originada por las alturas de presión ($p_a/\rho g$) y cinética ($v_a^2/2g$) de la corriente [véase ec. (a)], mientras que l' es debida solamente a la altura de presión [véase ec. (b)].

10.5. Un depósito cilíndrico, de sección S_0 , está lleno de agua. A una profundidad h , medida desde la superficie libre, posee un orificio de sección S_1 . Averigüese la velocidad de salida del agua y compárese con la fórmula de Torricelli obtenida para $S_1 \ll S_0$.

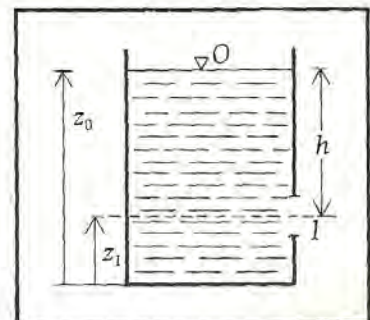


FIG. 10.5

Solución:

Aplicando la ecuación de continuidad a la superficie libre, 0, y al orificio de salida del agua, 1, se tiene:

$$S_0 v_0 = S_1 v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{S_0}{S_1} v_0. \quad (a)$$

Y para hallar v_0 recurrimos a la ecuación de Bernoulli, aplicada también a 0 y 1:

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho g z_0 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1.$$

Y puesto que $p_0 = p_1 =$ presión atmosférica, queda:

$$v_0^2 = v_1^2 - 2g(z_0 - z_1) = v_1^2 - 2gh. \quad (b)$$

Sustituyendo (b) en (a) elevada al cuadrado, resulta:

$$v_1^2 = \frac{S_0^2}{S_1^2} (v_1^2 - 2gh) \Rightarrow v_1^2 \left(1 - \frac{S_1^2}{S_0^2} \right) = 2gh; \quad v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - S_1^2/S_0^2}},$$

que para $S_1 \ll S_0$ se convierte en la fórmula de Torricelli, $v_1 = \sqrt{2gh}$, pues $S_1^2/S_0^2 \simeq 0$.

10.6. Un depósito de 2 m de altura está lleno de agua. A una profundidad h de la superficie libre tiene un pequeño orificio. Calcular el valor de h preciso para que el chorro de agua llegue al suelo a la máxima distancia del depósito.

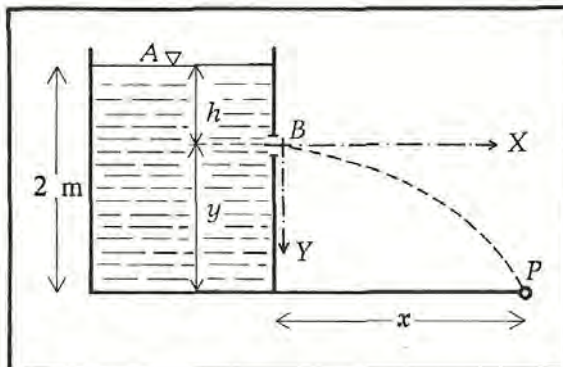


FIG. 10.6

Solución:

Para hallar el valor máximo de x (véase Fig. 10.6), hay que conocer la velocidad de salida del agua por el orificio. Para ello, aplicamos la ecuación de Bernoulli a los puntos A (superficie libre) y B (orificio):

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g(h+y) = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g y,$$

y como en A y en B actúa directamente la presión atmosférica, $p_A = p_B$, y despreciando v_A frente a v_B , pues el orificio (B) es pequeño, la ecuación precedente se convierte en:

$$\rho g(h+y) = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g y \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh},$$

que es la fórmula de Torricelli.

La expresión anterior corresponde a un caso ideal en que no existen pérdidas. En la realidad, éstas son inevitables, por lo que la velocidad, v , es menor que la teórica, v_B . La relación entre una y otra viene dada por un coeficiente, C , menor que la unidad:

$$v = Cv_B = C\sqrt{2gh}. \quad (a)$$

El punto, P , de impacto del agua sobre el suelo tiene por coordenadas, en el sistema de referencia BXY :

$$x = vt, \quad y = \frac{1}{2}gt^2.$$

Eliminando t , resulta:

$$y = \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v} \right)^2,$$

y sustituyendo v por su valor, (a), se tiene:

$$y = \frac{1}{2}g \frac{x^2}{C^2(2gh)} \Rightarrow x = 2C\sqrt{yh}. \quad (b)$$

Y puesto que $y = 2 - h$ (véase Fig. 10.6), la ecuación (b) se transforma en:

$$x = 2C\sqrt{(2-h)h}.$$

El valor máximo de x se deduce de la condición $\frac{dx}{dh} = 0$:

$$\frac{dx}{dh} = 2C \frac{2-2h}{2\sqrt{(2-h)h}} = 0 \Rightarrow \boxed{h = 1 \text{ m}},$$

que, efectivamente, corresponde a un máximo, pues d^2x/dh^2 para $h=1$ es negativa.

10.7. Por una tobera vertical dirigida hacia arriba, sale un chorro de agua de 300 mm de diámetro. Suponiendo que el chorro mantiene en todo instante su sección circular y despreciando todas las pérdidas de energía, ¿cuál será el diámetro del chorro a una altura de 5,0 m sobre la tobera si la velocidad del agua a la salida de la misma es de 14 m/s?

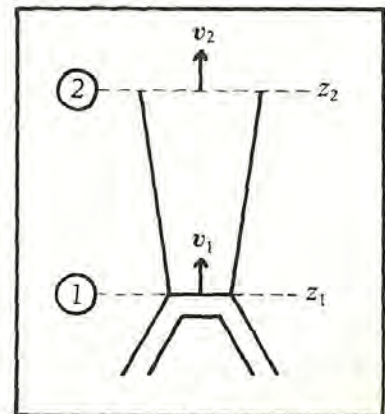


FIG. 10.7

Solución:

Por la ecuación de continuidad, se tiene:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow \pi \frac{d_1^2}{4} v_1 = \pi \frac{d_2^2}{4} v_2,$$

donde d_1 y v_1 son el diámetro y la velocidad, respectivamente, en 1, y d_2 y v_2 los correspondientes a 2. Y despejando d_2 , resulta:

$$d_2 = d_1 \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}. \quad (a)$$

Puesto que d_1 y v_1 son conocidos, el problema se reduce a calcular v_2 , para lo cual aplicamos la ecuación de Bernoulli a 1 y 2, teniendo en cuenta que en ambas secciones el agua se encuentra a la presión atmosférica, p_A :

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_A + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2.$$

Y por ser $v_1 = 14$ m/s y $z_2 - z_1 = 5$ m, resulta:

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \rho g (z_2 - z_1), \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2g(z_2 - z_1)} = \sqrt{14^2 - 2 \times 9,81 \times 5} = 9,89 \text{ m/s}.$$

Sustituyendo en (a), queda:

$$d_2 = d_1 \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} = 0,3 \sqrt{\frac{14}{9,89}} = 0,357 \text{ m}, \quad \boxed{d_2 = 357 \text{ mm}}.$$

10.8. Una tobera convergente-divergente va ajustada a la pared vertical de un depósito lleno de agua, a una profundidad $h = 1,80$ m de su superficie libre. Supóngase que en la parte convergente no hay pérdidas y que en la divergente las pérdidas (en altura) equivalen a 0,21 veces la altura de velocidad ($v^2/2g$) a la

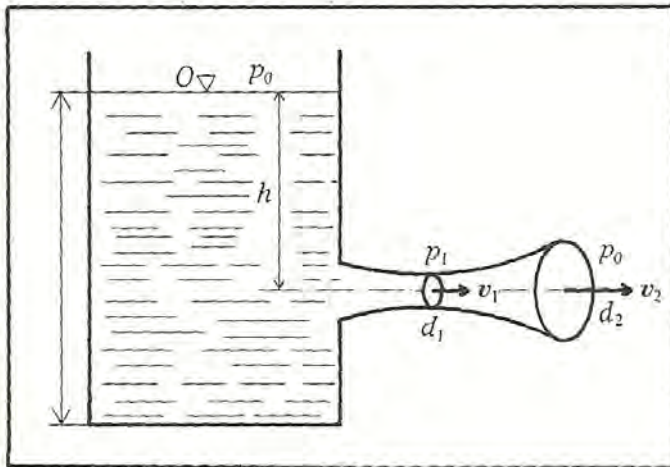


FIG. 10.8

salida. El valor mínimo que puede alcanzar la presión absoluta en la garganta es de 25 kPa para una presión barométrica de 102 kPa. Se pregunta: ¿Cuáles deben ser los diámetros de la garganta, d_1 , y de salida, d_2 , de la tobera, para permitir circular un caudal de $0,0050 \text{ m}^3/\text{s}$?

Solución:

El planteamiento se realiza a partir del concepto de caudal, Q :

$$Q = S_1 v_1 \Rightarrow S_1 = \frac{Q}{v_1}, \quad (a)$$

ya que, una vez hallado S_1 , tendremos el diámetro, d_1 , en la garganta. Y para calcular S_1 solamente se necesita averiguar v_1 , como indica (a), pues Q es conocido.

El valor de v_1 se deduce de la ecuación de Bernoulli aplicada a la superficie libre, 0, y a la garganta, 1:

$$p_0 + \rho g h = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2, \quad (p_0 = \text{presión atmosférica}),$$

donde hemos supuesto que la superficie libre no desciende ($v_0 = 0$) o que su velocidad es despreciable frente a v_1 . Despejando v_1 de la ecuación precedente, resulta:

$$v_1 = \sqrt{2 \frac{p_0 - p_1}{\rho} + 2gh},$$

que sustituido en (a), conduce a:

$$S_1 = \frac{Q}{v_1} = \frac{Q}{\sqrt{2 \frac{p_0 - p_1}{\rho} + 2gh}}.$$

reemplazando cada letra por su valor, queda:

$$S_1 = \frac{0,0050}{\sqrt{2 \frac{102.000 - 25.000}{1000} + 2 \times 9,81 \times 1,80}} = 3,6 \times 10^{-4} \text{ m}^2,$$

de $S_1 = \pi d_1^2 / 4$, se desprende:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4S_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 3,6 \times 10^{-4}}{\pi}} = 0,021 \text{ m} \Rightarrow \boxed{d_1 = 21 \text{ mm}},$$

que será el diámetro mínimo que deberá tener la garganta para que su presión no descienda del valor mínimo impuesto, $p_1 = 25 \text{ kPa}$.

Para calcular el diámetro a la salida de la tobera, d_2 , basta realizar un razonamiento paralelo, teniendo en cuenta que al aplicar la ecuación de Bernoulli a 0 y 2 hay que considerar las pérdidas, H_r , producidas en la parte divergente de la tobera:

$$p_0 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \Delta p_r \text{ (pérdidas de presión)},$$

que dividiendo por ρg , adopta la forma:

$$\frac{p_0}{\rho g} + h = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + H_r \text{ (pérdidas en altura)}.$$

Como $p_0 = p_2 = \text{presión atmosférica}$ y $H_r = 0,21 v_2^2 / 2g$, la ecuación precedente se convierte en:

$$h = \frac{v_2^2}{2g} + 0,21 \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1,21}} = \sqrt{\frac{2 \times 9,81 \times 1,8}{1,21}} = 5,4 \text{ m/s}.$$

Por tanto:

$$S_2 = \frac{Q}{v_2} = \frac{0,0050}{5,4} = 9,3 \times 10^{-4} \text{ m}^2,$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{4S_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 9,3 \times 10^{-4}}{\pi}} = 0,034 \text{ m} \Rightarrow \boxed{d_2 = 34 \text{ mm}}$$

10.9. En una caja cerrada llena de agua gira un disco delgado de 250 mm de diámetro (*dinamómetro hidráulico*). La fuerza de rozamiento por unidad de superficie en las caras del disco vale $3,03 v^2$ (N/m²), donde v es la velocidad en m/s. Averiguar la potencia absorbida cuando el disco gira a 6000 rev/min.

Solución:

La potencia, P , el momento dinámico, M , y la velocidad angular, ω , están relacionados por:

$$P = M\omega. \quad (a)$$

Luego para hallar P debemos proceder a calcular M y ω . Comencemos por ω que es más fácil:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \times \frac{6000}{60} = 200\pi \text{ rad/s}, \quad (b)$$

pues la frecuencia es $\nu = 6000/60$ rev/s.

La fuerza de rozamiento por unidad de superficie, $\tau = 3,03 v^2$, varía con r , pues $v = \omega r$. Y el momento, dM , respecto del centro del disco, O , de la fuerza dF que actúa sobre el anillo circular de anchura dr , representado en la figura 10.9, vendrá dado por:

$$dM = r dF, \quad (c)$$

y teniendo en cuenta que τ es la fuerza por unidad de superficie, resulta:

$$dF = \tau dS = \tau 2\pi r dr, \quad (d)$$

pues el elemento de superficie rayado en la figura, vale $dS = 2\pi r dr$.

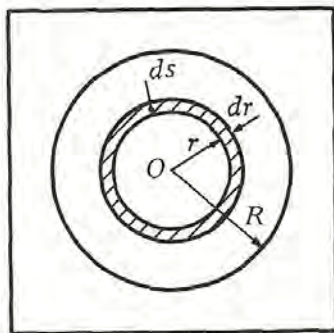


FIG. 10.9

La sustitución (d) en (c), conduce a:

$$dM = r \tau 2\pi r dr = 2\pi \tau r^2 dr,$$

y reemplazando τ por su valor: $\tau = 3,03 v^2 = 3,03 (\omega r)^2$, la expresión precedente se transforma en:

$$dM = 2\pi (3,03 \omega^2 r^2) r^2 dr = 6,06 \pi \omega^2 r^4 dr,$$

cuya integración nos da el momento, M , sobre una cara del disco:

$$M = \int_0^R 6,06\pi\omega^2 r^4 dr = 6,06\pi\omega^2 \frac{r^5}{5} \Big|_0^R = \frac{6,06}{5} \pi\omega^2 R^5,$$

valor que, sustituido en (a), da la potencia absorbida en una cara del disco. Por tanto, la potencia total absorbida en las dos caras será:

$$2P = 2M\omega = 2 \times \frac{6,06}{5} \pi\omega^3 R^5,$$

que para $R=0,125$ m y $\omega=200\pi$ rad/s [ec. (b)], se convierte en:

$$2P = 57.646 \text{ W}.$$

10.10. El espacio anular comprendido entre un eje, de diámetro 68,88 mm, y su cojinete, de diámetro 68,98 mm y longitud 80,00 mm se encuentra lleno de aceite de $0,092 \text{ kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ de viscosidad. Si el eje gira a 2000 rev/min, calcular la potencia necesaria para vencer la resistencia viscosa en el cojinete.

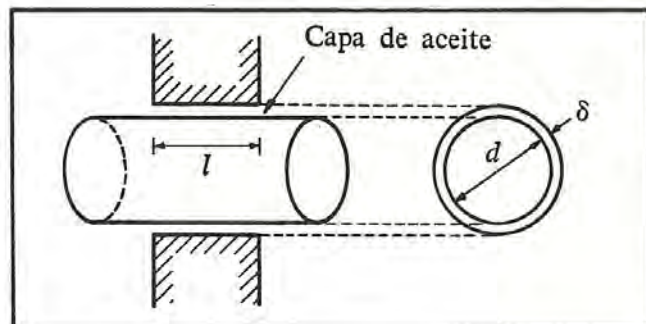


FIG. 10.10

Solución:

La potencia, P , absorbida por rozamiento, será igual al producto de la fuerza viscosa, F , por la velocidad, v :

$$P = F \cdot v. \quad (a)$$

La fuerza viscosa en el eje, en virtud de (7), es:

$$F = \eta S \frac{dv}{dr}, \quad (b)$$

donde se ha sustituido dv/dz por dv/dr , ya que el gradiente de velocidad se produce en dirección radial. Y teniendo en cuenta que el cojinete está en reposo, si se supone que el gradiente de velocidad en el aceite es uniforme, resulta:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v}{\delta}, \quad (c)$$

donde δ es el espesor de la capa de aceite (véase Fig. 10.10).

Reemplazando (c) en (b), se tiene:

$$F = \eta S \frac{dv}{dr} = \eta S \frac{v}{\delta} = \eta(\pi l d) \frac{v}{\delta}, \quad (d)$$

pues $S = \pi l d$.

En consecuencia, la expresión (a) se transforma en:

$$P = \eta \pi l d \frac{v}{\delta} \cdot v = \frac{\eta \pi l d v^2}{\delta}. \quad (e)$$

Y, como,

$$\eta = 0,092 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}), \quad l = 0,080 \text{ m}, \quad d = 0,06888 \text{ m},$$
$$v = \pi d \nu = \pi 0,06888 \times \frac{2000}{60}, \quad \delta = \frac{0,06898 - 0,06888}{2} = 0,00005 \text{ m},$$

la expresión (e) conduce a:

$$\boxed{P = 1657 \text{ W}}.$$

TEMA VII

TERMODINÁMICA

Termodinámica

Cuando un cuerpo cualquiera cambia de volumen, al mismo tiempo, por regla general, se produce o consume trabajo mecánico. Pero en la mayoría de los casos no es posible determinar éste con exactitud porque, junto con el trabajo exterior, se produce también comúnmente un trabajo interior desconocido (...).

El paso de calor de un cuerpo caliente a otro frío ocurre positivamente cuando se produce trabajo por acción del calor y, al mismo tiempo, se cumple que la sustancia que interviene se encuentra de nuevo, al final, en el mismo estado que al principio. (R. Clausius, 1850).



Introducción

Toda disciplina científica necesita de un vocabulario adecuado para que sus hallazgos puedan ser comunicados y entendidos con la mayor precisión posible. Con el fin de disponer de la terminología científica pertinente, introduciremos algunos **conceptos fundamentales**.

Sistema: es toda porción de materia **mentalmente aislada** del resto. Todo lo que es ajeno al sistema pero tiene una influencia directa sobre él, recibe el nombre de **alrededores** del sistema.

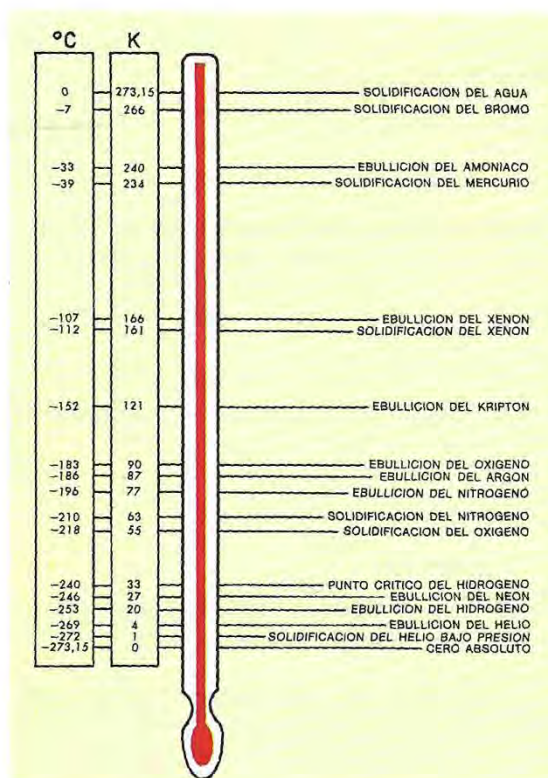
Sistema cerrado: es el que no permite intercambios de materia con sus alrededores.

Sistema aislado: es el que no permite intercambios de **energía** (calor o trabajo) ni de **materia** con sus alrededores.

Variables o coordenadas termodinámicas: son magnitudes observables a través de las cuales puede definirse el estado del sistema. En este capítulo nos ocuparemos sólo de los llamados **sistemas hidrostáticos**, en los que el estado de los mismos viene determinado por las tres variables: **presión** (p), **volumen** (V) y **temperatura** (T).

Gases ideales: los distintos estados de agregación de la materia, es decir, las fases sólida, líquida y gaseosa en que podemos encontrar las sustancias en la naturaleza, difieren entre sí, entre otros, por el hecho de que las fuerzas de cohesión entre sus moléculas o átomos constituyentes son mayores en los sólidos que en los líquidos y en éstos, mayores que en los gases.

Teniendo en cuenta lo anterior y para simplificar el estudio de los gases se considera, frecuentemente, que **las moléculas o áto-**



Relación entre las escalas de temperatura: Celsius (°C) y Kelvin (K.)

mos que los constituyen son **puntuales**, así como que **no existen fuerzas de interacción entre ellos** salvo cuando colisionan entre sí o con las paredes del recipiente que los contiene.

Un gas que cumple estas condiciones se denomina **gas ideal**; podemos aproximarnos a esta situación con un **gas real a baja presión y alta temperatura**.

I. Leyes de los gases ideales: las leyes de los gases ideales las cumplen aproximadamente los gases reales cuando se dan las condiciones que acabamos de exponer; dichas leyes son tres:

i) **Ley de Boyle-Mariotte:** relaciona la presión con el volumen de un gas cuando éste sufre una transformación a temperatura constante (isoterma), y dice:

A temperatura constante, la presión a la que un gas está sometido y el volumen que ocupa son **inversamente proporcionales**, lo que se expresa matemáticamente por la ecuación:

$$pV = \text{cte} \quad \text{si} \quad T = \text{cte} \quad [7.1]$$

ii) **Leyes de Gay-Lussac:** se refieren a la dilatación de un gas, tanto a presión constante como a volumen constante.

Primera ley:

A presión constante, la variación relativa del volumen de un gas es directamente proporcional a la variación de temperatura.

Es decir, si V_0 es el volumen que ocupa el gas a la temperatura t_0 y V el correspondiente a temperatura t , se cumple:

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \alpha(t - t_0) \quad [7.2]$$

donde α es una cantidad constante que recibe el nombre de **coeficiente de dilatación a presión constante**, cuyo valor aproximado, obtenido a partir de medidas experimentales es:

$$\alpha = \frac{1}{273,15} \text{ grado}^{-1}$$

De la ecuación [7.2] se obtiene, si se toma $t_0 = 0^\circ\text{C}$,

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad [7.3]$$

Segunda ley:

A volumen constante, la variación relativa de la presión de un gas es directamente proporcional a la variación de temperatura.

Es decir, si a la temperatura t_0 el gas está a una presión p_0 , siendo p la presión correspondiente a la temperatura t , se verifica:

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \beta(t - t_0) \quad [7.4]$$

donde β representa el **coeficiente piezotérmico** del gas. Su valor es:

$$\beta = \frac{1}{273,15} \text{ grado}^{-1}$$

De nuevo, si $t_0 = 0^\circ\text{C}$ puede escribirse

$$p = p_0(1 + \beta t) \quad [7.5]$$

Ambas leyes pueden expresarse en función de la temperatura absoluta (véase párrafo 7.1) teniendo en cuenta que

$$1 + \frac{1}{273,15} t = \frac{273,15 + t}{273,15} = \frac{T}{T_0}$$

donde T es la temperatura absoluta correspondiente a la temperatura celsius t , y T_0 la correspondiente a 0°C .

Por tanto, de las leyes de Gay-Lussac se deduce:

$$V = V_0 \frac{T}{T_0} \quad \text{y} \quad p = p_0 \frac{T}{T_0}$$

o bien:

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} \quad \text{y} \quad \frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0}$$

iii) **Ecuación de estado de un gas ideal:** consideremos una masa m de un gas cuya masa molar molecular es M , que se encuentra inicialmente en el estado descrito por los valores p_0 , V_0 y T_0 de sus coordenadas termodinámicas. Supongamos que mediante una transformación isoterma pasa a un estado caracterizado por las coordenadas p , V' y T_0 . Se deduce entonces, por la ley de Boyle-Mariotte:

$$p_0 V_0 = p V' \quad [7.6]$$

Si, ahora, mediante una transformación a presión constante, se modifica el estado del gas de modo que su estado final viene dado por p , V y T , resulta:

$$\frac{V'}{T_0} = \frac{V}{T}$$

es decir,

$$V' = V \frac{T_0}{T} \quad [7.7]$$

de [7.6] y [7.7] se tiene:

$$p_0 V_0 = p V \frac{T_0}{T}$$

que puede escribirse de la forma

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \quad [7.8]$$

Llamemos V_m al volumen molar y consideremos que el estado descrito por los valores p_0 , V_0 y T_0 , es el que corresponde a las llamadas **condiciones normales** (1 atm de presión y 0 °C de temperatura).

El volumen molar de todos los gases, en las mismas condiciones de presión y temperatura, es el mismo por la hipótesis de Avogadro. En condiciones normales el valor de este volumen es:

$$V_{m_0} = 22,4 \text{ l}$$

Por tanto, si disponemos de n moles de un gas en condiciones normales, ocuparán un volumen:

$$V_0 = n V_{m_0}$$

que, sustituido en la ecuación de estado de los gases ideales, permite escribir ésta de la forma:

$$\frac{pV}{T} = n \frac{p_0 V_{m_0}}{T_0} = nR$$

donde

$$R = \frac{p_0 V_{m_0}}{T_0} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 22,4 \text{ l}}{273,15 \text{ K}} = 0,082006 \text{ atm l mol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 8,3123 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

es la constante de los gases ideales.

La ecuación de estado de un gas ideal puede escribirse:

$$pV = nRT \quad [7.9]$$

donde el número de moles n viene dado por

$$n = \frac{m}{M} \quad [7.10]$$

siendo m la masa del gas en el sistema, y M , la masa molar molecular de dicho gas.

II. Transformaciones de un gas ideal: un gas ideal puede sufrir muchos tipos de transformaciones, de entre ellas las más importantes son:

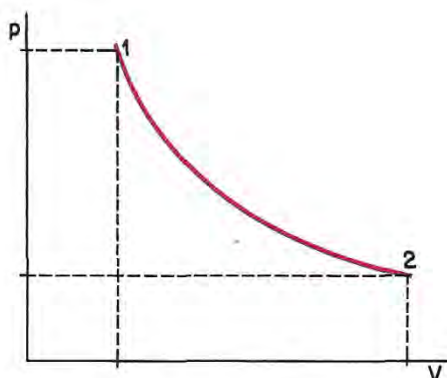


Fig. 7.1. Representación gráfica de una transformación isoterma.
Responde a la ecuación $pV = \text{cte}$.

i) **Isotermas:** en ellas se mantiene constante la temperatura, mientras varía la presión y el volumen del gas. Vienen descritas por la ley de Boyle-Mariotte por lo que su ecuación es:

$$pV = \text{cte}$$

En un diagrama p - V (véase párrafo 7.4), su representación gráfica es la de la figura 7.1.

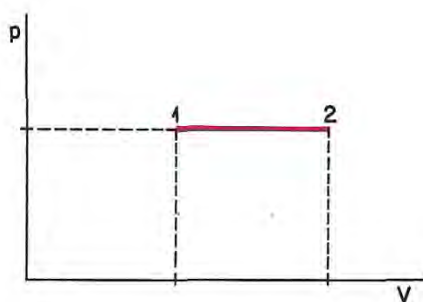


Fig. 7.2. Representación gráfica de una transformación isóbara.
Responde a la ecuación $p = \text{cte}$.

ii) **Isóbaras:** en ellas se mantiene constante la presión, variando el volumen y la temperatura. Su ecuación es:

$$p = \text{cte}$$

En un diagrama p - V su representación gráfica es la de la figura 7.2.

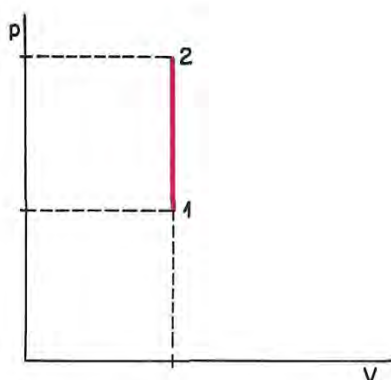


Fig. 7.3. Representación gráfica de una transformación isócara.
Responde a la ecuación $V = \text{cte}$.

iii) **Isócoras:** en ellas se mantiene constante el volumen, mientras varían la presión y la temperatura. Su ecuación es:

$$V = \text{cte}$$

En un diagrama p - V , su representación gráfica es la de la figura 7.3.

iv) **Adiabáticas:** se realizan sin intercambio de calor con los alrededores.

NOTA

Recordemos brevemente algunas de las unidades más importantes de las variables termodinámicas:

Presión:

Sistema C.G.S. Baria = dina cm⁻²
Sistema Internacional (SI) Pascal = N m⁻²

Unidades prácticas:

Atmósfera técnica = kp cm⁻²; bar = 10⁶ barias; mbar = 10³ barias.

tor o mm de Hg es la presión producida por una columna de mercurio de 1 mm de altura y 1 cm² de sección:

$$1 \text{ tor} = \frac{10^{-1} \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}^2 \cdot 13,6 \text{ g cm}^{-3} \cdot 980 \text{ cm s}^{-2}}{1 \text{ cm}^2} = 1332,8 \text{ barias}$$

1 atm o atmósfera física = 760 tor.

Volumen:

Sistema C.G.S. : Centímetro cúbico (cm³)
Sistema Internacional: Metro cúbico (m³)

Unidad práctica:

Litro (l) = 10³ cm³

Temperatura:

Escala Celsius : Grado celsius (°C)
Escala absoluta: Kelvin (K)

III. Ecuación de estado: de las tres variables termodinámicas que caracterizan el estado de un sistema, sólo dos son independientes. La tercera viene determinada en cuanto se fijan los valores de las otras dos. A la ecuación que relaciona las tres variables

$$f(p, V, T) = 0 \quad [7.11]$$

se la llama **ecuación de estado del sistema**. Lo mismo puede decirse para otros sistemas cuyas coordenadas termodinámicas sean diferentes.

Como ejemplo de sistema hidrostático podemos pensar en un gas ideal, cuya ecuación de estado es la conocida relación

$$pV = nRT \quad [7.12]$$

o bien, para escribirla en la forma [7.11]:

$$pV - nRT = 0 \quad [7.13]$$

En lo que sigue consideraremos las variables presión y volumen como independientes, salvo que se advierta lo contrario.

IV. Función de estado: además de las variables termodinámicas ya estudiadas, p , V y T (que se conocen con el nombre de coordenadas termodinámicas en los sistemas hidrostáticos), existen otras cuyo valor depende de éstas y que reciben el nombre de **funciones de estado**. Ejemplos de estas funciones son: la **energía interna** y la **entropía**, de las que trataremos a lo largo del capítulo.

Estado de equilibrio: diremos que un sistema hidrostático está en un estado de equilibrio, cuando los valores de las variables p y V , que definen su estado, permanecen invariables mientras las condiciones externas no varíen.

Equilibrio térmico: cuando dos o más sistemas se encuentran entre sí en contacto térmico (es decir, que se permite el intercambio de energía entre ellos en forma de calor), sus variables termodinámicas ($p_1, V_1, p_2, V_2, p_3, V_3$; etc.), varían espontáneamente hasta que se alcanza un estado de equilibrio del sistema conjunto; se dice entonces que **tales sistemas se hallan en equilibrio térmico** (1).

Proceso reversible: para poder tratar un proceso termodinámico de tal modo que todos los estados por los que pasa el sistema sean **estados de equilibrio**, y a todos ellos se les pueda aplicar la ecuación de estado del sistema, se utiliza el concepto de **proceso reversible** que es una idealización de los procesos reales a la que podemos aproximarnos mediante dispositivos experimentales cuidadosamente diseñados.

Esta idealización es a la termodinámica lo que el punto material o el sólido rígido a la mecánica, y puede definirse así:

Proceso reversible es la transformación en la que las fuerzas externas que actúan sobre el sistema varían sólo ligeramente, de modo que los desequilibrios de dichas fuerzas son infinitesimales.

Por ejemplo: Consideremos un gas encerrado en un recipiente cilíndrico con un émbolo (fig. 7.4). Supongamos que comprimimos el gas encerrado desde un valor de la presión p_1 a otro valor p_2 ; el proceso se acercará tanto más a un proceso reversible cuanto más pequeño sea el incremento de presión Δp que, por aplicaciones sucesivas, permita pasar del estado inicial al final.

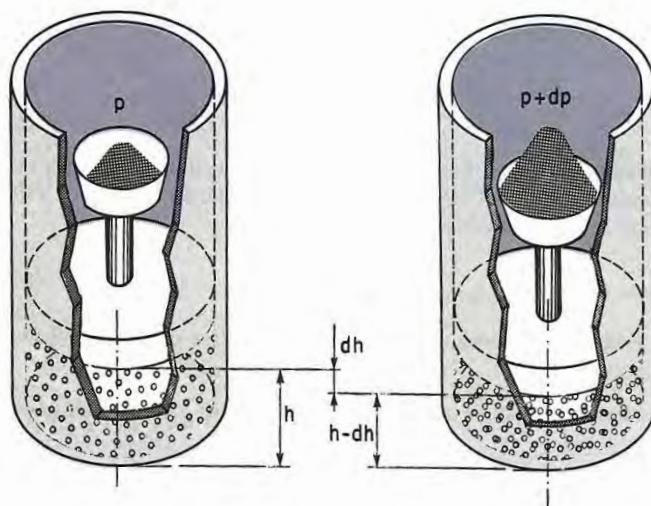


Fig. 7.4. Imagínese que en un recipiente cilíndrico con un émbolo construido de materiales diatérmicos (que dejan pasar calor a su través), se encierra un gas y se varía su presión añadiendo perdigones a un platillo. Este proceso sería una aproximación a la compresión isoterma reversible.

NOTA

No debe confundirse lo que llamamos estado de un sistema, que es cualquier situación del mismo en la que su presión, volumen y temperatura tienen valores fijos, con lo que antiguamente se llamaba **estado de agregación de la materia**: sólido, líquido y gaseoso. Tales estados de agregación, y otros más que existen, reciben actualmente el nombre de fases. Así, hablaremos de fase sólida, fase líquida y fase gaseosa.

(1) Estos hechos permiten enunciar el llamado **principio cero** de la termodinámica: «Si dos sistemas están en equilibrio térmico con un tercero, están en equilibrio térmico entre sí».

1. Calor y temperatura

Temperatura es la propiedad que caracteriza los estados de los sistemas que se hallan entre sí en **equilibrio térmico**. Se dice que todos están a la misma **temperatura**.

Para medir la temperatura se utilizan dispositivos llamados **termómetros**, basados en la variación, con el suministro de energía, de algunas de las propiedades físicas del sistema.

Hay varias escalas para medir la temperatura; las más utilizadas son: la **escala de Celsius**, cuya unidad es el **grado celsius** ($^{\circ}\text{C}$) y la **escala absoluta** de temperaturas, cuya unidad es el **kelvin** (K). Ambas escalas están relacionadas entre sí, por la ecuación:

$$t_c (^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273,15 \quad [7.14]$$

de modo que 0°C equivalen a 273,15 K.

Ejercicio 1

¿A qué valor de la temperatura celsius corresponde la temperatura absoluta de 77 K (nitrógeno líquido)? ¿Y la del helio líquido (4,2 K)?

Este ejercicio tan elemental tiene, únicamente, por objeto que el alumno tenga una idea clara, en una escala de temperaturas que le es familiar, de los valores de dos de las temperaturas más importantes en el mundo de la Física.

SOLUCIÓN

Para el caso del nitrógeno, de la aplicación directa de la fórmula [7.14] se sigue:

$$t_c = -196,15^{\circ}\text{C}$$

Para el caso del helio

$$t_c = -268,95^{\circ}\text{C}$$

Cuando dos cuerpos que se hallan a temperaturas diferentes ($T_1 > T_2$) se observa que la temperatura del cuerpo que la tenía mayor disminuye, a la par que la del otro aumenta, hasta que se alcanza el equilibrio térmico a una temperatura intermedia T_c . Se dice que la **energía interna** del primero disminuye mientras que la del segundo aumenta, porque, durante el contacto, pasa energía del primero al segundo.

Se llama calor a la energía que pasa de un cuerpo a otro durante un contacto térmico, y sólo mientras aquella está pasando.

Es decir, cuando el calor ha sido absorbido por el segundo cuerpo no está ya almacenado en su interior, no calor, sino que se ha transformado en **energía interna** del mismo; por ejemplo, aumentando la energía cinética de sus moléculas.

Las unidades de calor serán, por tanto, unidades de energía; la del Sistema Internacional es el julio (J). No obstante, se usan también la caloría (cal) que equivale a 4,1868 J, y la kilocaloría (1 000 cal).

2. Calor específico

Calor específico de una sustancia es la cantidad de calor necesaria para que la unidad de masa de dicha sustancia aumente su temperatura en 1 grado. Se expresa por la ecuación de definición:

$$c_e = \frac{Q}{m \Delta T}$$

de donde la unidad de calor específico, en el Sistema Internacional, es J/kg K.

Ejercicio 2

El calor específico del agua entre 0 y 100 °C es de 4,15 J/g K. Calcular la cantidad de calor necesaria para que 1 litro de agua eleve su temperatura de 0 a 100 °C ($\rho = 1\,000\text{ kg/m}^3$).

SOLUCIÓN

De la definición de calor específico se deduce:

$$Q = mc_e \Delta T = \rho V c_e \Delta T$$

sustituyendo valores:

$$\begin{aligned} Q &= 1\,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 4,15 \frac{10^3 \text{ J}}{\text{kg K}} \cdot 100 \text{ K} \\ Q &= 4,15 \cdot 10^5 \text{ J} \end{aligned}$$

El calor específico depende del proceso concreto mediante el cual se eleva la temperatura T , y tiene un valor distinto para cada una de dichas transformaciones. Para un gas ideal los calores específicos más importantes son:

- i) Calor específico a **presión constante**, cuando la elevación de la temperatura se realiza en una **transformación isóbara**. Se designa así:

$$c_p = \frac{1}{m} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p \quad [7.15]$$

- ii) Calor específico a **volumen constante**, cuando la elevación de la temperatura se realiza en una **transformación isócara**:

$$c_v = \frac{1}{m} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_v \quad [7.16]$$

Ejercicio 3

Considérese un volumen $V_1 = 1$ l de oxígeno a una presión $p_1 = 2$ atm y a una temperatura $t_1 = 100$ °C. Calcular su estado final si experimenta:

- a) una transformación isoterma en la que se duplica su volumen;
- b) una transformación isóbara en la que se duplica su volumen;
- c) una transformación isócora en la que se reduce su presión a la mitad;
- d) calcular el número de moles de oxígeno de que se dispone;
- e) sabiendo que la masa molar molecular del oxígeno es de 32 g/mol, calcular la masa de oxígeno

SOLUCIÓN

- a) En la transformación isoterma la temperatura no varía: $T_2 = T_1 = 373,15$ K
y el volumen se duplica según el enunciado; por tanto: $V_2 = 2$ l.
Como las transformaciones isotermas se rigen por la ley de Boyle-Mariotte:

$$p_2 V_2 = p_1 V_1$$

de donde

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = 1 \text{ atm}$$

- b) Por ser la transformación isóbara la presión no varía: $p_2 = p_1 = 2$ atm
y el volumen, según el enunciado es: $V_2 = 2$ l.

Una transformación isóbara se rige por la primera ley de Gay-Lussac, de donde

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = 746,30 \text{ K}$$

- c) La transformación isócora se realiza a volumen constante; por tanto: $V_2 = V_1 = 1$ l
y por el enunciado, la presión es: $p_2 = 1$ atm.

Las transformaciones isócoras se rigen por la segunda ley de Gay-Lussac; se deduce de ella:

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = 186,58 \text{ K}$$

- d) De la ecuación de los gases ideales:

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{2 \text{ atm} \cdot 1 \text{ l}}{0,082006 \text{ (atm l/mol K)} \cdot 373,15 \text{ K}} = 0,065 \text{ moles}$$

- e) Como el número de moles n es igual al cociente entre la masa de sustancia y su masa molar molecular,

$$n = \frac{m}{M}$$

$$m = nM = 0,065 \text{ moles} \cdot 32 \text{ g/mol} = 2,08 \text{ g}$$

Ejercicio 4

Se tienen 40 g de nitrógeno a 1 atm de presión y a la temperatura de 27 °C en un recipiente cerrado. Se calienta el depósito de modo que el nitrógeno alcanza una temperatura de 100 °C. Calcular:

- el número de moles de nitrógeno de que se dispone;
- el estado final del sistema;
- dígase qué tipo de transformación experimenta el gas suponiendo despreciable la dilatación del recipiente.

(Masa molar molecular del nitrógeno = 28 g/mol.)

SOLUCIÓN

- a) El número de moles viene dado por

$$n = \frac{m}{M} = \frac{40 \text{ g}}{28 \text{ g/mol}} = 1,43 \text{ moles}$$

- b) De la ley de los gases ideales

$$V_i = \frac{nRT_i}{p_i} = \frac{1,43 \text{ moles} \cdot 0,082006 \text{ (atm l/mol K)} \cdot 300,15 \text{ K}}{1 \text{ atm}} = 35,20 \text{ l}$$

Suponiendo despreciable la dilatación del recipiente, el volumen no ha variado:

$$V_f = V_i = 35,20 \text{ l}$$

y la temperatura es:

$$T_f = 273,15 + 100 = 373,15 \text{ K}$$

La presión se determina a partir de la segunda ley de Gay-Lussac

$$p_f = p_i \frac{T_f}{T_i} = 1,24 \text{ atm}$$

- c) Si el recipiente no se dilata, el volumen del gas no varía; por lo que la **transformación es isócara**.

3. Trabajo

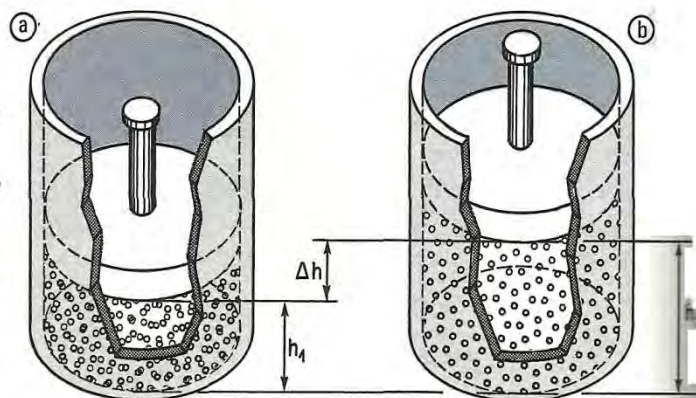
Si un sistema físico ejerce una fuerza sobre sus alrededores de modo que el punto de aplicación de dicha fuerza se desplaza, se dice que el sistema realiza un **trabajo sobre sus alrededores**. Dado el particular interés que tienen para nosotros los sistemas hidrostáticos, estudiaremos el trabajo que realiza un sistema de este tipo.

Consideremos un gas encerrado en un cilindro con pistón móvil (fig. 7.5); se mantiene en equilibrio a la temperatura ambiente si la presión atmosférica más la debida al peso del pistón igualan a la presión del gas en el interior del recipiente. Supongamos que las paredes del recipiente permiten el paso de calor a su través, y realicemos la siguiente experiencia:

Fig. 7.5. Trabajo en un sistema hidrostático:

- El sistema se halla en equilibrio a 0°C .
- El sistema se halla en equilibrio a 100°C .

Como la transformación es isóbara el trabajo realizado viene dado por $W = p(V_2 - V_1)$.



- Introducimos el recipiente en un termostato cuya temperatura puede variar entre 0°C y 100°C una vez que el sistema se halle en equilibrio a 0°C (fig. 7.5a) elevamos ligeramente la temperatura en una cantidad tan pequeña como queramos, de manera que las demás variables termodinámicas se encuentren en todo momento con valores tan próximos como sea posible a sus valores en el anterior estado de equilibrio.
- Continuamos este proceso, produciendo siempre cambios muy pequeños en la temperatura del termostato y aguardando a que el sistema recupere su condición de equilibrio.
- En todos los casos anotamos los valores de la presión p , la altura del émbolo h , medida desde el fondo del recipiente, el volumen del gas V y la temperatura t .
- Finalmente, detenemos el experimento en el momento en que se alcance un estado final de equilibrio térmico, correspondiente a la temperatura de ebullición del agua 100°C (fig. 7.5b).

Si se analizan los datos experimentales que hemos ido tomando, se observa que el volumen ocupado por el gas en la temperatura final es mayor que el inicial, pero la presión continúa siendo la misma: la suma de la presión atmosférica más la debida al peso del émbolo. Es decir, el gas ha sufrido una transformación a presión constante en la que, suministrando energía al sistema en forma de calor, se han variado la temperatura y el volumen del mismo. Durante el proceso, el gas se ha expandido haciendo un trabajo sobre el exterior.

Si el área del émbolo es S , la fuerza ejercida por el sistema sobre los alrededores a través del émbolo es $F = p \cdot S$. Como durante la expansión el émbolo se ha desplazado una distancia h , el trabajo realizado es:

$$W = pSh = p\Delta V = p(V_2 - V_1) \quad [7.18]$$

4. Diagramas p - V

Puesto que las magnitudes presión (p), volumen (V) y temperatura (T) definen el estado de un sistema, podemos idear una serie de representaciones gráficas del mismo, muy útiles en el tratamiento de determinados problemas. Así, por analogía con la representación de la posición de un punto material en el espacio, por sus tres coordenadas cartesianas x , y , z se podría hacer una representación tridimensional, en la que cada punto de un sistema cartesiano de coordenadas: (presión p), (volumen V) y (temperatura T) represente un estado del sistema.

Sin embargo, este tipo de representación es poco útil por su complejidad. Resulta más manejable representar el estado de un sistema en el plano, considerando constante una de las coordenadas termodinámicas. Esto equivale a cortar la representación tridimensional anterior por planos paralelos a los planos coordenados o a proyectar la representación tridimensional sobre los planos coordenados. Pueden obtenerse así diagramas p - V ; p - T o V - T , cada uno de los cuales tiene interés para el tratamiento de un tipo diferente de problema.

Para ver su utilidad volvamos a analizar el ejemplo propuesto en el análisis del trabajo de la pregunta anterior. Si representamos en un diagrama p - V el proceso anterior (fig. 7.6) obtenemos una recta paralela al eje de los volúmenes, ya que, según hemos visto, la presión se mantiene constante mientras el volumen crece. Puede verse que el trabajo realizado viene representado por el área limitada por la línea que representa el proceso, el eje de los volúmenes y las ordenadas de los estados inicial y final de equilibrio.

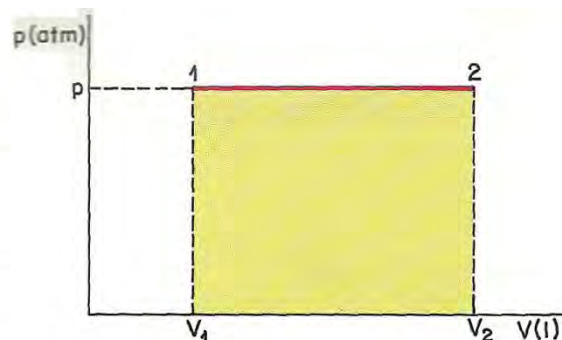


Fig. 7.6. Representación gráfica del trabajo realizado en el dispositivo experimental de la figura 7.5. El trabajo, en atm · litro, viene dado por el área rayada en la figura.

Ejercicio 5

Un mol de gas ideal realiza una transformación termodinámica reversible como la que indica la figura 7.7. Calcular el trabajo realizado por el gas sobre sus alrededores.

SOLUCIÓN

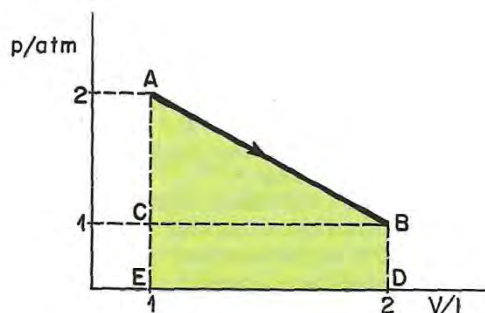


Fig. 7.7.

Primer método: La ecuación de la transformación termodinámica es la de una recta

$$p = aV + b$$

Como pasa por el punto A,

$$2 = a \cdot 1 + b$$

Como pasa por el punto B,

$$1 = a \cdot 2 + b$$

de donde, restando ambas

$$1 = -a \text{ es decir } a = -1 \text{ y, por tanto, } b = 3$$

así que la ecuación de la transformación es: $p = -V + 3$; entonces

$$\begin{aligned} W_A^B &= \int_A^B p dV = \int_1^2 (-V + 3) dV = \left[-\frac{V^2}{2} + 3V \right]_1^2 = \\ &= (-2 + 6) - \left(-\frac{1}{2} + 3 \right) = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \text{ J} \end{aligned}$$

Segundo método: El trabajo es el área rayada en la figura

$$W = \text{área triángulo } ACB + \text{área rectángulo } CBDE = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{ J}$$

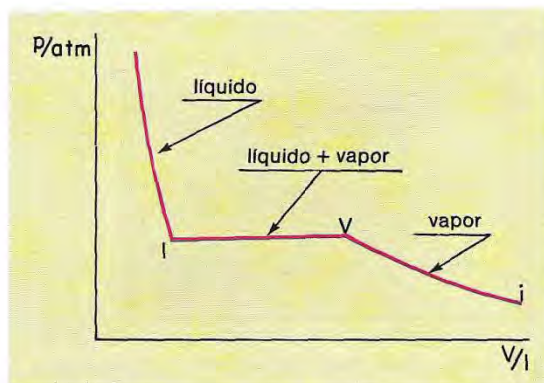


Fig. 7.8. Isoterma en diagrama p - V de un sistema que cambia de fase en la transformación.

Si ahora le obligamos a sufrir una compresión isoterma, pasamos, en fase vapor y, mediante un proceso reversible hasta el punto V . Si a partir de aquí intentamos aumentar la presión, a temperatura constante, observamos que aquella no aumenta, sino que también se mantiene constante, mientras parte del vapor se va licuando hasta que se alcanza el punto l , en que todo el vapor se ha convertido en líquido.

Cualquier compresión ulterior del sistema manteniendo constante la temperatura sólo es capaz de producir ligeras disminuciones del volumen del líquido, a costa de enormes incrementos de la presión. Esto hace que la pendiente de la isoterma, en esta zona, sea mucho mayor.

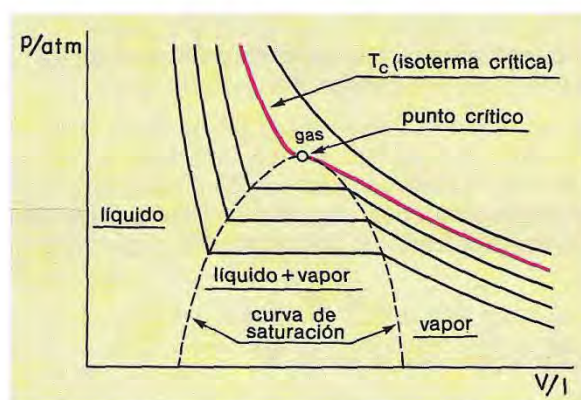


Fig. 7.9. Conjunto de isotermas de un sistema que experimenta un cambio de fase. Por encima de la isoterma crítica el sistema está en forma de gas. ¿Es lo mismo gas que vapor?

Supongamos un sistema hidrostático que experimenta un cambio de fase al pasar desde un estado inicial i a un estado final f .

Tomemos como referencia el agua que, a temperatura superior a los 373,15 K, se encuentra en fase gaseosa (vapor), y, a temperaturas entre 273,15 y 373,15 K se encuentra en fase líquida.

Consideremos que su estado inicial (vapor) viene descrito por las coordenadas p_i, V_i, T_i , punto que, en un diagrama p, V , corresponde al punto i de la figura 7.8.

Cuando se realiza el mismo experimento para otros valores de la temperatura se obtiene un conjunto de isotermas como el de la figura 7.9.

En la gráfica se observan una serie de aspectos importantes:

- Existe una isoterma (isoterma crítica), correspondiente a una temperatura T_c , por encima de la cual no se puede licuar un vapor por compresión a temperatura constante. Se dice entonces que el sistema está en fase gaseosa.
- Existe una curva que limita el conjunto de puntos en que coexisten las fases líquido y vapor; se llama **curva de saturación**.
- La isoterma crítica tiene un punto de inflexión justamente sobre la curva de saturación. Tal punto recibe el nombre de **punto crítico**, al que corresponde en cada sustancia, una presión y volumen críticos.

5. Primer principio de la termodinámica

De cuanto precede se deduce que un sistema puede tener con sus alrededores intercambios energéticos de distinto tipo y sentido, es decir: el sistema puede realizar trabajo mecánico sobre los alrededores (gas del ejemplo, al expandirse), o los alrededores sobre el sistema (esto produciría la compresión del gas del ejemplo).

Por otro lado, si el sistema está en contacto térmico con los alrededores, y su temperatura es más alta que la de éstos, cederá energía en forma de calor hasta que se alcance el equilibrio térmico; y recíprocamente, en el caso de que su temperatura sea menor.

Para poder tratar matemáticamente los intercambios de energía es necesario establecer un criterio de signos que ponga de relieve el sentido del flujo energético (fig. 7.10). Así, se conviene:

- Si el sistema realiza trabajo sobre el medio exterior, $W > 0$.
- Si el sistema recibe energía en forma de trabajo del medio exterior, $W < 0$.
- Si el sistema cede energía en forma de calor a sus alrededores, $Q < 0$.
- Si el sistema absorbe calor de sus alrededores, $Q > 0$.

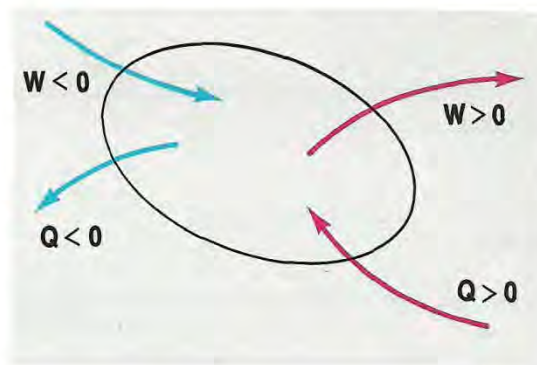


Fig. 7.10. Criterio de signos en las transformaciones termodinámicas, del trabajo (W) y el calor (Q).

Formulación del primer principio de la termodinámica: energía interna

Consideremos un gas encerrado en un recipiente cilíndrico tapado con un émbolo, de modo que tanto el cilindro como el émbolo no permitan el paso de calor a su través (se dice que son **paredes adiabáticas**). Y supongamos que el sistema va provisto de un termómetro.

Realicemos ahora una compresión del sistema, desde un estado caracterizado por los valores p_1 , V_1 y T_1 , de sus variables termodinámicas, a otro caracterizado por $p_2 > p_1$ y, por tanto, $V_2 < V_1$. Si medimos la temperatura, observamos que T_2 es mayor que T_1 .

Analicemos con cuidado este resultado. Al realizar trabajo sobre el sistema para ir desde el estado inicial hasta el final, hemos suministrado energía al mismo. El gas no ha podido transferir energía en otra forma (calor) al medio exterior, pues está térmicamente aislado por medio de paredes adiabáticas, es decir, paredes que no permiten el intercambio de calor con los alrededores. Así pues, la energía tiene que haber quedado almacenada en el sistema.

Por tanto, podemos decir que existe una **función de estado** U , llamada **energía interna del sistema**, cuyo valor depende de los valores de las variables termodinámicas. En el caso del experimento, el incremento de energía interna entre el estado inicial i y el final f vendrá dado por

$$-W_{i,f} = U_f - U_i \quad [7.19]$$

(Nótese que la cantidad $-W_{i,f}$ es positiva, pues $W_{i,f} < 0$.)

Supongamos ahora que nuestro dispositivo experimental no dispone de paredes perfectamente adiabáticas, de modo que existe contacto térmico entre el sistema y sus alrededores, **permitiendo cierto flujo de calor a través de las paredes**.

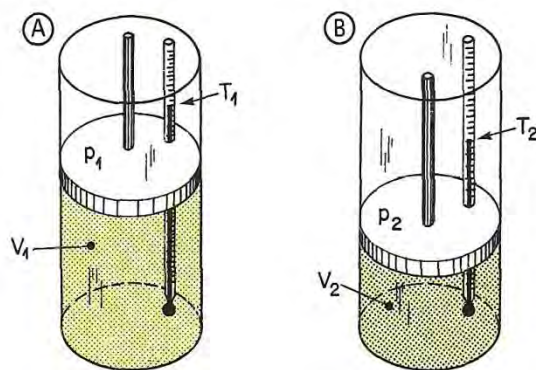


Fig. 7.11. Compresión de un gas variando las variables p , V , T .

Consideremos de nuevo el sistema en el estado inicial i y pasemos mediante compresión al estado final f' . Si observamos la temperatura que marca el termómetro (T_2'), advertiremos, de inmediato, que es menor que la medida en el experimento anterior (T_2). Esto significa que el trabajo realizado (el mismo que en el caso anterior), no se invierte íntegramente en incrementar la energía interna del sistema, ya que la temperatura alcanzada es menor, sino que parte es transferida al medio exterior debido a la diferencia de temperatura existente.

Así, pues, cuando la transformación **no es adiabática**, puede escribirse:

$$Q_{i,f} = U_f - U_i - (-W_{i,f})$$

es decir:

$$Q_{i,f} = U_f - U_i + W_{i,f}$$

o bien

$$Q_{i,f} - W_{i,f} = U_f - U_i \quad [7.20]$$

expresión matemática que define el llamado **primer principio de la termodinámica**, y puede enunciarse así:

Cuando un sistema experimenta una transformación termodinámica que le lleva desde un estado inicial i a otro estado final f , la diferencia entre el calor y el trabajo intercambiados con los alrededores es igual a la variación de su energía interna.

El primer principio de la termodinámica no es más que una reformulación del conocido **principio de conservación de la energía**.

Tanto es así, que admite otro enunciado que establece la imposibilidad de construir una máquina de funcionamiento periódico que produzca trabajo sin consumir una cantidad equivalente de energía (**móvil perpetuo de primera especie**).

NOTA

Para una transformación infinitesimal la expresión matemática del primer principio es:

$$dQ - dW = dU \quad [7.21]$$

donde dQ y dW representan cantidades infinitesimales de calor y trabajo, respectivamente, y no diferenciales de funciones, ya que, ni uno ni otro son funciones de estado del sistema.

Sin embargo, la energía interna sí es una función de estado, por lo que dU , que representa una variación infinitesimal de la energía interna del sistema, es la diferencial de una función.

Puede demostrarse que la energía interna de un gas ideal depende sólo de la temperatura; por lo que en una **transformación a volumen constante**

$$dW = p dV = 0$$

luego

$$dQ = dU$$

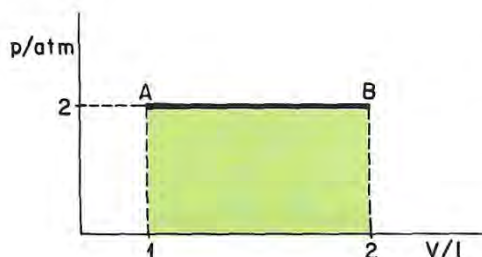
de donde

$$C_v = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_v = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \quad [7.22]$$

donde n es el número de moles.

Ejercicio 6

Un mol de gas ideal diatómico efectúa una transformación isóbara (a presión constante) entre los puntos *A* y *B* indicados en la figura 7.12. Calcular:



- el calor y el trabajo intercambiados con los alrededores en esta transformación;
- la variación de energía interna;
- comprobar que se cumple el primer principio de la termodinámica;

Fig. 7.12.

SOLUCIÓN

- a) Como la transformación es isóbara, se cumple:

$$Q = nC_p \cdot \Delta T = nC_p(T_B - T_A)$$

donde C_p es el calor molar a presión constante; para un gas ideal,

$$pV = nRT \Rightarrow T = \frac{pV}{nR}$$

de donde

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{2 \text{ atm} \cdot 1 \text{ l}}{1 \text{ mol} \cdot 0,082006 \text{ (atm l/mol K)}} = 24,39 \text{ K}$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{2 \text{ atm} \cdot 2 \text{ l}}{1 \text{ mol} \cdot 0,082006 \text{ (atm l/mol K)}} = 48,78 \text{ K}$$

y el calor intercambiado con los alrededores es:

$$Q = 1 \text{ mol} \cdot 29,09 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot (48,78 - 24,39) \text{ K} = 709,51 \text{ J}$$

En la transformación isóbara, el trabajo realizado vale:

$$W = p(V_B - V_A) = pV_B - pV_A = nRT_B - nRT_A = nR(T_B - T_A) =$$

$$= 1 \text{ mol} \cdot 8,3123 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot (48,78 - 24,39) \text{ K} = 202,74 \text{ J}$$

- b) Por definición de calor molar a volumen constante,

$$C_v = \frac{1}{n} \left(\frac{dU}{dT} \right)_v$$

suponiendo que C_v es prácticamente constante, en un intervalo pequeño de temperaturas,

$$dU = nC_v dT$$

Teniendo en cuenta que el calor molar a volumen constante de un gas ideal diatómico, vale $20,78 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_B - U_A = nC_v \cdot \Delta T = nC_v(T_B - T_A) = \\ &= 1 \text{ mol} \cdot 20,78 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot (48,78 - 24,39) \text{ K} = 506,82 \text{ J}\end{aligned}$$

c) Si restamos el calor y el trabajo que intervienen, resulta:

$$Q - W = 709,51 \text{ J} - 202,74 \text{ J} = 506,77 \text{ J}$$

es decir

$$Q - W = \Delta U$$

(las diferencias entre ambos resultados se deben al redondeo en los valores de los calores molares).

6. Segundo principio de la termodinámica

Es evidente, y basta analizar cualquier ejemplo sencillo, que se puede realizar trabajo sobre un sistema liberando calor por parte de éste, de tal modo que el estado final del sistema sea el mismo que el inicial. Piénsese, por ejemplo, en una resistencia eléctrica que emite calor continuamente, sin cambiar su estado, a expensas de la energía de la corriente eléctrica. Es decir, el trabajo puede convertirse en calor con un rendimiento

$$\eta = \frac{Q}{W} \quad [7.23]$$

del 100 por 100, de modo que el sistema actúa sólo como intermediario.

Sin embargo, las cosas ocurren de modo diferente si se desea invertir el proceso, es decir, suministrar calor a un sistema para obtener energía de él, en forma de trabajo, mediante un proceso indefinido y con rendimiento unidad.

La única forma de conseguir un proceso indefinido es someter el sistema a una serie de procesos en los cuales se produzca absorción de calor y realización de trabajo, de modo que al final de todos los procesos, el sistema vuelva al estado inicial. De este modo se podría repetir indefinidamente el ciclo.

Cada uno de los procesos puede incorporar flujo de calor desde el sistema o hacia el sistema y ejecución de trabajo por el sistema o sobre el sistema; el rendimiento viene dado por

$$\eta = \frac{W}{Q_a} \quad [7.24]$$

donde W es el trabajo neto realizado y Q_a el calor absorbido por el sistema.

Suponiendo que el sistema cediera calor (Q_c) en alguna de las transformaciones del ciclo, por el primer principio se tiene:

$$Q_a - Q_c = W \quad [7.25]$$

(Téngase en cuenta que el proceso es cíclico y la variación de energía interna es, por tanto, nula.)

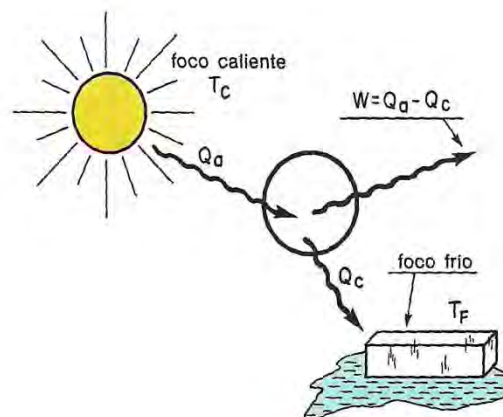
Así pues, el rendimiento vale:

$$\eta = \frac{Q_a - Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{Q_c}{Q_a} \quad [7.26]$$

Esta situación se representa gráficamente en la figura 7.13, donde el sol y el bloque de hielo fundente representan, respectivamente, los focos caliente y frío que se encuentran a temperatura T_C y T_F , respectivamente, y la máquina, representada por el círculo, absorbe del foco caliente la cantidad de energía Q_a en forma de calor, cede al foco frío la cantidad Q_c y convierte la diferencia en **trabajo útil**.

Fig. 7.13. Máquina térmica: absorbe calor Q_a del foco caliente a la temperatura T_C y cede calor Q_c a un foco frío a la temperatura T_F . La diferencia, $Q_a - Q_c$ se transforma en trabajo con rendimiento:

$$\eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}$$



Para que el rendimiento de la transformación de calor en trabajo fuera, como en el caso anterior, del 100 por 100 ($\eta = 1$) debería ser $Q_c = 0$, es decir, el sistema debería absorber calor Q_a de un foco térmico caliente sin ceder calor a ningún foco frío, convirtiendo la totalidad del calor absorbido en trabajo.

Pues bien, el segundo principio de la termodinámica establecido a partir de la experiencia, dice:

No es posible una transformación termodinámica en la que se absorba calor de un único foco térmico y ese calor se transforme totalmente en trabajo.

Si el segundo principio no fuera cierto, sería posible construir un barco de vapor que absorbiera calor del mar y se moviera así continuamente sin necesitar combustible.

7. Ciclo de Carnot

La primera formulación del segundo principio de la termodinámica, conocida como **teorema de Carnot**, es obra de un ingeniero francés, Sadi Carnot (1796-1832), que al buscar las condiciones de máximo rendimiento de la máquina de Watt encuentra que, para poder realizar trabajo a expensas de calor un sistema que realiza una transformación cíclica, necesita **absorber calor de un foco caliente y ceder una cierta parte a un foco más frío**.

Si toda la diferencia entre el calor absorbido y el cedido se transforma en trabajo, el rendimiento sería máximo; ahora bien, no es posible evitar completamente algunas pérdidas de energía por conducción de calor o rozamiento. Así pues, el **rendimiento máximo sólo sería posible si la máquina realizara una transformación cíclica ideal (ciclo de Carnot) sin pérdida de energía**.

Es evidente, por tanto, que la **eficacia de un refrigerador es mayor que la unidad**.

A partir del segundo principio de la termodinámica puede demostrarse (ya lo hizo Carnot) que ninguna máquina operando entre dos temperaturas determinadas, cualquiera que sea el ciclo que sufre el sistema físico en que esté basado, puede tener un rendimiento mayor que el del ciclo de Carnot.

Ejercicio 7

Una máquina térmica obliga a un mol de gas ideal diatómico a efectuar un ciclo de Carnot de las siguientes características:

$$\text{Punto 1 } V_1 = 4 \text{ l} \quad T_1 = 500 \text{ K} \quad p_1 = 10,25 \text{ atm}$$

$$\text{Punto 2 } V_2 = 8 \text{ l} \quad T_2 = 500 \text{ K} \quad p_2 = 5,12 \text{ atm}$$

$$\text{Punto 3 } V_3 = 16 \text{ l} \quad T_3 = 379 \text{ K} \quad p_3 = 1,94 \text{ atm}$$

$$\text{Punto 4 } V_4 = 7,99 \text{ l} \quad T_4 = 379 \text{ K} \quad p_4 = 3,89 \text{ atm}$$

Calcular:

- Calor absorbido del foco caliente por el sistema, en un ciclo.
- Calor cedido al foco frío por el sistema, en un ciclo.
- Rendimiento del ciclo.
- Trabajo desarrollado en cada ciclo.

SOLUCIÓN

- La transformación $1 \rightarrow 2$, en la que se absorbe calor (Q_a) del foco caliente, es **isoterma**. Por tanto, no hay variación de energía interna; y por el primer principio de la termodinámica:

$$dQ = dW$$

$$\text{por tanto: } Q = \int_1^2 p dV \quad \text{Ahora bien, por la ley de los gases ideales: } pV = nRT$$

$$\begin{aligned} \text{de donde, } Q_a &= \int_1^2 p dV = \int_1^2 nRT \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= 1 \text{ mol} \cdot 8,3123 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 500 \text{ K} \cdot \ln(8 \text{ l}/4 \text{ l}) = 2880,82 \text{ J} \end{aligned}$$

- De modo análogo, el calor cedido en la transformación isoterma $3 \rightarrow 4$ vale:

$$\begin{aligned} Q_c &= nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} = \\ &= 1 \text{ mol} \cdot 8,3123 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 379 \text{ K} \cdot \ln \frac{7,99 \text{ l}}{16 \text{ l}} = \\ &= -2187,60 \text{ J} \end{aligned}$$

- El rendimiento del ciclo viene dado por

$$\eta = \frac{T_1 - T_3}{T_1} = \frac{500 \text{ K} - 379 \text{ K}}{500 \text{ K}} = 0,24$$

- El rendimiento también puede escribirse:

$$\eta = \frac{W}{Q_a}$$

donde W es el trabajo realizado. Así pues,

$$W = \eta Q_a = 0,24 \cdot 2880,82 \text{ J} = 691,40 \text{ J}$$

Ejercicio 8

Una máquina frigorífica obliga a que un mol de gas ideal diatómico efectúe un ciclo de Carnot entre 25 y 0 °C, recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj. Sabiendo que, en la compresión isoterma del ciclo, el volumen se divide por 1,25, calcular:

- La eficiencia de la máquina.
- La cantidad de hielo que producirá en cada ciclo a partir de agua a 25 °C (el calor de fusión del hielo, L_f , vale $335 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1}$ y el calor específico del agua, c_e , es $4,1868 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ °C}^{-1}$).
- El número de ciclos que se necesitan para producir 10 kg de hielo.
- El trabajo necesario para producir la citada cantidad de hielo.
- El calor liberado al foco caliente en este proceso.

SOLUCIÓN

- a) La eficiencia de una máquina frigorífica es $\varepsilon = \frac{Q_c}{Q_a - Q_c}$

donde Q_c es el calor absorbido del foco frío y Q_a el calor cedido al foco caliente. Puesto que se trata de un ciclo de Carnot el rendimiento también puede expresarse: $\varepsilon = \frac{T_F}{T_C - T_F}$

donde T_C y T_F son, respectivamente, las temperaturas de los focos caliente y frío. Así, pues, despreciando los decimales en los valores de las temperaturas

$$\varepsilon = \frac{273 \text{ K}}{298 \text{ K} - 273 \text{ K}} = 10,92$$

- b) El calor que absorbe esta máquina del foco frío, teniendo en cuenta que la transformación es isoterma y que el volumen se divide por 1,25, es:

$$Q_c = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = -nRT \ln 1,25 = -1 \text{ mol} \cdot 8,3123 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 273 \text{ K} \cdot \ln 1,25 = -506,37 \text{ J}$$

Este es el calor que, en cada ciclo, se extrae del agua a 25 °C para transformarla en hielo a 0 °C; por tanto, llamando m a la masa de agua congelada

$$506,37 \text{ J} = mc_e \Delta t + mc_f = m(c_e \Delta t + c_f)$$

$$\text{de donde } m = \frac{506,37 \text{ J}}{4,1868 \cdot 10^3 \text{ (J/kg °C)} \cdot 25 \text{ °C} + 335 \cdot 10^3 \text{ J kg}} = 1,15 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

- c) Para obtener 10 kg de hielo se necesitan, por tanto, $N_c = \frac{10 \text{ kg}}{1,15 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ciclo}} \simeq 8\,695$ ciclos

- d) Teniendo en cuenta que la eficiencia de una máquina frigorífica viene dada también por $\varepsilon = \frac{Q_c}{W_c}$

donde W_c es el trabajo realizado por la máquina en un ciclo, para obtener los 10 kg de hielo se necesitarán,

$$W = N_c \cdot W_c = N_c \cdot \frac{Q_c}{\varepsilon} = N_c \frac{506,37 \text{ J}}{10,92} = 8\,695 \frac{506,37 \text{ J}}{10,92} = 403\,195 \text{ J}$$

- e) Sabiendo que $W = Q_1 - Q_2$

donde Q_1 es el calor total cedido al foco caliente y Q_2 el absorbido del foco frío, podemos escribir $Q_1 = W + Q_2 = W + N_c \cdot Q_c = 403\,195 \text{ J} + 8\,695 \cdot 506,37 \text{ J} = 4\,806\,082 \text{ J}$.

Entropía y evolución

Como sabemos, en un ciclo de Carnot se cumple:

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

de donde $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$

es decir: $\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$

o bien, $\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0$

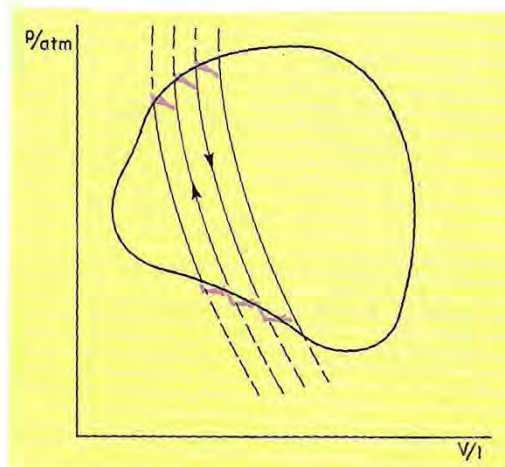


Fig. 7.15. Aproximación de un ciclo reversible mediante el ciclo de Carnot.

(Por conveniencia, hemos tomado aquí $Q_1 = Q_a$, $Q_2 = Q_c$, $T_1 = T_c$ y $T_2 = T_f$.)

Ahora bien, cualquier ciclo reversible puede aproximarse por un conjunto de ciclos de Carnot adyacentes, como indica la figura 7.15; de este modo, realizar el ciclo total equivale, por lo que al balance energético se refiere, a realizar el conjunto de ciclos de Carnot adyacentes simultáneamente.

Por tanto, si los tramos de isoterma son lo suficientemente cortos para que el error cometido sea

despreciable, puede escribirse:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad [7.29]$$

donde Q_i es la cantidad de calor absorbido o cedido por el sistema a los focos frío o caliente de cada ciclo y T_i la temperatura correspondiente. Naturalmente, cada término irá precedido del signo + ó - según se trate de un foco caliente o frío.

En el límite, es decir, considerando las longitudes de isoterma infinitesimales, la suma se transforma en una integral a lo largo del ciclo cerrado de la transformación real, lo que se expresa así:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad [7.30]$$

Para un ciclo cerrado y reversible, ésta es la expresión matemática del llamado teorema de Clausius.

Pues bien, un ciclo cerrado cualquiera, puede dividirse (Fig. 7.16) en dos partes: una (1-A-2) en la cual los intercambios de calor sean positivos, y otra (2-B-1) en la que sean negativos, de modo que para un ciclo reversible:

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{1(A)}^2 \frac{dQ}{T} + \int_{2(B)}^1 \frac{dQ}{T} = 0$$

o lo que es igual:

$$\int_{1(A)}^2 \frac{dQ}{T} = \int_{1(B)}^2 \frac{dQ}{T} \quad [7.31]$$

donde

$$\int_{1(A)}^2 \frac{dQ}{T} \quad \text{ó} \quad \int_{1(B)}^2 \frac{dQ}{T}$$

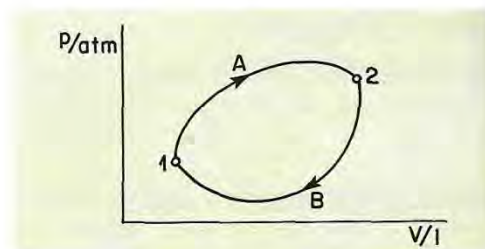


Fig. 7.16.

significa que la integral de dQ/T entre los puntos 1 y 2 se calcula a lo largo del camino A o B.

Es decir, de [7.31] se deduce que el resultado de la integral

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

no depende del camino seguido. Desde el punto de vista matemático esto equivale a decir que existe una función de estado S tal, que cumple:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

con lo cual,

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 dS = S_2 - S_1$$

A esta función se le da el nombre de **entropía**.

Si el ciclo estuviera constituido por una transformación reversible: $1 \xrightarrow{A} 2$ y otra irreversible: $2 \xrightarrow{B} 1$,

entonces, por ser el rendimiento menor que el del ciclo de Carnot, se concluiría: $\oint \frac{dQ}{T} < 0$ [7.32]

y con esto podríamos escribir $\oint \frac{dQ}{T} = \oint_{1(A)}^2 \frac{dQ_R}{T} + \int_{2(B)}^1 \frac{dQ_I}{T} = S_2 - S_1 + \int_{2(B)}^1 \frac{dQ}{T} < 0$ [7.33]

o bien

$$S_1 - S_2 > \int_{2(B)}^1 \frac{dQ_I}{T} \quad [7.34]$$

Es decir, parece que se ha producido en el sistema una cierta cantidad de calor que da lugar a un incremento de entropía adicional (ΔS_a), al cerrarse el ciclo:

$$\Delta S_a = S_1 - S_2 - \int_{2(B)}^1 \frac{dQ_I}{T} > 0 \quad [7.35]$$

Si el sistema no está aislado, este calor adicional se transfiere a los alrededores aumentando su entropía. Si el sistema es aislado, de [7.35] se deduce que nunca podrá pasar por dos estados idénticos, sino que evolucionará continuamente siempre en el sentido que conduzca al incremento de su entropía. De este modo se establece un sentido de evolución temporal.

Por tanto, si se piensa en el Universo como un sistema aislado se puede dar una dirección a su evolución, y más aún, se puede hablar de su fin, que tendría lugar cuando su entropía fuera máxima.

Pero, ¿es el Universo un sistema aislado?

Cuestiones

- 7.1. A partir de la ecuación de estado de un gas ideal, diseña dos tipos de termómetros de gas.
- 7.2. ¿Tiene sentido decir que un cuerpo tiene más calor que otro? Explica por qué.
- 7.3. Obtener la ecuación de dimensiones del calor específico.
- 7.4. Haz un análisis dimensional de la expresión

$$W = p(V_2 - V_1)$$
- 7.5. Una transformación isoterma es una transformación en la que la temperatura se mantiene constante. Construye una tabla de valores y la representación gráfica correspondiente para una transformación isoterma de un gas perfecto.
- 7.6. Repite el ejercicio anterior para dos transformaciones, una isócara ($V = \text{cte}$) y otra isóbara ($p = \text{cte}$).
- 7.7. ¿Qué relación hay entre el trabajo realizado en una transformación termodinámica de un gas que va desde el estado (p, V, T) al estado $(p, 2V, T')$, y el realizado en la transformación recíproca?
- 7.8. A partir de la cuestión anterior, ¿se te ocurre alguna forma de obtener trabajo neto de un gas obligándole a realizar transformaciones termodinámicas? Explícalo.
- 7.9. Razonar la imposibilidad del móvil perpetuo de primera especie, a partir del primer principio de la termodinámica.
- 7.10. Describe un ciclo termodinámico constituido por dos isóbaras ($p = \text{cte}$) y dos isócaras ($V = \text{cte}$) y calcula el trabajo desarrollado durante un ciclo.
- 7.11.* Un cuerpo que se mueve, se va parando por frotamiento. ¿Se vulnera el principio de conservación de la energía? Explícalo.

Universidad de Barcelona

- 7.12. Calcular la expresión del trabajo realizado por n moles de gas ideal en una transformación isoterma entre los estados p_1, T_1, V_1 y p_2, T_1, V_2 .
- 7.13. Calcular la variación de la energía interna sufrida por n moles de gas ideal en cada una de las siguientes transformaciones:
 - a) Isoterma entre los estados p_1, T_1, V_1 y p_2, T_1, V_2 .
 - b) Isóbara entre los estados p_1, T_1, V_1 y p_1, T_2, V_2 .
 - c) Isócara entre los estados p_1, T_1, V_1 y p_2, T_2, V_1 .
- 7.14. Calcular expresiones para el calor cedido o absorbido por n moles de gas ideal en una transformación isoterma entre los estados p_1, T_1, V_1 y p_2, T_1, V_2 .
- 7.15. Demostrar que el rendimiento de un ciclo de Carnot viene dado por

$$\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

donde T_f es la temperatura del foco frío y T_c la del foco caliente.

- 7.16. ¿Existe alguna relación conceptual entre los conceptos de eficiencia y rendimiento?
- 7.17. Del concepto de eficiencia de un refrigerador, ¿puede deducirse que no cumple la ley de la conservación de la energía? Razónalo.
- 7.18. ¿Es posible ^{hacer líquido} licuar un gas por compresión, manteniendo su temperatura constante?
- 7.19. ¿Es posible licuar un vapor por compresión a temperatura constante?
- 7.20. ¿Qué es un vapor?

Problemas

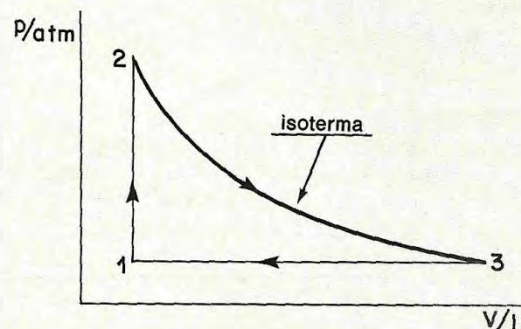
- 7.1. Un depósito contiene 10 kg de oxígeno a una presión de 20 atm y a una temperatura de 30 °C. Si se abre el recipiente durante un corto tiempo y los resultados de las medidas realizadas después de cerrar de nuevo el depósito son: presión 10 atm y temperatura 20 °C, ¿qué cantidad de oxígeno se ha dejado escapar del depósito? (Masa molar molecular del oxígeno $M(\text{O}_2) = 32 \text{ g/mol}$.)
- 7.2. Calcular en gramos la masa del nitrógeno contenido en un recipiente de 5 litros a la presión de 1 atmósfera y temperatura de 50 °C (masa molar molecular del nitrógeno: $M = 28 \text{ g/mol}$).
- 7.3. Si la densidad del aire en condiciones normales (760 mm Hg de presión y 0 °C de temperatura) vale $\rho = 0,001293 \text{ g/cm}^3$, calcular la masa molar molecular del aire supuesto un gas ideal.
- 7.4. Una bola de plomo de 10 g de masa se empotra en un bloque de madera de 5 kg a una velocidad de 200 m/s. Suponiendo que el calor engendrado por el choque es absorbido por la bola con un rendimiento del 90 por 100, calcular su elevación de temperatura. (c_e plomo = 129,8 J/kg °C.)
- 7.5. Un recipiente contiene 5 litros de agua a 0 °C. Calcular cuánto tiempo tardará en elevar su temperatura a 50 °C con una resistencia de 100 W.
(c_e agua = $4,1868 \cdot 10^3 \text{ J/kg °C}$, ρ del agua = 1000 kg/m^3 .)
- 7.6. Un mol de oxígeno a 1 atm de presión y 30 °C de temperatura se expansiona isotérmicamente de modo que su volumen se duplica. a) Calcular el volumen inicial, así como la presión, volumen y temperatura finales; b) dibujar la transformación en un diagrama p - V ; c) calcular el trabajo realizado por el sistema.
- 7.7. En un recipiente cilíndrico cerrado por un émbolo que puede deslizarse a lo largo del mismo, se tiene 1 gramo de nitrógeno en condiciones normales. Se eleva la temperatura del mismo a 100 °C dejando que el émbolo se mueva libremente para mantener la presión constante. Calcular:
- a) el volumen inicial;
 - b) el volumen final;
 - c) la cantidad de calor suministrado;
 - d) dibujar la transformación en un diagrama p - V .
- Masa molar molecular del nitrógeno $M = 28 \text{ g/mol}$.
- 7.8. En un dispositivo del problema anterior se fija el émbolo cuando se tiene el gas en condiciones normales de modo que no pueda moverse, manteniéndose así el volumen constante. Se calienta ahora hasta elevar la temperatura hasta 100 °C. Calcular:
- a) la presión final;
 - b) la cantidad de calor suministrado;
 - c) dibujar la transformación en un diagrama p - V .
- 7.9. Comparando los resultados de los dos problemas anteriores:
- a) ¿en cuál de ellos es mayor la cantidad de calor?, ¿por qué?
 - b) ¿cuánto vale la variación de energía interna en cada uno de ellos?
- 7.10. El calor molar a presión constante de un gas varía con la temperatura de acuerdo con la ecuación

$$C_p = a + bT$$

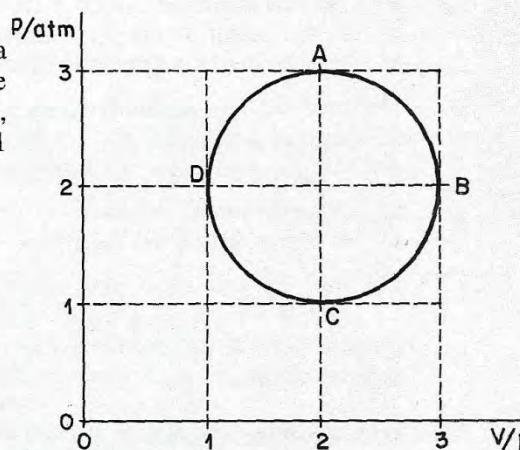
donde a y b son constantes. Calcular la cantidad de calor absorbido cuando se eleva su temperatura de 0 a 100 °C.

- 7.11. Considérese 1 gramo de nitrógeno que efectúa un ciclo cerrado como el indicado en la figura, cuyas características son: $p_1 = 1 \text{ atm}$, $t_1 = 0^\circ\text{C}$; $t_2 = 100^\circ\text{C}$, $p_3 = 1 \text{ atm}$, $t_3 = 100^\circ\text{C}$. Calcular:

- la variación de energía interna, así como el calor y el trabajo intercambiado con los alrededores en cada una de las transformaciones termodinámicas;
- el rendimiento del ciclo.

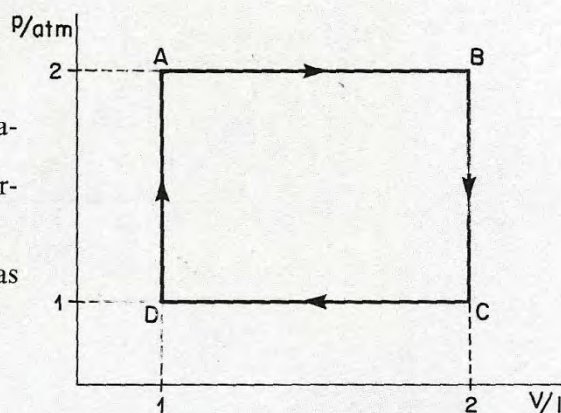


- 7.12. Calcular el trabajo producido por una máquina térmica que experimentase un ciclo consistente en un círculo que pase por los puntos $p_A = 3 \text{ atm}$, $V_A = 2 \text{ litros}$; $p_B = 2 \text{ atm}$, $V_B = 3 \text{ litros}$; $p_C = 1 \text{ atm}$, $V_C = 2 \text{ litros}$; $p_D = 2 \text{ atm}$, $V_D = 1 \text{ litro}$.



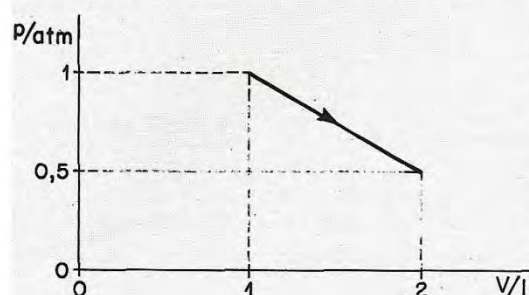
- 7.13. Una máquina térmica realiza un ciclo cuadrado de vértices, $p_A = 2 \text{ atm}$, $V_A = 1 \text{ litro}$; $p_B = 2 \text{ atm}$, $V_B = 2 \text{ litros}$; $p_C = 1 \text{ atm}$, $V_C = 2 \text{ litros}$; $p_D = 1 \text{ atm}$, $V_D = 1 \text{ litro}$. Calcular:

- la temperatura en cada punto;
- el calor absorbido o cedido en cada transformación;
- el trabajo realizado o recibido en cada transformación;
- el trabajo total realizado por la máquina;
- la variación de energía interna en cada una de las transformaciones;
- el rendimiento del ciclo.



El sistema que realiza la transformación es un mol de gas ideal biatómico, es decir, $C_p = 29,09 \text{ J/mol K}$, $C_v = 20,68 \text{ J/mol K}$.

- 7.14. Una cierta masa de hidrógeno ocupa un volumen de 1 litro a una presión de 1 atm y a 0°C de temperatura. Calcular:



- la masa del hidrógeno;
- el número de moles;
- trabajo realizado por el sistema sobre sus alrededores si se duplica su volumen mediante una transformación reversible como la de la figura;
- la variación de energía interna del sistema.

Masa molar molecular del hidrógeno, $M = 2 \text{ g/mol}$.

- 7.15. Se tiene un litro de hidrógeno en condiciones normales, si se duplica su volumen mediante una transformación isóbara, calcular:

- las cantidades de calor y trabajo intercambiadas con los alrededores;
- la variación de energía interna del sistema;
- repetir los tres apartados anteriores para una transformación isoterma.

- 7.16. Un mol de gas ideal diatómico realiza un ciclo de Carnot entre un foco caliente cuya temperatura es de 500 K y un foco frío cuya temperatura se desconoce. Si el trabajo realizado durante la expansión adiabática es de 450 J . Calcular:

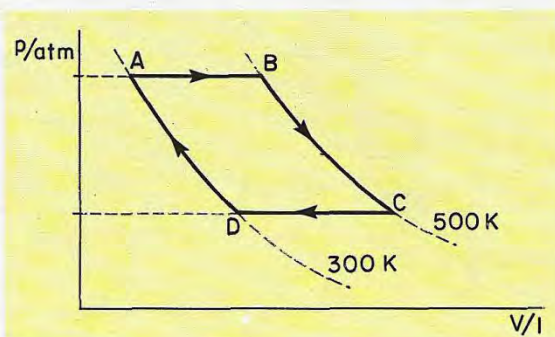
- el rendimiento del ciclo;
- la temperatura del foco frío.

- 7.17. Un mol de gas ideal diatómico describe un ciclo de Carnot en el que $V_1 = 10 \text{ litros}$, $T_1 = 230^\circ\text{C}$, $p_2 = 4 \text{ atm}$; $t_2 = 230^\circ\text{C}$; $T_3 = 381,2 \text{ K}$, $V_3 = 20 \text{ litros}$; $V_4 = 19,97 \text{ l}$. Calcular el rendimiento del ciclo. ¿Cuál es la potencia de la máquina en kW y C.V. si el sistema describe un ciclo cada 20 segundos?

- 7.18. Una máquina frigorífica produce 10 kg de hielo por minuto. Si realiza un ciclo de Carnot reversible invertido entre las temperaturas de 0 y 25°C . Calcular, sabiendo que el calor de fusión del hielo es de $335 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$:

- factor de eficiencia de la máquina;
- potencia que consume la máquina por cada kg de hielo.

- 7.19. Considérese un mol de gas ideal monoatómico que efectúa un ciclo cerrado como el de la figura constituido por dos isóbaras y dos isotermas. Calcular:



- la variación de energía interna, calor y trabajo en cada una de las transformaciones;
- el rendimiento del ciclo.

- 7.20. Se calientan 2 moles de un gas ideal monoatómico a presión constante desde 20 hasta 100°C . Calcular:

- el trabajo y el calor intercambiado con los alrededores;
- la variación de energía interna.

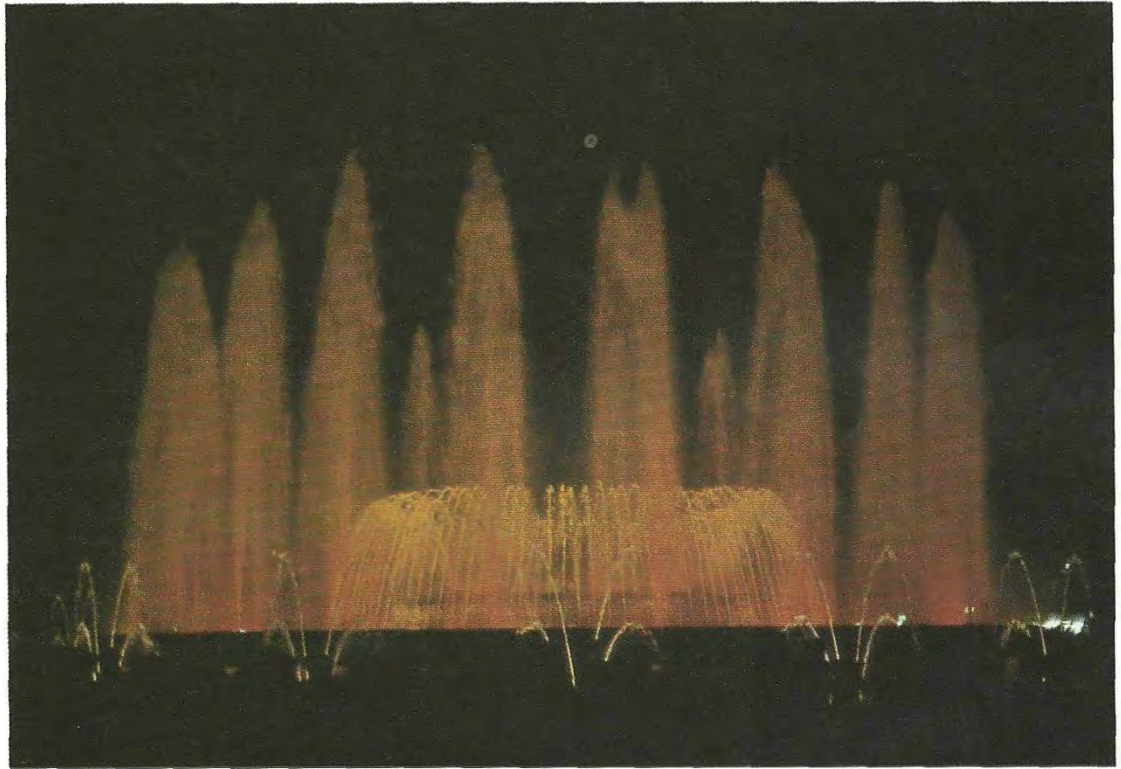
Respuesta a los problemas

- 7.1. $m = 4,83 \text{ kg}$.
- 7.2. $m = 5,28 \text{ g}$.
- 7.3. $M = 28,95 \text{ g/mol}$.
- 7.4. $T = 138,7^\circ\text{C}$.
- 7.5. $t = 2,90 \text{ h}$.
- 7.6. a) $V = 24,8 \text{ l}$; $P' = 0,5 \text{ atm}$; b) $V' = 49,7 \text{ l}$; $T' = 303 \text{ K}$.
c) $W = 1\,741,22 \text{ J}$.
- 7.7. a) $V_1 = 0,799 \text{ l}$; b) $V_2 = 1,091 \text{ l}$; c) $Q = 103,89 \text{ J}$.
- 7.8. a) $P_2 = 1,37 \text{ atm}$; b) $Q = 74,21 \text{ J}$.
- 7.9. a) En la isóbara; b) $\Delta U = 74,213 \text{ J}$.
- 7.10. $Q = 100a + 32\,300b$.
- 7.11. a) Transformación 1-2: $Q = 74,21 \text{ J}$; $\Delta U = 74,21 \text{ J}$; $W = 0$
Transformación 2-3: $Q = 34,86 \text{ J}$; $\Delta U = 0$; $W = 34,86 \text{ J}$
Transformación 3-1: $Q = -103,89 \text{ J}$; $\Delta U = -74,21 \text{ J}$; $W = -29,68 \text{ J}$
b) $\eta = 0,047$.
- 7.12. $W = 318,22 \text{ J}$.
- 7.13. a) $T_A = 24,39 \text{ K}$; $T_B = 48,78 \text{ K}$; $T_C = 24,39 \text{ K}$; $T_D = 12,19 \text{ K}$.
b) $Q_{AB} = 709,5 \text{ J}$; $Q_{BC} = -506,82 \text{ J}$; $Q_{CD} = -354,90 \text{ J}$; $Q_{DA} = 253,5 \text{ J}$.
c) $W_{AB} = 202,58 \text{ J}$; $W_{BC} = 0 \text{ J}$; $W_{CD} = -101,29 \text{ J}$; $W_{DA} = 0 \text{ J}$.
d) $W_t = 101,29 \text{ J}$.
e) $\Delta U_{AB} = 506,92 \text{ J}$; $\Delta U_{BC} = -506,92 \text{ J}$; $\Delta U_{CD} = -253,61 \text{ J}$; $\Delta U_{DA} = 253,61 \text{ J}$.
f) 10,5 por 100.
- 7.14. a) $m = 0,089 \text{ g}$; b) $n = 0,044 \text{ moles}$; c) $W = 75,96 \text{ J}$; d) $\Delta U = 3,80 \text{ J}$.
- 7.15. a) $Q = 357,37 \text{ J}$; $W = 101,29 \text{ J}$.
b) $\Delta U = 255,28 \text{ J}$.
c) $Q = 70,78 \text{ J}$; $W = 70,78 \text{ J}$; $\Delta U = 0$.
- 7.16. a) $\eta = 0,04$; b) $T_f = 480 \text{ K}$.
- 7.17. $\eta = 0,24$; Potencia = $5,94 \cdot 10^{-3} \text{ kW} = 0,008 \text{ C.V.}$
- 7.18. a) $\varepsilon = 10,92$; Potencia = $511,29 \text{ W}$.
- 7.19. a) Transf. A-B: $\Delta U = 2\,494 \text{ J}$; $Q = 4\,156 \text{ J}$; $W = 1\,662,46 \text{ J}$.
Transf. B-C: $\Delta U = 0 \text{ J}$; $Q = 2\,880,82 \text{ J}$; $W = 2\,880,82 \text{ J}$.
Transf. C-D: $\Delta U = -2\,494 \text{ J}$; $Q = -4\,156 \text{ J}$; $W = -1\,662,44 \text{ J}$.
Transf. D-A: $\Delta U = 0 \text{ J}$; $Q = -1\,728,49 \text{ J}$; $W = -1\,728,49 \text{ J}$.
b) $\eta = 0,17$.
- 7.20. a) $W = 1\,329,96 \text{ J}$; $Q = 3\,324,8 \text{ J}$; b) $\Delta U = 1\,995,2 \text{ J}$.

TEMA VIII

ÓPTICA

Óptica geométrica



1. Objeto de la óptica

La óptica estudia los fenómenos luminosos y da una explicación científica de los mismos.

Comprende dos partes:

- **La óptica física**, que estudia la naturaleza de la luz y de los fenómenos luminosos.
- **La óptica geométrica**, que estudia la propagación de la luz y sus leyes.

2. Los fenómenos luminosos. Los cuerpos y la luz

Podemos decir que la luz es la causa que permite la visión de los objetos.

Unos cuerpos son fuentes directas de luz, los **luminosos**; mientras que otros reciben la luz, los **iluminados**.

Luz fría

La producción de luz a baja temperatura por algunos insectos y sus larvas se lleva a cabo por la oxidación de una sustancia, la *luciferina*, mediante la acción catalizadora de una enzima llamado *luciferasa*.

En las profundidades marinas reina la oscuridad casi absoluta y, sin embargo, el agua es considerada como sustancia transparente.

El oro, sustancia opaca, deja pasar la luz verde cuando se lamina en espesores del orden de una diezmilésima de milímetro.



Cuerpos luminosos

La mayoría de los cuerpos luminosos son incandescentes y emiten luz cuando alcanzan *temperaturas elevadas*. El Sol, las estrellas en general, las lámparas de incandescencia, etc., pertenecen a este grupo de fuentes de luz.

Sin embargo, hay cuerpos como los fosforescentes y fluorescentes que emiten luz a temperaturas más bien bajas: *luz fría*.

- Las *luciérnagas* y ciertos peces de las profundidades marinas emiten luz de este tipo.
- Las *pinturas luminiscentes*, tan empleadas como señales de tráfico, emiten luz propia, después de recibir la luz de los faros del automóvil.
- En especial, son fuentes de luz fría los *tubos fluorescentes*. En su interior se genera, mediante una descarga eléctrica, una radiación invisible de la misma naturaleza que la luz visible, pero más energética (radiación ultravioleta), que incide sobre una pintura que recubre las paredes del tubo, «arrancando» del mismo luz blanca.

Cuerpos iluminados

Según su comportamiento frente a la propagación de la luz, los cuerpos pueden ser:

Transparentes, si dejan pasar la luz y se pueden ver con nitidez los objetos a su través.

Translúcidos, si dejan pasar algo de luz y no permiten la visión clara de los objetos. Son translúcidos el papel vegetal y el vidrio esmerilado o deslustrado.

Opacos, son los objetos que no dejan pasar la luz ni permiten que pueda verse a través de ellos.

Ha de observarse que la distinción entre cuerpos transparentes, translúcidos y opacos depende en buena parte del espesor del cuerpo.

Todos los cuerpos, incluso los transparentes, absorben parte de la luz que reciben y reflejan otra parte.

3. Propagación rectilínea de la luz

En el vacío, en el aire y en todos los medios *transparentes* homogéneos, *la luz se propaga en línea recta*.

Muchos fenómenos observables y diversas experiencias ponen de manifiesto la propagación rectilínea de la luz. Los reflectores señalan la propagación rectilínea de la luz. Estamos acostumbrados a observar los estrechos haces de *rayos láser* y su trayectoria rectilínea en efectos luminosos de las salas de fiestas.

En óptica geométrica podemos definir el *rayo luminoso* como la *línea recta de propagación de la luz entre dos puntos*. Para el trazado de imágenes utilizaremos estos *rayos luminosos*, es decir, las líneas que los representan, pero para las comprobaciones experimentales de las leyes que rigen la *propagación*, la *reflexión* y la *refracción* de la luz emplearemos los *haces de luz*. Un haz de luz es un conjunto de rayos luminosos que solamente se hacen visibles si son interceptados por partículas en suspensión o si iluminan un cuerpo translúcido u opaco.

Los haces luminosos pueden ser *convergentes* si se dirigen a un punto; *divergentes* si la luz sale de un punto y forma un cono; *paralelos* si los rayos que forman el haz lo son.

En las experiencias de óptica frecuentemente se utilizan haces *paralelos* en forma de *banda* perpendicular a la mesa de trabajo. La parte inferior del haz es la que ilumina el disco y hace visible la trayectoria del haz luminoso.

Para obtener haces de luz y poder realizar experiencias de óptica se emplea un dispositivo como el del grabado (Fig. 9.2).

Consta de un reflector de forma cilíndrica en cuya salida se adaptan unos diafragmas que dejan salir haces de luz adecuados a la experiencia (diafragma de punto, de una o varias rendijas, etc.). Una lente colocada a la salida puede mejorar la calidad del haz luminoso. A veces se utilizan filtros para obtener haces de colores.

Sombras y penumbras. Eclipses

Las *sombras* y las *penumbras* se producen como consecuencia de la propagación rectilínea de la luz.

Cuando un *foco puntual* ilumina un cuerpo opaco, el cono que tiene por vértice el foco luminoso *F* y es tangente al cuerpo opaco *C* —una esfera en la figura 9.3— se llama *cono de sombra*. La parte de la pantalla *S* comprendida en el cono de sombra no recibe luz de *F*: es la región de la *sombra*. El límite de la sombra *S* es la intersección de la pantalla *P* con el cono de vértice *F* tangente a la esfera *C*.

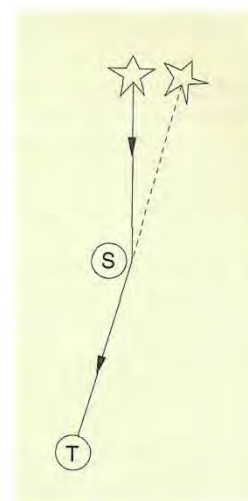
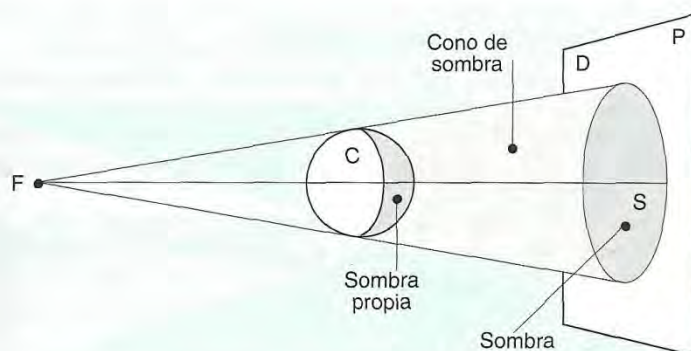


Fig. 9.1.

La luz se curva

Según la teoría de la relatividad de **A. Einstein**, la luz que, procedente de una estrella, viaja hasta nuestro planeta pasando cerca del Sol, sufriría una desviación como si fuera atraída por él. Un observador situado en la Tierra que captase la luz procedente de la estrella vería ésta en un «punto» distinto de donde está realmente (Fig. 9.1).

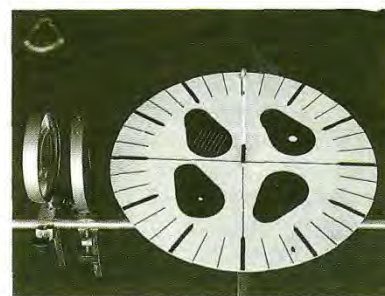
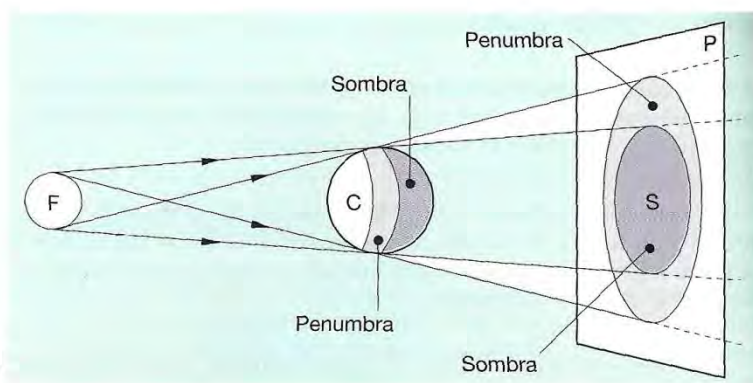


Fig. 9.2.

Fig. 9.3. Cuando el foco luminoso es de dimensión pequeña, la sombra tiene contornos nítidos.

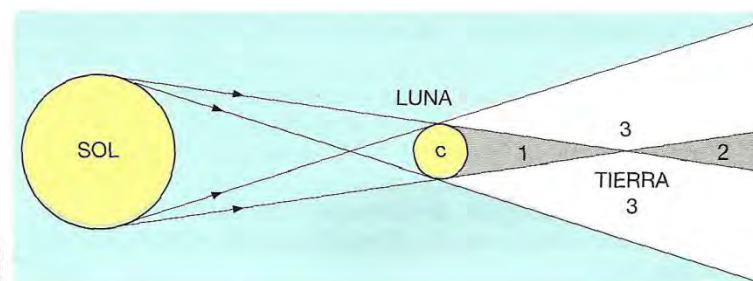
Cuando el *foco* luminoso no es puntual, sino *extenso*, la sombra no tiene contornos nítidos, se pasa gradualmente de la sombra a la plena luz: es la *zona de la penumbra*. Para limitar esta zona se trazan las tangentes exteriores e interiores al foco luminoso.

Fig. 9.4. Cuando el foco es extenso, la sombra está rodeada por una zona de sombra menos intensa; es la penumbra.



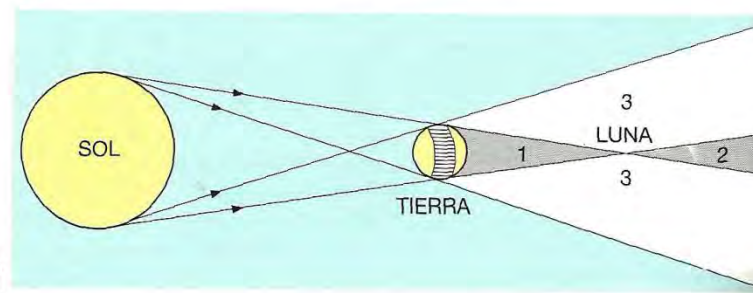
Los eclipses de Sol y de Luna se explican de la misma manera. La Tierra y la Luna, iluminadas por el Sol, producen detrás de ellos un cono de sombra y otro de penumbra que se mueven con ellos alrededor del Sol. Como el cuerpo luminoso, el Sol, es mucho mayor que el iluminado (Luna o Tierra), el cono de sombra es convergente. El eclipse de Sol se produce cuando la Tierra se encuentra en los conos proyectados por la Luna; cuando se encuentra en la *zona 1*, el eclipse de Sol es total; en las *zonas 2 y 3*, el eclipse es parcial; en la *zona 2* el eclipse se llama circular o anular.

Fig. 9.5. Se produce eclipse de Sol cuando la Tierra pasa por las zonas rayadas.



Cuando la Luna pasa por el cono de sombra proyectada por la Tierra, hay *eclipse total o parcial* de la Luna, según que esté total o parcialmente en el cono de sombra.

Fig. 9.6. Eclipse de Luna.



4. La velocidad de la luz

Desde el siglo XVII en que el astrónomo Roemer obtuvo para la velocidad de la luz un valor de 200 000 km/s, hasta hoy día, se ha medido infinidad de veces la velocidad de la luz.

La *Unión Internacional de Física Pura y Aplicada*, teniendo en cuenta las últimas mediciones, ha aceptado como una *constante* (c) la *velocidad de la luz en el vacío* cuyo valor es:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} = 299\,792,458 \text{ km/s}$$

En los cálculos que no necesitan gran precisión, suele tomarse el valor de 300 000 km/s.

En otros medios transparentes, la velocidad de la luz es inferior.

Existe un procedimiento sencillo para calcular la velocidad de la luz en un medio conociendo la del vacío. En efecto, cada sustancia transparente se caracteriza por una constante llamada **índice de refracción** (n) y viene dado por la relación entre la velocidad de la luz en el vacío (c) y en el medio considerado (v):

$$n = \frac{c}{v} \quad [9.1]$$

Ejemplo 1

¿Cuál es la velocidad de la luz en el agua si su índice de refracción es 4/3?

Si v es la velocidad de la luz en el agua, de la [9.1] se obtiene:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{300\,000 \text{ km/s}}{4/3} = 225\,000 \text{ km/s}$$

5. Reflexión de la luz

*La **reflexión** es el rechazo y cambio de dirección experimentado por un haz luminoso cuando choca con la superficie de un cuerpo. La luz vuelve al medio transparente de donde viene.*

Los efectos de la reflexión dependen del grado de pulimentación de la superficie reflectora.

- La mayor parte de los cuerpos sobre los que incide la luz no tienen superficie pulimentada y el haz luminoso se difunde en varias direcciones. Es lo que ocurre cuando un haz de luz entra en una habitación oscura y llega a una pared blanca: la luz se difunde por toda la habitación iluminándola. Esta es una *reflexión difusa*.

- Si la superficie está pulimentada, como en el caso de los espejos, la *reflexión es especular* (de speculum —espejo—, en latín). En este caso el haz luminoso, disminuido en intensidad, se refleja en una dirección.

La superficie reflectora en ambos casos absorbe parte de la luz.

El viaje más rápido

A. Einstein demostró a partir de su teoría de la relatividad que ningún objeto puede llegar a alcanzar la velocidad de la luz en el vacío.

El siguiente texto es de Stephen W. Hawking, y está tomado de su obra la *HISTORIA DEL TIEMPO. Del big bang a los agujeros negros*:

«El postulado fundamental de la teoría de la relatividad, nombre de esta nueva teoría, era que las leyes de la ciencia deberían ser las mismas para todos los observadores en movimiento libre, independientemente de cual fuera su velocidad. Esto ya era cierto para las leyes de Newton, pero ahora se extendía la idea para incluir también la teoría de Maxwell y la velocidad de la luz: todos los observadores deberían medir la misma velocidad de la luz sin importar la rapidez con la que se estuvieran moviendo. Esta idea tan simple tiene algunas consecuencias extraordinarias. Quizá las más conocidas sean la equivalencia entre masa y energía, resumida en la famosa ecuación de Einstein $E=mc^2$ (en donde E es la energía, m , la masa y c la velocidad de la luz), y la ley de que ningún objeto puede viajar a una velocidad mayor que la de la luz. Debido a la equivalencia entre energía y masa, la energía que un objeto adquiere debido a su movimiento se añadirá a su masa, incrementándola. En otras palabras, cuanto mayor sea la velocidad de un objeto más difícil será aumentar su velocidad. Este efecto sólo es realmente significativo para objetos que se muevan a velocidades cercanas a la de la luz. Por ejemplo, a una velocidad de un 10 por 100 de la luz, la masa de un objeto es sólo un 0,5 por 100 mayor de la normal, mientras que a un 90 por 100 de la velocidad de la luz la masa sería de más del doble de la normal. Cuando la velocidad de un objeto se aproxima a la

velocidad de la luz, su masa aumenta cada vez más rápidamente, de forma que cuesta cada vez más y más energía acelerar el objeto un poco más. De hecho, no puede alcanzar nunca la velocidad de la luz, porque entonces su masa habría llegado a ser infinita, y por la equivalencia entre masa y energía, habría costado una cantidad infinita de energía el poner al objeto en ese estado. Por esta razón, cualquier objeto normal está confinado por la relatividad a moverse siempre a velocidades menores que la de la luz. Sólo la luz, u otras ondas que no posean masa intrínseca, puede moverse a la velocidad de la luz.»

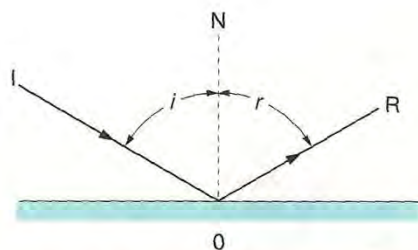


Fig. 9.7. Reflexión de la luz.

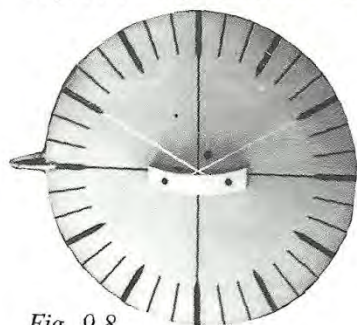


Fig. 9.8.

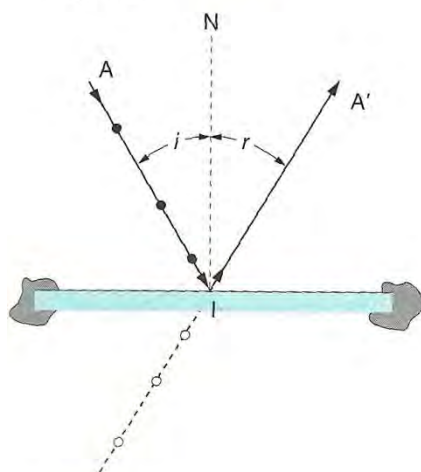


Fig. 9.9.

Leyes de la reflexión

En la reflexión de la luz, lo mismo que en la de ondas materiales, se cumplen las siguientes leyes de reflexión:

- 1.^a El rayo incidente, el reflejado y la normal están en el mismo plano.

El rayo incidente (IO) va del foco al espejo. El rayo reflejado (OR) sale del espejo y se propaga en el mismo medio que el incidente.

La normal o perpendicular al espejo en el punto de incidencia es ON.

- 2.^a El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

El ángulo de incidencia (i) es el formado por el rayo incidente (IO) y la normal (ON). El ángulo de reflexión (r) es el formado por la normal (ON) y el rayo reflejado (OR).

Experiencias

1. La fotografía adjunta se ha obtenido con el equipo de óptica indicado anteriormente.

- Un foco proyector con diafragma vertical de rendija proporciona un haz en forma de banda.

- Sobre un disco graduado se fija un espejo y a éste se envía un haz luminoso que ilumina también el disco para poder apreciar la trayectoria del mismo.

- En la fotografía se comprueba que tanto el ángulo de incidencia como el de reflexión miden 60° . El disco colocado horizontalmente puede girar y modificar el ángulo de incidencia.

Comprobaremos cómo el ángulo de reflexión en todos los casos es igual al de incidencia.

El plano en el que están el rayo incidente, el reflejado y la normal es el plano del disco graduado.

2. Toma un espejo pequeño de forma rectangular y fíjalo perpendicularmente sobre un cartón o plancha de madera, donde trazarás dos líneas perpendiculares: una hace de normal y la otra se utiliza para fijar el espejo mediante dos trozos de plastilina.

- Sobre una línea AI, clava varios alfileres.

- Observa las imágenes reflejadas de los alfileres desde A' y en su dirección traza con una regla la recta A'I.

- Comprueba con un transportador que los ángulos NIA y NIA' son iguales. Se verifica también que los rayos AI, IA' y la normal NI están en el mismo plano: el de la experiencia.

6. Espejos

Un **espejo** es la *superficie pulimentada de un cuerpo opaco*. Esta última condición no es imprescindible, ya que también las superficies pulimentadas o lisas de cuerpos transparentes reflejan parcialmente la luz y en ciertas condiciones, como veremos más adelante, la reflexión es total.

La superficie pulimentada de los espejos es corrientemente metálica.

Los que se encuentran corrientemente en el mercado se fabrican depositando, por procedimiento químico, sobre una lámina de vidrio muy limpia y pulimentada, una fina capa de plata. El vidrio tiene la misión de hacer de soporte y de protector de la capa metálica reflectora. La cara posterior va cubierta con una capa de barniz.

7. Espejos planos

Las **imágenes de objetos** situados delante de un espejo plano son del **mismo tamaño**, **simétricas** y **virtuales** respecto del objeto.

Se dice que las **imágenes** son **virtuales** y no reales, porque nuestro ojo las recibe como si estuviesen formadas al otro lado del espejo no por los rayos directos (el espejo es opaco), sino por las **prolongaciones** de los mismos. Las imágenes virtuales, por lo mismo, no pueden recogerse en pantallas.

Para el trazado de la imagen virtual, se prolongan los rayos reflejados detrás del espejo. Para cada punto se aplican las **leyes de la reflexión a dos rayos** distintos que salen del mismo: uno, **perpendicular** al espejo, que se refleja en la misma dirección; otro, un **rayo cualquiera**, que se refleja de acuerdo con la segunda ley.

En los gráficos se han dibujado sucesivamente la imagen de un punto (*A*) de una flecha (*AB*), y de un triángulo (*ABC*). Observa cómo en los tres casos la imagen es simétrica del objeto, siendo el propio espejo el plano de simetría (Fig. 9.10).

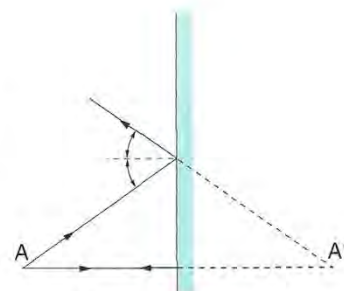


Fig. 9.10a. Imagen de un punto en un espejo plano.

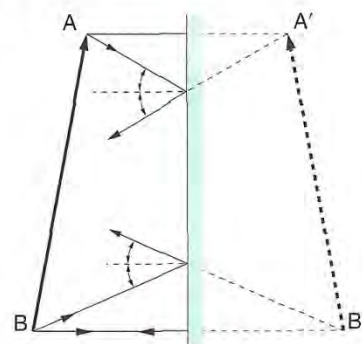


Fig. 9.10b. Imagen de un segmento en un espejo plano.

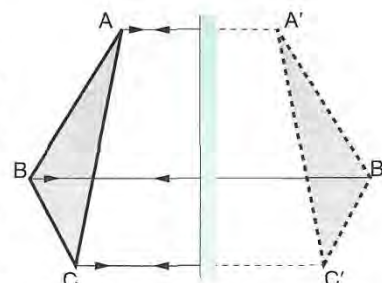


Fig. 9.10c. Imagen de un triángulo en un espejo plano.

Aplicaciones de los espejos planos

a) Espejos que forman ángulo

Un par de espejos planos que forman un ángulo diedro producen varias imágenes de un objeto *P* situado dentro de su abertura. Así, si los espejos *E* y *E'* forman un ángulo de 60° el número de imágenes observables es cinco (Fig. 9.11).

En general, si α es el ángulo que forman los espejos, siendo α el divisor de 360° , el número de imágenes (*n*) viene dado por:

$$n = \frac{360}{\alpha} - 1 \quad [9.2]$$

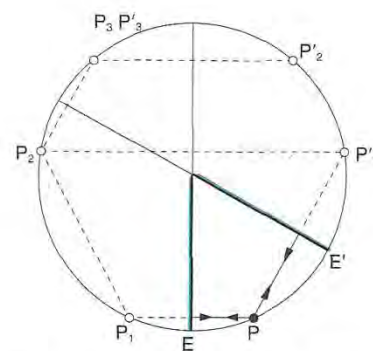


Fig. 9.11. Imágenes en espejos angulares.

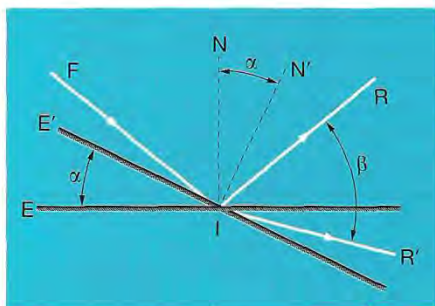


Fig. 9.12. Giro de un espejo.

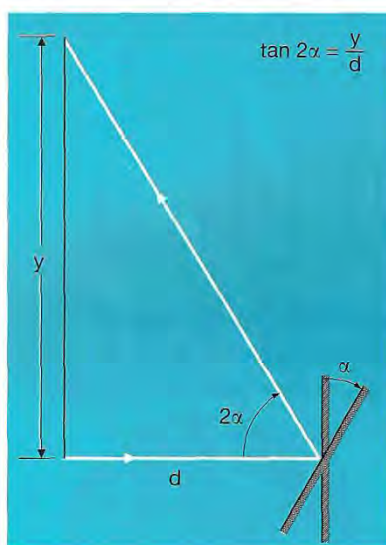


Fig. 9.13.

b) Rotación del espejo plano

Si un espejo plano gira un ángulo α , el rayo reflejado respecto del incidente verifica una rotación $\beta = 2\alpha$.

En efecto, apliquemos las leyes de la reflexión al espejo antes de la rotación (E) y después de la misma (E'):

Antes: $\widehat{FIN} = \widehat{NIR}$.

Después: $\widehat{FIN'} = \widehat{N'IR'}$.

Pero: $\widehat{FIR} = 2\widehat{FIN}$ y $\widehat{FIR'} = 2\widehat{FIN'}$.

Por tanto: $\beta = \widehat{FIR'} - \widehat{FIR} = 2(\widehat{FIN'} - \widehat{FIN}) = 2\alpha$.

Esta propiedad del espejo giratorio se utiliza frecuentemente para medir el ángulo de rotación de los cuerpos. Para ello se sitúa en el eje de rotación un espejo al que se le envía un haz luminoso que es reflejado; la señal luminosa se recoge sobre una regla graduada, tal como se indica en el grabado (Fig. 9.13).

Este recurso es muy apropiado cuando los ángulos de giro son muy pequeños (ensayo de torsión). Téngase presente que el error cometido, siempre que d sea suficientemente grande, es muy pequeño.

8. Espejos esféricos

La superficie pulimentada es esférica. Son *cóncavos* si la superficie pulimentada es la interior y *convexos* si es la exterior.

En el estudio que sigue nos limitaremos a los espejos de *apertura pequeña*.

En todo espejo esférico se distinguen los siguientes elementos (Fig. 9.14):

- *Centro de curvatura, C*, es el centro de la esfera a la que pertenece el espejo. Un rayo que pasa por él llega al espejo (incide perpendicularmente) y retrocede por el mismo camino.

- *Centro de figura, O*, es el centro o polo del espejo.

- *Eje principal* es la recta que pasa por el centro de figura y el de curvatura, la recta PO .

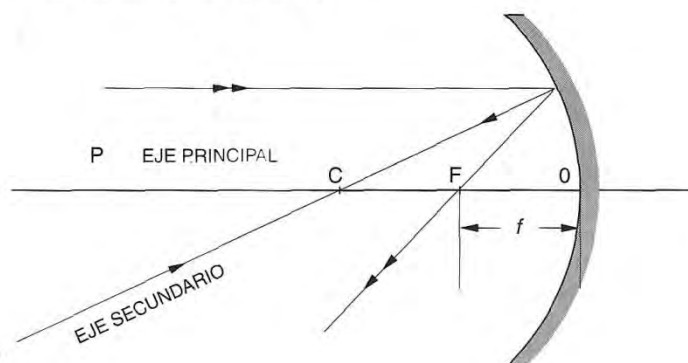


Fig. 9.14.

- *Eje secundario* es toda recta que pasa por el centro de curvatura.

- La *normal* a los espejos cóncavos es el radio.

- *Foco principal* es el punto del eje principal donde convergen todos los rayos paralelos al eje principal en los espejos cóncavos.

En los espejos convexos los rayos divergen y sus prolongaciones van a parar a un *foco virtual* (Fig. 9.15).

Distancia focal, f , es la distancia del foco al polo del espejo. Es igual a la mitad del radio:

$$f = \frac{r}{2} \quad [9.3]$$

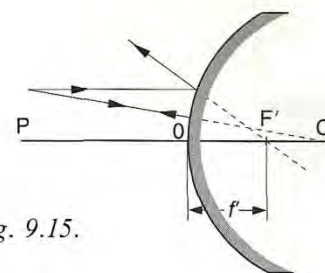


Fig. 9.15.

Imágenes dadas por los espejos esféricos

Para facilitar la construcción de imágenes el objeto será una flecha vertical con la punta (A) hacia arriba, y el otro extremo (B) en el eje principal. La imagen del punto B estará siempre en el eje principal. Para el *trazado de imágenes* se utilizarán *dos rayos*:

1. Un rayo *paralelo al eje principal* que se refleja pasando por el foco principal real en los espejos cóncavos. En los espejos convexos el rayo se refleja de tal forma que sus prolongaciones van al foco virtual.

2. Un rayo que pasa por el *centro de curvatura* y se refleja en la misma dirección pero con sentido contrario (Fig. 9.14) y (Fig. 9.15).

a) En los *espejos convexos* la imagen de un objeto situado a cualquier distancia del espejo es *menor*, *virtual* y *directa*, según se aprecia en la figura 9.16.

Se dice que es virtual porque la imagen no puede recogerse en una pantalla (¡que habría que colocar detrás del espejo!)

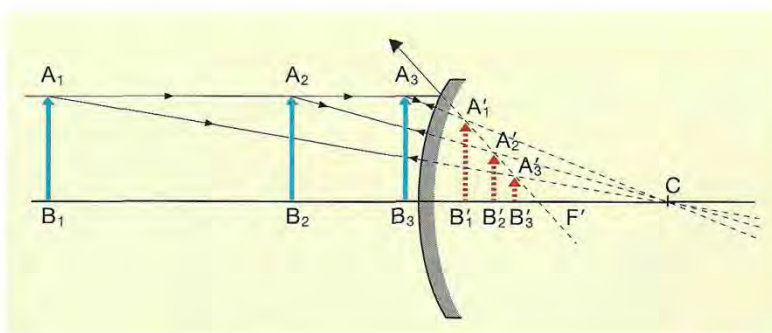


Fig. 9.16.

La imagen es vista por un observador situado al lado del objeto en la dirección de las prolongaciones de los rayos. De la misma forma que en los espejos planos, que también producen imágenes virtuales.

b) En los espejos cóncavos hemos de tener en cuenta la distancia del objeto al espejo.

- Objeto situado entre el infinito y el centro de curvatura. La imagen es real, menor e invertida (Fig. 9.17).

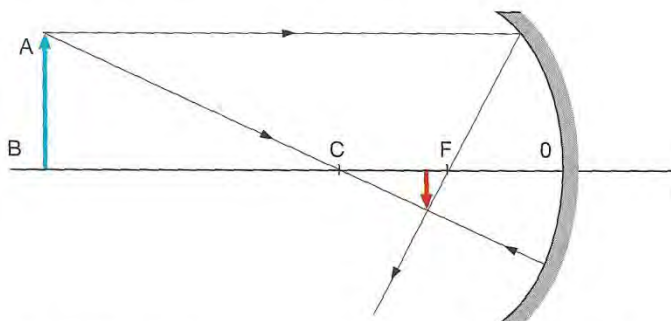


Fig. 9.17. La imagen es real, menor e invertida. Su situación entre el foco y el centro de curvatura.

- Objeto situado en C. La imagen es real, del mismo tamaño que el objeto e invertida.

- Objeto situado entre C y F. La imagen es real, mayor que el objeto e invertida.

- Objeto situado entre F y O. La imagen es virtual, directa y mayor que el objeto (Fig. 9.18).

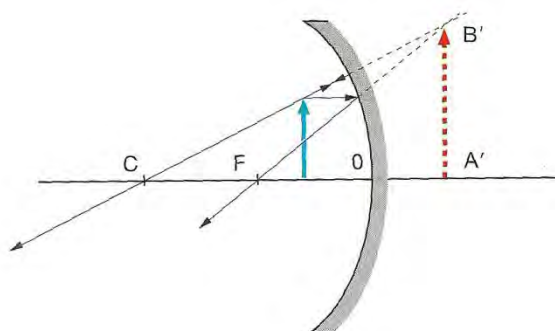


Fig. 9.18. La imagen es virtual, mayor y directa.

Fórmulas de los espejos

- Entre la distancia del objeto al espejo (p), de la imagen al espejo (p') y la distancia focal (f) se da la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \quad [9.4]$$

- Si y es el tamaño del objeto e y' el de la imagen, se demuestra que la relación de tamaño β viene dada por:

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{p'}{p} \quad [9.5]$$

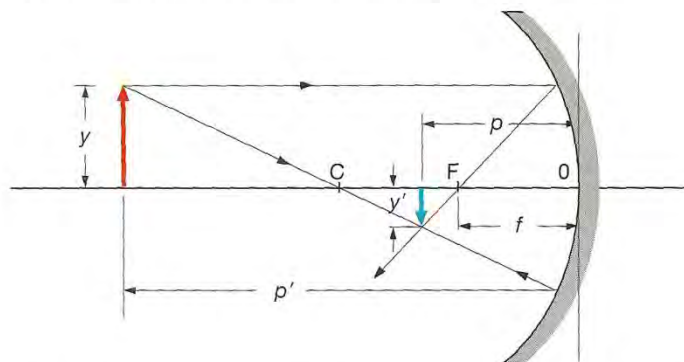


Fig. 9.19. Cómo se miden las distancias en los espejos cóncavos. De forma análoga en los convexas.

Ejemplo 2

A 50 cm del polo de un espejo cóncavo, cuya distancia focal mide 10 cm, se halla un objeto de 10 mm de alto. Determinar: a) la situación; b) el tamaño; c) la posición; d) su naturaleza.

a) Según la [9.4] se obtiene:

$$p' = \frac{fp}{p - f} = \frac{-10 \text{ cm} (-50 \text{ cm})}{(-50 + 10) \text{ cm}} = -12,5 \text{ cm}$$

b) De la [9.5], despejando y sustituyendo:

$$y' = -\frac{p'y}{p} = -\frac{-12,5 \text{ cm} \cdot 10 \text{ mm}}{-50 \text{ cm}} = -2,5 \text{ mm}$$

c) La imagen es *invertida* ya que su tamaño es negativo.

d) Es *real* porque está situada al mismo lado del objeto. Puede recogerse en una pantalla situada a 12,5 cm del espejo. Su representación es parecida a la obtenida en la figura 9.17.

Ejemplo 3

Un objeto situado a 20 cm de un espejo convexo forma una imagen a 10 cm, detrás del espejo. Calcula la distancia focal del mismo.

De la ecuación [9.4], despejando, sustituyendo y respetando el convenio de signos, se obtiene:

$$f = \frac{p'p}{p' + p} = \frac{10 \text{ cm} (-20 \text{ cm})}{10 \text{ cm} - 20 \text{ cm}} = 20 \text{ cm}$$

La distancia focal es positiva porque cae a la derecha de *O*.

Convenio de signos

- La luz se conviene que entra de izquierda a derecha (→) según se observa en los grabados.

- Se toma como sistema de referencia el punto *O*, polo del espejo: el eje de abscisas es el eje principal, y el de ordenadas, la perpendicular que pasa por *O*.

- Las distancias serán positivas o negativas según lo sean la abscisa u ordenada correspondiente.

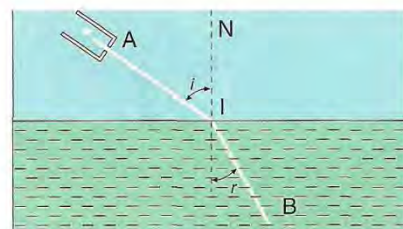


Fig. 9.20. Refracción al pasar un haz luminoso del aire al agua. Se acerca a la normal: $r < i$.

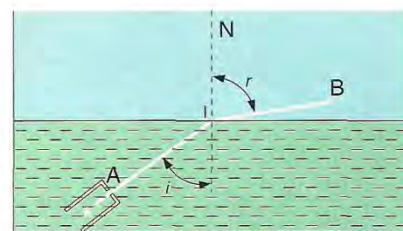


Fig. 9.21. Refracción al pasar un haz luminoso del agua al aire. Se aleja de la normal: $r > i$.

9. Refracción de la luz

La refracción de la luz es el cambio de dirección experimentado por un rayo luminoso al atravesar oblicuamente una superficie que limita dos medios transparentes. Si el rayo atraviesa esa superficie perpendicularmente, no experimenta cambio en su dirección.

Multitud de fenómenos y experiencias tienen explicación en la refracción de la luz.

Cuando observamos un objeto introducido parcialmente en agua, parece como si estuviese quebrado en el punto de contacto con el agua.

Una moneda en el interior de un plato con agua, parece estar más cerca de la superficie de lo que en realidad está.

Ejemplo 4

Un rayo luminoso pasa del aire a un líquido formado con la normal un ángulo de 60° ; si el ángulo de refracción es de 45° , calcular el índice de refracción del líquido, respecto del aire.

Aplicando la [9.6]:

$$n_{21} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$$
$$n_{21} = \frac{\sqrt{3/2}}{\sqrt{2/2}} = 1,22$$



Refringencia

Un medio es más refringente que otro si el primero tiene mayor índice de refracción que el segundo. Así, el agua es más refringente que el aire.

Coloca una moneda en el fondo del lavabo sin agua y aparta la vista hasta que el borde del lavabo te impida ver la moneda. Deja que el lavabo se vaya llenando de agua lentamente. Llegará un momento en que la moneda se deje ver de nuevo.

El **cambio brusco de dirección** del rayo luminoso al pasar de un medio a otro es consecuencia del **cambio en la velocidad de la luz**, distinta, como sabemos, para cada medio transparente.

Cuando el rayo luminoso (*AI*) pasa de un medio (aire) de menor índice de refracción en el que se propaga con mayor velocidad, a otro medio (agua) de mayor índice de refracción en el que se propaga con menor velocidad, experimenta un cambio brusco de dirección (*IB*), **acercándose a la normal** (*IN*).

Si el camino recorrido por el rayo es el inverso, el rayo refractado (*IB*) se **aleja de la normal**.

10. Leyes de la refracción

1.^a Ley: El rayo incidente (*AI*), el refractado (*IB*) y la normal (*IN*) están en el mismo plano.

2.^a Ley: Para dos medios transparentes dados, existe una relación constante entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción.

Esta relación constante n_{21} se llama *índice de refracción del segundo medio* (medio de refracción) *respecto del primero*:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

O bien: $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ [9.6]

que es la formulación de la llamada **Ley de Snell**.

Pero el índice de refracción absoluto de un medio, según vimos, viene dado por:

$$n = \frac{c}{v}$$

Por tanto:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{c}{v_2}}{\frac{c}{v_1}} = \frac{v_1}{v_2}$$

Con lo que:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} \quad [9.7]$$

El seno del ángulo de incidencia entre el seno del ángulo de refracción es igual a la relación de índices de refracción del segundo al primer medio o bien a la relación de las velocidades de la luz del primero al segundo medio.

Si el primer medio es el vacío o el aire (índice de refracción del aire 1,00029), la relación $\sin i / \sin r$ es el índice de refracción del segundo medio.

3.^a Ley: El camino de los rayos luminosos es independiente del sentido de propagación de la luz.

Comprobación experimental de la leyes de la refracción

El equipo es el empleado para demostrar las leyes de la reflexión. La única diferencia es que aquí se sustituye el espejo por un semicilindro de vidrio. Cuando el rayo penetra o sale por la superficie cilíndrica, no se desvía porque su dirección es perpendicular a la superficie. Según se aprecia en la fotografía (Fig. 9.22), el haz luminoso incidente forma con la normal un ángulo de 30° . Se refracta al penetrar en el semicilindro de vidrio y forma con la normal a la superficie de incidencia un ángulo de 20° .

Se gira el disco para elegir otro ángulo de incidencia, tomando la precaución de que el haz incida exactamente en el punto céntrico del semicilindro donde tiene que coincidir también la normal. Anotar en una tabla como la indicada los valores tomados o calculados como se ha hecho con la primera experiencia, la correspondiente a la figura. 9.22.

Fig. 9.22.

	1	2	3	4
i				
r				
$\sin i$				
$\sin r$				
n				
Valor medio de n				

11. Ángulo límite. Reflexión total

Cuando un haz luminoso pasa de un medio transparente de mayor índice de refracción a otro de menor índice, se aleja de la normal tanto más cuanto mayor es el ángulo de incidencia (Fig. 9.24).

Para un determinado ángulo de incidencia llamado *ángulo límite* (1) el rayo refractado sale rasante y forma un ángulo de refracción de 90° .

Si el ángulo de incidencia supera al ángulo límite, la superficie que limita ambos medios de comporta como un espejo y se produce la reflexión total.

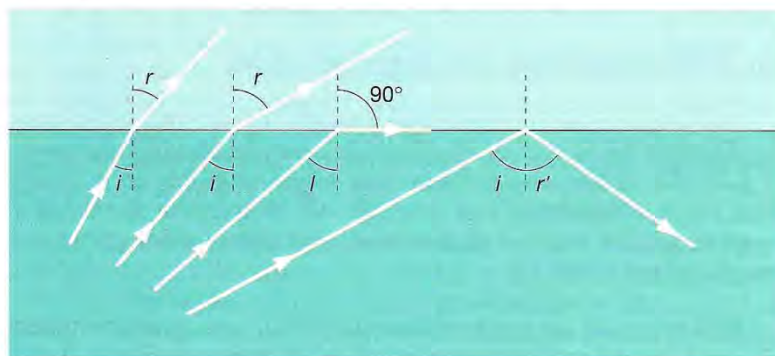


Fig. 9.24.

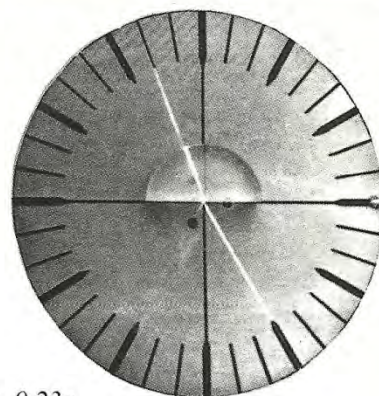


Fig. 9.23a.

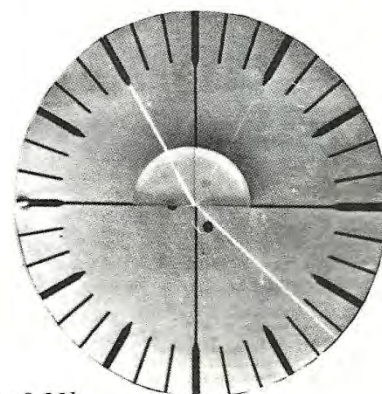


Fig. 9.23b.

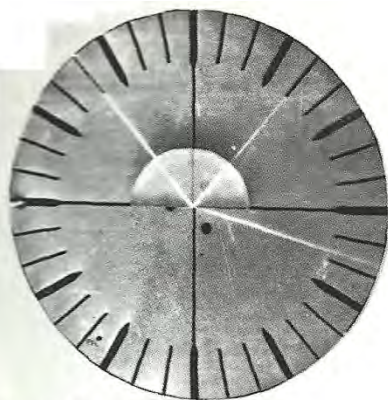


Fig. 9.23c.

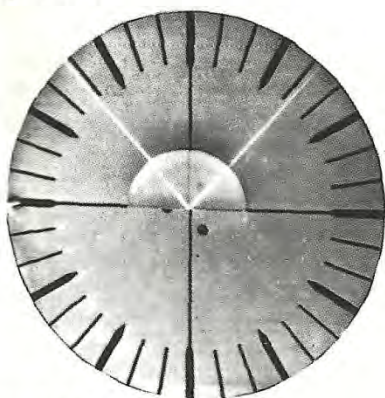


Fig. 9.23d.

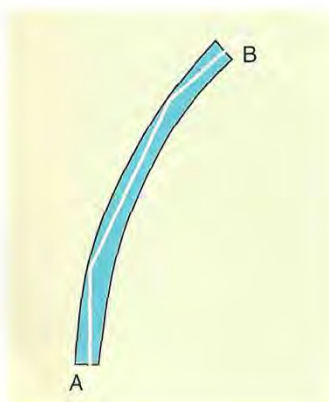


Fig. 9.25a.

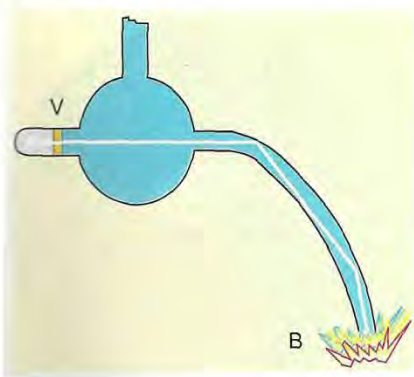


Fig. 9.25b.

Obsérvense estos fenómenos en las fotografías. En la 9.23a y en la 9.23c puede apreciarse cómo el rayo incidente se refracta y se refleja al mismo tiempo. En la 9.23d se produce la reflexión total en el semicilindro de vidrio para un ángulo de incidencia superior a 42° .

Aplicaciones de la reflexión total

- Imaginemos una *fibra de vidrio* o de otro material transparente. Si por el extremo A penetra perpendicularmente a la sección un haz luminoso, se propagará a través del conducto transparente, después de sufrir una serie de reflexiones totales hasta salir por el otro extremo (Fig. 25a). Si los filamentos son tan finos que su diámetro sea del orden de algunas centésimas de milímetro (fibras ópticas), un conjunto de ellos pueden formar un conducto óptico que sirve, entre otras cosas, para explorar cavidades interiores del cuerpo humano. En los últimos años se están utilizando las *fibras de vidrio* (*fibras ópticas*) en las telecomunicaciones con perspectivas muy prometedoras.

- En las *fuentes luminosas* se recurre con frecuencia al fenómeno de la reflexión total, seguida de una dispersión de la luz. La luz atraviesa perpendicularmente la ventana transparente V, se propaga a través del chorro de agua en cuyas paredes experimenta repetidamente la reflexión total y, por fin, alcanza el extremo B. Aquí el chorro se dispersa en gotas pequeñas, produciendo hermosos efectos luminosos al refractarse la luz en éstas (Fig. 9.25b).

- Una de las aplicaciones más importantes de la reflexión total se da en los *aparatos ópticos*: *prismáticos*, *microscopios binoculares*, *periscopios*, etc. Todos ellos utilizan prismas de reflexión total de vidrio, convenientemente tallados.

Como para el vidrio el ángulo límite está en torno a los 42° , bastará que el rayo incidente que se propaga dentro del vidrio incida sobre la superficie del dioptrio con un ángulo, por ejemplo, de 45° para que se produzca la reflexión total. Tal ocurre en el periscopio constituido esencialmente por dos prismas de reflexión total (Fig. 9.26).

El rayo luminoso procedente de A penetra sin desviarse en el primer prisma, sobre una reflexión total en B, se dirige al segundo prisma, experimenta de nuevo una reflexión total en C, y llega por fin al ojo del observador.

12. Refracciones sucesivas

En medios limitados por caras paralelas

Cuando un rayo luminoso que procede del aire incide oblicuamente sobre un *bloque transparente de caras paralelas*, experimenta dos refracciones, una en cada cara, según se indica en la figura 9.27. El rayo incidente y el que sale del bloque son paralelos y están separados por una distancia (d) que depende del grosor del bloque transparente (h).

La imagen de un punto P es vista por un observador situado al otro lado del medio transparente en P', más próxima a dicho medio que el objeto.

La ley de Snell se cumple en los dos dioptrios al refractarse el rayo en O y en O' :

$$n \sin \alpha = n' \sin \beta$$

$$n' \sin \alpha' = n \sin \beta'$$

Pero como $\beta = \alpha'$ por alternos internos será:

$$\alpha = \beta'$$

Es decir, el rayo incidente PO es paralelo al emergente $O'E$.

Refracción en un prisma óptico

Prisma óptico es todo medio transparente limitado por dos caras no paralelas. Aquí también un *fino haz monocromático* (de un solo color) que incide oblicuamente sobre un prisma óptico, experimenta *dos refracciones* según se indica (Fig. 9.28).

El rayo AI sufre una refracción en la primera cara acercándose a la normal; pasa del aire al vidrio. En la segunda cara se refracta de nuevo, alejándose de la normal en la dirección $I'B$, hacia la base del prisma.

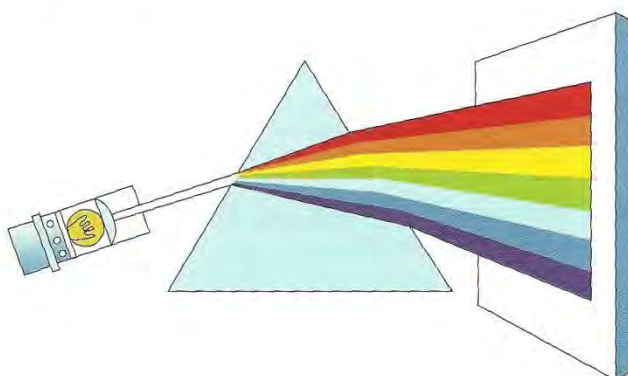


Fig. 9.29. Un haz de luz blanca producida por el filamento de una bombilla sufre una descomposición en los siete colores del espectro visible al atravesar el prisma óptico.

13. Descomposición de la luz blanca mediante el prisma óptico

Si en vez de luz monocromática hacemos incidir oblicuamente en el prisma óptico un *haz estrecho* de luz blanca, procedente de luz solar o de un *filamento incandescente*, éste se refracta y donde se observa el rayo emergente aparece ahora una banda coloreada formada por los siete colores del arco iris: *rojo, anaranjado, amarillo, verde, añil y violeta*, nombrados de arriba abajo. El color más desviado es el *violeta* (Fig. 9.29).

La *superposición* en nuestra retina de los *siete colores* del arco iris provoca en la misma, la sensación de luz blanca. Esto se consigue mediante un disco (disco de Newton) en el que se han pintado distintos sectores con los colores del arco iris. Si el disco gira con cierta velocidad, desaparecen para nuestra vista los colores y se percibe la *síntesis* de todos ellos: el color blanco.

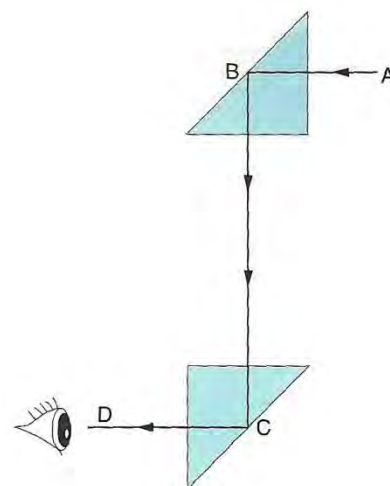


Fig. 9.26. Periscopio.

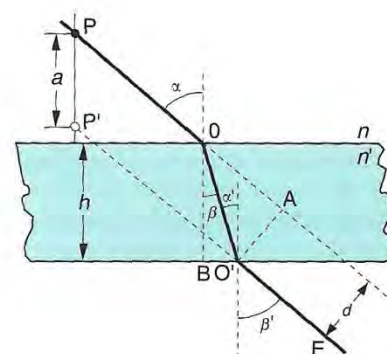


Fig. 9.27.

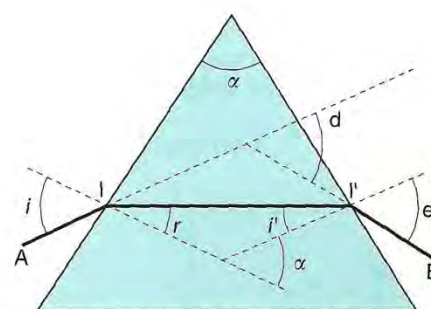
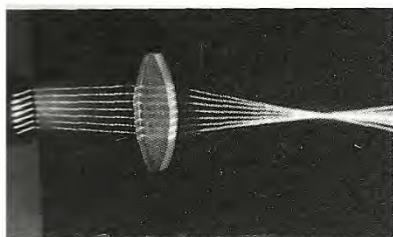
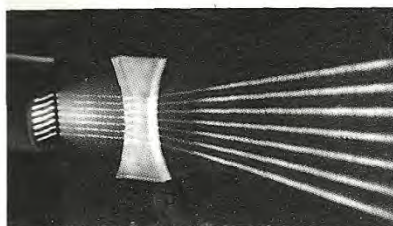


Fig. 9.28. Prisma óptico.



a)



b)

Fig. 9.30a. Efecto de la lentes convergentes (a), y divergentes (b).

Para las fotografías han sido utilizados bloques de vidrio de escasa altura con caras laterales cilíndricas, como si fueran secciones de lentes convergentes (a), y divergentes (b).

En el trazado de imágenes representaremos las lentes delgadas así:

Divergentes Convergentes

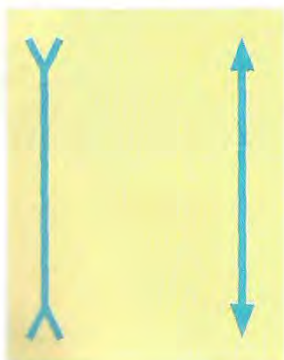


Fig. 9.30b.

14. Las lentes

Lente es todo medio transparente limitado por dos superficies curvas o por una plana y otra curva.

Las superficies curvas son frecuentemente esféricas.

Las lentes suelen clasificarse en dos grupos: lentes *convergentes* y lentes *divergentes*.

- Las *lentes convergentes* son más gruesas en el centro que en los bordes. Se llaman así porque los *rayos luminosos*, después de atravesar estas lentes, *convergen* en un punto. En la fotografía puede apreciarse este efecto.

- Las *lentes divergentes* son más gruesas en los bordes que en el centro. Los *rayos luminosos divergen* después de atravesar estas lentes.

Elementos de una lente

Para que una lente dé buenas imágenes debe ser delgada y de pequeña abertura. Así, sólo recibe los rayos que pasan próximos a su centro y la imagen que se obtiene es clara.

Se dice que una lente es delgada cuando su espesor es pequeño frente al radio de curvatura de sus caras.

- *Centro de curvatura C* es el centro de la superficie esférica a la que pertenece la cara de la lente. Si ésta es plana, *C* está en el infinito.

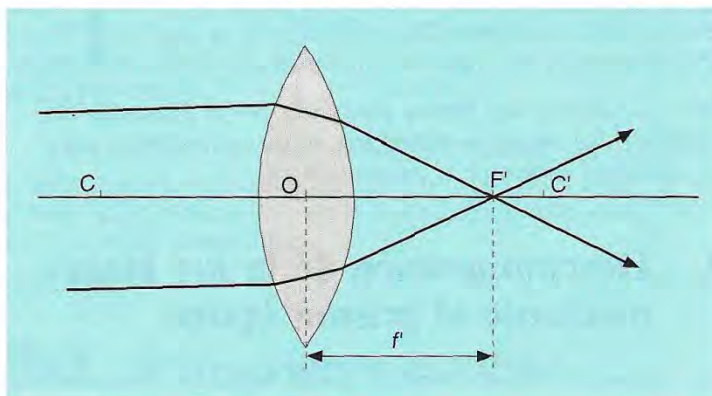


Fig. 9.31. Elementos de una lente convergente.

- *Eje principal* es la recta que une los centros de curvatura de ambas caras. Si una de ellas es plana, el eje principal es la recta perpendicular a esta cara por el centro de curvatura de la otra.

- *Centro óptico* de una lente delgada *O* es el punto interior de la lente por el que pasa el eje principal. Tiene la propiedad de que todo rayo que pase por él no se desvía (no se refracta).

- *Eje secundario* es toda recta que pasa por el centro óptico; pasa por la lente sin refractarse.

- **Foco imagen (F')** es el punto del eje principal donde convergen los rayos paralelos, o sus prolongaciones, después de refractarse. El foco objeto (F) es un punto simétrico de F' respecto del centro óptico. Ambos se llaman focos conjugados.

- **Distancia focal f** es la distancia que hay del foco imagen al centro óptico. Se mide en el eje principal.

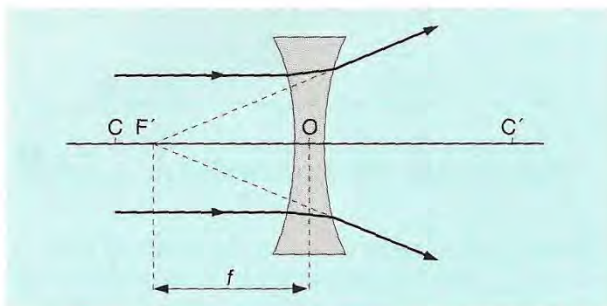


Fig. 9.32. Elementos de una lente divergente.

Determinación de las imágenes producidas por las lentes

En la construcción de imágenes supondremos siempre que se trata de lentes delgadas. La imagen de un punto se determina por la intersección de dos rayos refractados o por sus prolongaciones cuando aquellos divergen. Para ello hemos de saber:

1. Todo rayo paralelo al eje principal se refracta pasando por el foco-imagen.
2. Todo rayo secundario no sufre refracción alguna.
3. Todo rayo que pase por el foco-objeto se refracta en la lente paralelo al eje principal.
4. Si el punto está situado en el eje principal, su imagen también estará en dicho eje porque no se refracta al atravesar la lente.

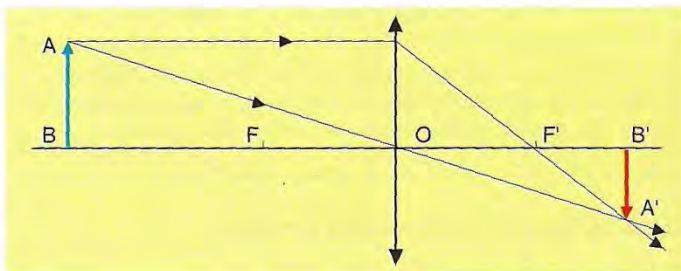
Objeto

Como en los espejos esféricos representamos el objeto por una flecha vertical con la punta hacia arriba (A). El otro extremo (B) está en el eje principal. La imagen del punto B estará siempre en el eje principal. Por tanto, trazaremos solamente la imagen de la punta de la flecha.

A) Imagen de un objeto en las lentes convergentes

a) *Objeto situado entre el infinito y el doble de la distancia focal.* Este es el caso de la cámara fotográfica.

Escogeremos los rayos 1 y 2 que salen de A y se cortan en A'.



La imagen es *real, invertida, más pequeña* y se encuentra al otro lado de la lente donde puede recogerse en una pantalla.

► Fig. 9.33. Fundamento de la cámara fotográfica

Cuestión

¿Dónde se forma la imagen de un objeto situado a mucha distancia?

b) Objeto situado entre el doble de la distancia focal y el foco objeto. Este es el caso del proyector de cine o diapositivas.

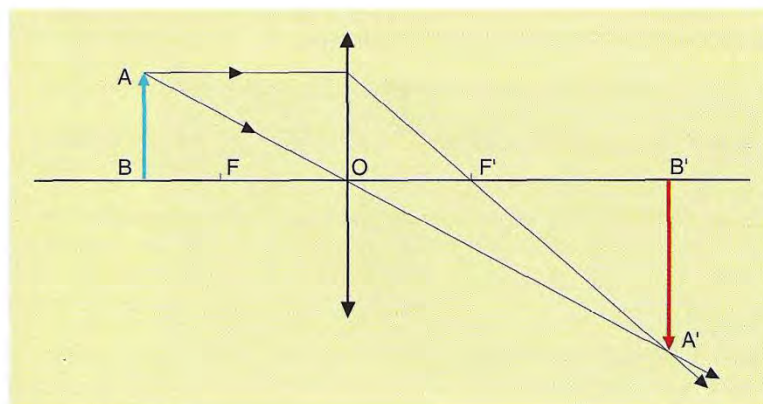


Fig. 9.34. Fundamento óptico de un proyector.

La imagen es *real, invertida, mayor* y situada al *otro lado* de la lente, donde puede recogerse en una pantalla.

Las diapositivas, por tanto, deben colocarse invertidas si el aparato proyector tiene solamente una lente.

c) Objeto situado entre el foco objeto y el centro óptico. Este es el caso de la lupa de aumento.

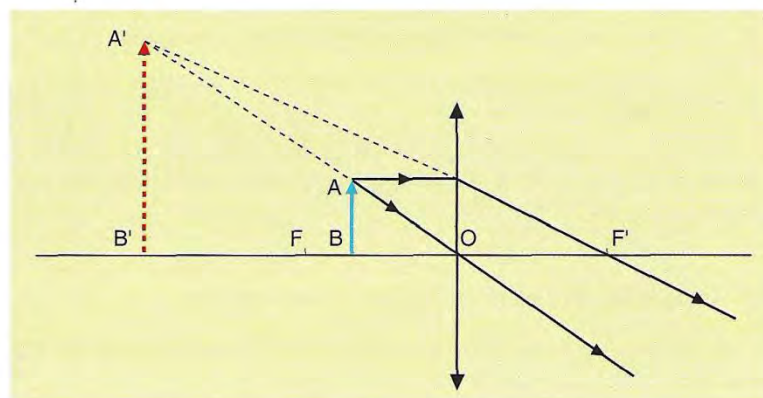


Fig. 9.35. Así se forma la imagen en una lupa de aumento.

La imagen es *virtual, directa y mayor*. Un observador situado al otro lado de la lente recibiría los rayos del objeto como procedentes de $A'B'$, donde está la imagen virtual que, por supuesto, no puede recogerse en una pantalla pero sí verse y fotografiarse. Está formada por las prolongaciones de los rayos divergentes.

B) Imagen de un objeto en las lentes divergentes

Para cualquier situación del objeto, la imagen producida por las lentes divergentes es siempre *virtual, directa, de menor tamaño* y *situada* entre el *foco imagen* y el *centro óptico*.

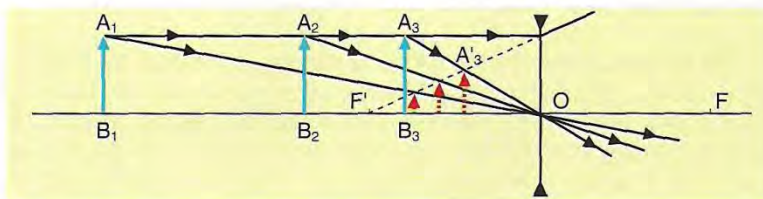


Fig. 9.36. Imágenes en las lentes divergentes.

15. Aplicación de las lentes

Las lentes se utilizan para corregir los defectos de la visión y en la construcción de aparatos ópticos.

La cámara fotográfica

Fundamentalmente es una cámara oscura que lleva un orificio en el que hay instalado un sistema de lentes, que hacen el oficio de una lente convergente.

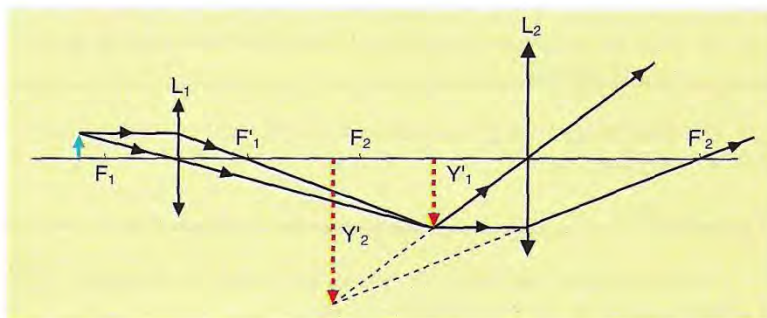
El orificio lleva delante un diafragma para graduar la entrada de la luz y un obturador para exponer una película impresionable a la luz el tiempo conveniente.

La marcha de la luz se realiza como se indica en la figura 9.33.

El microscopio compuesto

La lupa es el fundamento del *microscopio simple* porque consta de una sola lente convergente.

El *microscopio compuesto* consta de *dos lentes convergentes*: una la L_1 , llamada objetivo, que da del objeto una imagen real y mayor, Y_1 . Se enfoca de modo que esta imagen real se forma entre el foco y el centro óptico de la lente ocular L_2 , la cual da una imagen virtual Y_2 mucho mayor.



Fórmula de las lentes

- Si p es la distancia del objeto a la lente y p' la de la imagen y f' la distancia focal imagen, se demuestra la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \quad [9.8]$$

- La relación de tamaños de la imagen (y') al objeto (y) viene dada por:

$$\frac{y'}{y} = \frac{p'}{p} \quad [9.9]$$

Convenio de signos

Como en los espejos esféricos.

Potencia de una lente

Es el inverso de la distancia focal medida en metros y se expresa en dioptrías:

$$D = \frac{1}{f'} \quad [9.10]$$

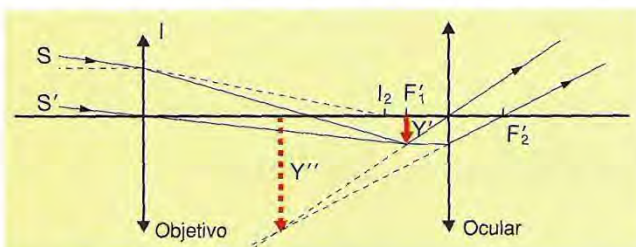
Es positiva en las lentes convergentes y negativa en las divergentes.

Fig. 9.37. Microscopio compuesto.

El anteojo astronómico

Sirve para observar los astros u objetos terrestres muy alejados. Consta, esencialmente: 1.º De un *objetivo*, situado del lado del objeto que se mira. El objetivo está formado por un sistema de lentes convergentes de distancia focal muy grande (de 10 a 20 m para los grandes aparatos). 2.º De un *ocular*, formado por un sistema de lentes convergentes de pequeña distancia focal.

Fig. 9.38. Anteojo astronómico. Los rayos incidentes SI que vienen de muy lejos se les puede suponer paralelos sin gran error y su imagen se forma en un punto del plano focal imagen del objetivo (F'_1). y'' es la imagen final, virtual, indirecta y mayor.



Marcha de los rayos en el anteojo. El objeto Y , muy alejado, se le puede suponer reducido a una recta perpendicular al eje principal con el borde inferior en el eje. El objeto Y da una imagen Y' , situada en el plano focal F'_1 (del objetivo), imagen real, invertida y muy pequeña. Esta imagen hace el papel de objeto real respecto del ocular, que viene a hacer el oficio de una lupa. La imagen Y' debe situarse, por esta razón, dentro de la distancia focal de la lente ocular. Esta lente produce una imagen final Y'' virtual e inversa respecto del objeto Y muy aumentada.

Ejemplo 5

La potencia de una lente es de 5 dioptrías. Determinar: a) la situación; b) el tamaño; c) la posición; d) la naturaleza de la imagen si el objeto está a 50 cm de la lente y mide 12 mm.

- a) De la expresión [9.10], despejando y sustituyendo, se obtiene:

$$f' = \frac{1}{D} = \frac{1}{5 \text{ m}^{-1}} = 20 \text{ cm}$$

Despejando y sustituyendo en la fórmula [9.8]:

$$p' = \frac{pf'}{p + f'} = \frac{-50 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}}{(-50 + 20) \text{ cm}} = 33,33 \text{ cm}$$

Situada a la derecha de la lente por ser p' positiva.

- b) Tamaño de la imagen:

$$y' = \frac{yp'}{p} = \frac{12 \text{ mm} \cdot 100/3 \text{ cm}}{-50 \text{ cm}} = -8 \text{ mm}$$

- c) Por ser la imagen negativa, la posición es invertida respecto del objeto.
d) Es real por estar a la derecha de la lente y menor que el objeto.

Ejemplo 6

Un vidrio posee un índice de refracción respecto al aire de 1,52. Calcular el ángulo límite para este vidrio.

La ley de Snell aplicada a este caso da:

$$\begin{aligned}n_1 \sin \lambda &= n_2 \sin 90^\circ \\ \sin \lambda &= \frac{n_2 \sin 90^\circ}{n_1} = \frac{1,00029 \cdot 1}{1,52} = 0,658 \\ \lambda &= 41^\circ 8' 51''\end{aligned}$$

Ejemplo 7

Un objeto mide 1 cm y dista 20 cm de una lente convergente. Se obtiene una imagen real a 10 cm de la lente. Calcular: a) la distancia focal y la potencia de la lente; b) el tamaño de la imagen.

a) De la ecuación [9.8] se obtiene:

$$f' = \frac{pp'}{p - p'} = \frac{-20 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}}{(-20 - 10) \text{ cm}} = 6,67 \text{ cm}$$

b) Despejando y sustituyendo en la [9.9]:

$$y' = \frac{yp'}{p} = \frac{1 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}}{-20 \text{ cm}} = -0,5 \text{ cm}$$

El signo negativo indica que la imagen es invertida.

Ejemplo 8

¿A qué distancia de una lupa, cuya distancia focal es de 8 cm, habrá que situar un insecto de 8 mm para verlo cuatro veces mayor? ¿Cuál es la situación de la imagen?

La relación entre el tamaño de la imagen y el objeto nos da:

$$\frac{y'}{y} = \frac{p'}{p} = 4 \Rightarrow p' = 4p$$

Sustituyendo en la fórmula [9.8]:

$$\frac{1}{4p} - \frac{1}{p} = \frac{1}{8} \Rightarrow p = -6 \text{ cm}$$

Situación de la imagen:

$$p' = 4p = 4(-6 \text{ cm}) = -24 \text{ cm}$$

Imagen y objeto están al mismo lado de la lente (a la izquierda, según el convenio de signos).

FIBRA ÓPTICA

Introducción

En esta síntesis veremos que el hombre ha inventado diferentes formas de comunicación, desde la comunicación con señas hasta la comunicación a distancia por medio de dispositivos tecnológicos avanzados.

Los avances logrados en el área de telecomunicaciones han permitido que el hombre se desempeñe de una manera mas eficiente y es esta eficiencia ha motivado a empresas nuevas tecnologías que día a día exigen mayores retos a quienes lo desarrollan. De esta forma se ha podido desarrollar la tecnología suficiente para que un barco este en medio del océano y este comunicado en tierra, que un sonda espacial mande información a la tierra y algo mas común estar conectado a Internet.

Los Ingenieros esta comprometidos a ofrecer mayor calidad en sus sistemas, una mayor seguridad y rapidez, gracias a esto ha surgido la **FIBRA ÓPTICA**, una nueva corriente tecnológica como opción para incrementar la densidad de las telecomunicaciones más rápidamente y con un mejor servicio.

Así, veremos que el futuro todo sistema electrónico y de comunicaciones estará basado en esta tecnología ya que ofrece grandes ventajas en costos y un gran numero de utilidades. Sin embargo, no sabemos si podrá ser sustituida con tecnología de mayor precisión.

Aquí se abordara todo lo referente a su historia, concepto, aplicación y tipos de fibra óptica.

Antecedentes

La Historia de la comunicación por la fibra óptica es relativamente corta. En 1977, se instaló un sistema de prueba en Inglaterra; dos años después, se producían ya cantidades importantes de pedidos de este material.

En 1959, como derivación de los estudios en física enfocados a la óptica, se descubrió una nueva utilización de la luz, a la que se denominó rayo láser, que fue aplicado a las telecomunicaciones con el fin que los mensajes se transmitieran a velocidades muy rápidas y con amplia cobertura.

Sin embargo esta utilización del láser era muy limitada debido a que no existían los conductos y canales adecuados para hacer viajar las ondas electromagnéticas provocadas por la lluvia de fotones originados en la fuente denominada láser.

Fue entonces cuando los científicos y técnicos especializados en óptica dirigieron sus esfuerzos a la producción de un ducto o canal, conocido hoy como la fibra óptica. En 1966 surgió la propuesta de utilizar una guía óptica para la comunicación.

En poco más de 10 años la fibra óptica se ha convertido en una de las tecnologías más avanzadas que se utilizan como medio de transmisión de información. Este novedoso material vino a revolucionar los procesos de las telecomunicaciones en todos los sentidos, desde lograr una mayor velocidad en la transmisión y disminuir casi en su totalidad los ruidos y las interferencias hasta multiplicar las formas de envío en comunicaciones y recepción por vía telefónica.

¿Qué es la fibra óptica?

Una **fibra óptica** se puede definir como fibra o varilla de vidrio u otro material transparente con un índice de refracción alto que se emplea para transmitir luz. Cuando la luz entra por uno de los extremos de la fibra, se transmite con muy pocas pérdidas incluso aunque la fibra esté curvada.

La fibra óptica son filamentos de vidrio de alta pureza extremadamente compactos, el grosor de una fibra es similar a la de un cabello humano. Fabricadas a alta temperatura con base en silicio, su proceso de elaboración es controlado por medio de computadoras, entre sus principales características se puede mencionar que son compactas, ligeras, con bajas pérdidas de señal, amplia capacidad de transmisión y un alto grado de confiabilidad debido a que son inmunes a las interferencias electromagnéticas de radio-frecuencia.

Originalmente, la fibra óptica fue propuesta como medio de transmisión debido a su enorme ancho de banda; sin embargo, con el tiempo se ha planteado para un amplio rango de aplicaciones además de la telefonía, automatización industrial, computación, sistemas de televisión por cable y transmisión de información de imágenes astronómicas de alta resolución entre otros.

Transmisión

Se puede decir que este proceso de comunicación, la fibra óptica funciona como medio de transportación de la señal luminosa, generado por el transmisor de LED'S (diodos emisores de luz) y lasers.

Los diodos emisores de luz y los diodos lasers son fuentes adecuadas para la transmisión mediante fibra óptica, debido a que su salida se puede controlar rápidamente por medio de una corriente de polarización.

Además su pequeño tamaño, su luminosidad, longitud de onda y el bajo voltaje necesario para manejarlos son características atractivas.

Tipos de Fibras

Tipos básicos de fibras ópticas, cabe mencionar que existen mas tipos pero estos son los mas usados actualmente:

- Multimodales
- Multimodales con índice graduado
- Monomodales

Fibra Multimodal

En este tipo de fibra viajan varios rayos ópticos reflejándose a diferentes ángulos los diferentes rayos ópticos recorren diferentes distancias y se separan al viajar dentro de la fibra. Por esta razón, la distancia a la que se puede transmitir esta limitada.

Fibra multimodal con índice graduado

En este tipo de fibra óptica el núcleo esta hecho de varias capas concéntricas de material óptico con diferentes índices de refracción. La propagación de los rayos en este caso siguen un patrón similar. En estas fibras el numero de rayos ópticos diferentes que viajan es menor y, por lo tanto, sufren menos el severo problema de las multimodales.

Fibra Monomodal

Esta fibra óptica es la de menor diámetro y solamente permite viajar al rayo óptico central. No sufre del efecto de las otras dos pero es más difícil de construir y manipular. Es también más costosa pero permite distancias de transmisión mayores.

Ventajas De La Fibra Óptica

Capacidad de transmisión: La idea de que la velocidad de transmisión depende principalmente del medio utilizado, se conservó hasta la llegada de las fibras ópticas, ya que ellas pueden transmitir a velocidades mucho más altas de lo que los emisores y transmisores actuales lo permiten, por lo tanto, son estos dos elementos los que limitan la velocidad de transmisión.

- Mayor capacidad debido al ancho de banda mayor disponible en frecuencias ópticas. Resistencia a extremos ambientales. Son menos afectadas por líquidos corrosivos, gases y variaciones de temperatura.
- La seguridad en cuanto a instalación y mantenimiento. Las fibras de vidrio y los plásticos no son conductores de electricidad, se pueden usar cerca de líquidos y gases volátiles.

Desventajas de la Fibra Óptica

Algunas desventajas del servicio de fibra óptica son: la limitación para conectarse a Internet desde más de un lugar, el costo inicial y una cuota mensual más alta. Además de:

- Fragilidad de las fibras.
- Disponibilidad limitada de conectores.
- Dificultad de reparar un cable de fibras roto en el campo.

Aplicaciones

Internet, el servicio de conexión a Internet por fibra óptica, es sin lugar a dudas una herramienta muy rápida para navegar.

- **Redes**, la fibra óptica se emplea cada vez más en la comunicación, debido a que las ondas de luz tienen una frecuencia alta y la capacidad de una señal para transportar información aumenta con la frecuencia.
- **Telefonía**, con motivo de la normalización de interfaces existentes, se dispone de los sistemas de transmisión por fibra óptica para los niveles de la red de telecomunicaciones públicas en una amplia aplicación, contrariamente para sistemas de la red de abonado (línea de abonado), hay ante todo una serie de consideraciones.
- **Otras aplicaciones**, las fibras ópticas también se emplean en una amplia variedad de sensores, que van desde termómetros hasta giroscopios. Portadores comunes telefónicos y no telefónicos, Televisión por cable, Enlaces y bucles locales de estaciones terrestres, Automatización industrial, Controles de procesos, Aplicaciones de computadora y Aplicaciones militares.

• Conclusiones

La Fibra Óptica en la actualidad juega un papel importante dentro de la rama de las telecomunicaciones debido que en ocasiones es más barata que un sistema satelital e incluso que un sistema inalámbrico para determinado tipo de información que se desea comunicar.

Las propiedades requeridas de la fibra óptica en una red óptica dependen de donde están usándose las fibras.

En la actualidad la gran competitividad en las telecomunicaciones, trae consigo construir nuevas redes ópticas a menor costo posible. Afortunadamente las fibras ópticas son más sencillas de utilizar siempre y cuando se escoja la mejor fibra.

Las redes metropolitanas se benefician de una red óptica, que puede llevar consigo tantas longitudes de onda como sea posible y esto se logra eliminando la atenuación asociada a diversos factores ya mencionados en esta síntesis.

Algunas aplicaciones de las fibras ópticas que actualmente están siendo explotadas por las compañías de fibra óptica del mundo utilizan, transmisión submarina, grandes coberturas núcleos terrestres y metropolitanas, como posibles soluciones a las trasmisiones de datos en la actualidad y en un futuro. Es por ello la fibra óptica va a la vanguardia junto con la telefonía celular en el mundo de las telecomunicaciones, ya que se podrá tener todo tipo de comunicación desde cualquier parte de donde nos encontremos. Los beneficiados somos nosotros y las respectivas empresas que explotan este servicio, que día a día va agarrando mayor fuerza en nuestras actividades cotidianas.

Se proyecta un futuro revolucionado de altas frecuencias de ondas gracias a la fibra óptica.

Questionario de autoevaluación

- 9.1. ¿De qué tratan la óptica física y la óptica geométrica?
- 9.2. ¿Emite luz propia la Luna? ¿Por qué la vemos? ¿Existe una diferencia esencial en el por qué vemos la Luna y por qué vemos los objetos que nos rodean?
- 9.3. ¿Qué es sombra? ¿Qué es penumbra? ¿Cómo se producen?
- 9.4. ¿Puede un objeto viajar más rápido que la luz? ¿Podrías dar alguna razón de ello?
- 9.5. ¿Cómo se calcula el índice de refracción de un medio transparente?
- 9.6. Enuncia y explica brevemente las leyes de la refracción.
- 9.7. Explica cómo son las imágenes de los espejos planos.
- 9.8. Indica, ayudándote de un gráfico, las características de los espejos esféricos convexos.
- 9.9. ¿Qué trayectoria siguen los rayos que pasan por el centro de curvatura y por el foco de un espejo esférico cóncavo después de reflejarse?
- 9.10. ¿Se cumplen las leyes de la reflexión en los espejos esféricos? Si es así, haz un gráfico para justificarlo.
- 9.11. Indica la clase de espejo y el lugar del objeto para obtener:
- a) una imagen real ampliada;
 - b) una imagen real menor que el objeto;
 - c) una imagen virtual mayor que el objeto;
 - d) una imagen virtual menor que el objeto.
- 9.12. ¿Cuándo un medio es más refringente que otro?
- 9.13. Enuncia las leyes de la refracción.
- 9.14. ¿Por qué se produce la refracción?
- 9.15. ¿Qué es ángulo límite? ¿Qué se entiende por reflexión total? ¿Cuándo se produce?
- 9.16. Cita algunas aplicaciones técnicas de la reflexión total. ¿Cuál crees que es la de más importancia en la actualidad?
- 9.17. Si miras un objeto oblicuamente a través de un cristal, la imagen que percibes, ¿se encuentra donde el objeto?
- 9.18. ¿Qué se entiende por desviación de un rayo monocromático en un prisma óptico?
- 9.19. ¿Qué es ángulo de refringencia en un prisma óptico?

- 9.20.** Al pasar la luz blanca por un prisma óptico, experimenta una descomposición de colores. ¿A qué es debido?
- 9.21.** ¿Sabrías dar una explicación del comportamiento de un haz luminoso al atravesar una lente convergente o divergente? Fíjate en la trayectoria de un rayo en el prisma óptico.
- 9.22.** Si quieres que los rayos refractados en una lente salgan paralelos al eje principal, ¿dónde colocarías el foco luminoso? ¿Qué lente emplearías? Razona la respuesta ayudándote del dibujo.
- 9.23.** Si quieres proyectar en una pantalla la imagen de un objeto, ¿qué lente utilizarías?
- 9.24.** Si queremos obtener una imagen de igual tamaño que el objeto, ¿qué lente hemos de emplear? ¿Dónde debes colocar el objeto?
- 9.25.** La lupa da imágenes virtuales. ¿Son directas o invertidas? Razona la respuesta ayudándote con el dibujo.

Problemas de aplicación

- 9.1. Se dice que la velocidad de la luz en cierto medio transparente es 250 000 km/s. ¿Puede ser esto cierto? ¿Cuál es el índice de refracción de ese medio?
Soluc.: $n = 1,2$.
- 9.2. ¿Cuántas imágenes se observan de un objeto situado entre dos espejos planos que forman entre sí un ángulo de 45° ?
- 9.3. Un espejo giratorio está en un momento dado en un plano paralelo a una pared situada a 2 m del mismo. Un rayo luminoso procedente de la pared incide perpendicularmente en el espejo. Si el espejo gira 15° , calcula: a) el ángulo girado por el rayo luminoso; b) el desplazamiento de la señal luminosa en la pared.
- 9.4. Dibuja la marcha de un rayo luminoso que incide en un espejo con ángulo de incidencia de 60° , si junto a este espejo hay otro formando con el mismo un ángulo de 90° .
- 9.5. Delante de un espejo cóncavo de 20 cm de distancia focal se coloca un objeto luminoso de 15 cm de alto, a una distancia de 120 cm del espejo. Determina la posición y tamaño de la imagen. Haz un gráfico de la marcha de los rayos.
Soluc.: $p' = -24 \text{ cm}$ $y' = -3 \text{ cm}$.
- 9.6. Halla el radio de curvatura de un espejo esférico cóncavo si un objeto situado a 3,60 m de su centro óptico, da una imagen real a 18 cm de ese punto.
Soluc.: $R = -34,28 \text{ cm}$.
- 9.7. Un objeto y su imagen producida en un espejo cóncavo tienen el mismo tamaño cuando el objeto dista 15 cm del espejo. Halla la distancia focal del espejo.
- 9.8. Vemos la imagen de la Luna en un espejo cóncavo de 4 m de radio de curvatura. Calcula el diámetro de la imagen si el diámetro de la Luna es de $3,48 \cdot 10^6 \text{ m}$. Distancia Tierra-Luna: $3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$.
Soluc.: $d = -1,81 \cdot 10^{-2} \text{ m} = -1,81 \text{ cm}$.
- 9.9. Si el índice de refracción del agua es 1,33 y el del aire 1, calcula el ángulo límite para el agua.
Soluc.: $l = 48^\circ 45'$.
- 9.10. Si el ángulo límite de una sustancia es 35° , ¿cuál es su índice de refracción respecto al aire? Calcula el ángulo de incidencia al pasar el rayo del aire a la sustancia si el ángulo de refracción es 15° .
- 9.11. Halla la distancia de un objeto a una lente convergente de 10 cm de distancia focal, si se desea tener una imagen dos veces mayor que el objeto. ¿Dónde se debe poner la pantalla que recoge la imagen? Haz un gráfico.
Soluc.: Objeto a 5 cm y pantalla a 10 cm.
- 9.12. Un proyector tiene un objetivo de 8 dioptrías de potencia. Calcula la distancia objetivo-pantalla, si se desea proyectar una diapositiva de 3 cm de alta colocada a 20 cm del objetivo. ¿Qué tamaño tiene la imagen?
- 9.13. La distancia focal de una lente es de 2,00 cm. ¿Dónde hemos de colocar la lente para obtener una imagen clara del objeto a 200 cm del objeto?
- 9.14. El objetivo de una cámara fotográfica tiene 55 mm de distancia focal. Si la película se encuentra a 60 mm de la lente objetivo, ¿a qué distancia tiene que situarse el objeto a fotografiar para obtener una fotografía correcta?
Soluc.: $p = -66 \text{ cm}$.

TEMA IX

MOVIMIENTO ONDULATORIO

Movimiento ondulatorio

Desde un punto de vista geométrico, lo que se propaga en una onda progresiva es la forma de la onda; pero desde la Física, lo que se propaga es la energía. Ésta alcanza un valor elevado en los ultrasonidos, de frecuencia mayor que el nivel superior del oído humano, 20 kHz. Al ser su longitud de onda mucho menor que los sonidos ordinarios, se emplean en medicina los ultrasonidos para captar pormenores finos del objeto reflectante, y son un medio eficaz de diagnóstico clínico. (MacDonald/Burns.)



Introducción

En la naturaleza son frecuentes los movimientos realizados por partículas o cuerpos en torno a una posición de equilibrio: el balanceo de un cuerpo colgado de un hilo, la oscilación de un muelle separado de la posición de equilibrio, o de los átomos y iones que forman parte de una red cristalina...

Cuando las vibraciones se producen en un medio elástico, la perturbación y la energía se propagan por el medio en forma de ondas.

El sonido y los ultrasonidos, la radiación calorífica y la luz, los rayos X y los rayos gamma (γ), las ondas de la radio, la televisión, el radar..., son ejemplos de movimientos ondulatorios. Pocos conceptos abarcan un campo tan extenso en la Física como las ondas. Es, por tanto, imprescindible tener una idea lo más clara posible de este movimiento para poder acercarse a la Física moderna.

En el estudio que sigue hablaremos de los fenómenos ondulatorios en general, pero referidos fundamentalmente a las ondas mecá-



Las olas rompen los acantilados por la energía que transportan las ondas superficiales de los mares.

nicas sinusoidales, es decir, ondas que, al propagarse, comunican a las partículas del medio un movimiento armónico.

A modo de introducción trataremos brevemente del movimiento vibratorio armónico simple y terminaremos con unas ideas sobre las ondas sonoras.

1. Movimiento vibratorio armónico

El balancín del reloj, la masa sujeta al extremo de un resorte..., realizan movimientos vibratorios armónicos cuando se les separa de su posición de equilibrio y se dejan libres.

El movimiento **vibratorio armónico** es un movimiento **periódico de vaivén** por la misma trayectoria. Para que un cuerpo pueda realizar oscilaciones necesita, previamente, ser capaz de almacenar energía potencial, como la elástica del resorte, y poseer cierta masa o inercia que le permita adquirir energía cinética, ya que toda oscilación es un continuo intercambio de energías potencial y cinética.

Así, por ejemplo, la masa sostenida por un resorte (fig. 8.1) y separada de su posición de equilibrio adquiere energía potencial elástica en el resorte y energía cinética en la masa m que se mueve con él, cuando se deja libre el sistema.

Cuando se aplica a un cuerpo o sistema mecánico una fuerza F cuyo valor depende del alargamiento que se le dé, en el sistema aparece, por reacción, una fuerza recuperadora o elástica de sentido opuesto, cuyo valor viene dado por la ley de Hooke:

$$F = -kx \quad [4.6]$$

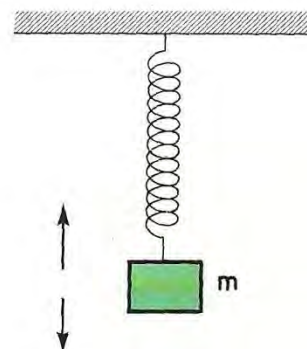


Fig. 8.1. Resorte que oscila con movimiento armónico simple.

Al dejar libre el sistema, éste adquiere un movimiento armónico simple (m.a.s.) de vaivén con relación a la posición de equilibrio. El valor de la fuerza es función de la **distancia** de la posición del móvil al centro de equilibrio (elongación), y cumple, por la dinámica,

$$F = -kx = ma \quad [8.1]$$

Según esto, la aceleración $a = -\frac{k}{m}x$ del cuerpo depende, a su vez, de la distancia x del cuerpo al punto de equilibrio o centro de oscilación: es **máxima** en los extremos y vale **cero** en el centro de oscilación; k es una constante llamada de **elasticidad** y se mide en N/m en el SI.

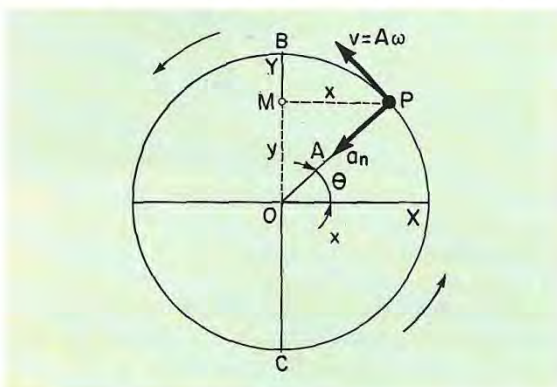


Fig. 8.2. Movimiento circular uniforme y movimiento armónico.

Relación del m.a.s. con el movimiento circular uniforme

Si el punto P de la figura describe una circunferencia de radio $R = A$ con velocidad angular ω constante, la proyección M en el eje BC realiza un movimiento vibratorio armónico (confróntese 2.9).

En efecto, la aceleración de este movimiento es la centrípeta, dirigida hacia el centro O , y vale:

$$a_n = \frac{v^2}{A} = \frac{A^2\omega^2}{A} = A\omega^2$$

y su componente paralela a BC (el eje OY),

$$a = A\omega^2 \sin \theta$$

dirigida hacia el punto O , es la aceleración del punto M .

Como $y = A \sin \theta$ tiene sentido negativo, podemos escribir para dicha aceleración:

$$a = -\omega^2 y \quad [8.2]$$

que es la condición que debe cumplir la aceleración del movimiento armónico: luego M se desplaza según un m.a.s. en el eje OY .

El período del punto M en una oscilación $MBOCOM$ es el tiempo que emplea el punto P en dar una vuelta:

$$T = \frac{\text{ángulo descrito por } P \text{ en una vuelta}}{\text{velocidad angular (rad/s)}}$$

es decir,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ s}$$

Y la frecuencia de la oscilación,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ Hz}$$

De donde la frecuencia angular o pulsación de la oscilación vale:

$$\omega = 2\pi f \text{ rad/s}$$

y coincide con el valor de la velocidad angular del movimiento circular uniforme.

2. Ecuación del movimiento vibratorio armónico

Del triángulo MOP de la figura 8.2 se deduce para el desplazamiento o elongación del punto M :

$$y = A \sin \theta = A \sin \omega t$$

pues $\theta = \omega t$.

En general, en el instante inicial $t = 0$, el ángulo φ que forma el eje OX con OP puede no ser cero; por eso la ecuación anterior se suele escribir:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) \quad [8.3]$$

La velocidad del punto M en la dirección OB es la componente de la velocidad de P en la misma dirección, y se puede calcular derivando la [8.3] respecto del tiempo:

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Según esto, la velocidad de este movimiento es una función armónica, y adquiere su valor máximo cuando

$$\cos(\omega t + \varphi) = \pm 1: v_{\max} = \pm A\omega$$

lo que ocurre para $y = 0$, pues en ese punto $(\omega t + \varphi) = n\pi$.

La velocidad se anula, $v = 0$, cuando y adquiere el valor máximo, $y = \pm A$, pues entonces $\cos(\omega t + \varphi) = 0$.

Finalmente, la aceleración del punto M se deduce análogamente hallando la derivada de la velocidad respecto del tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

que, sustituyendo por la [8.3] resulta:

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

que coincide con la [8.2]; y podemos escribir:

$$a + \omega^2 y = 0$$

o su equivalente:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad [8.4]$$

Esta es la ecuación general del movimiento armónico simple, cuya solución es la señalada en [8.3].

Según esto, la aceleración es nula, $a = 0$, para $y = 0$, y adquiere valores máximos, en los extremos de la elongación: para $y = +A$, $a = -\omega^2 A$; para $y = -A$, $a = +\omega^2 A$.

Dinámica del m.a.s.

Un punto material realiza un movimiento armónico simple cuando describe un movimiento de vaivén en torno a la posición de equilibrio O y cumple, suponemos la vibración en el eje OX , $F = -kx = -ma = -m\omega^2 x$, de donde,

$$a = -\frac{k}{m} \cdot x = -\omega^2 x \quad [8.5]$$

De la [8.5] es fácil deducir el valor del período del oscilador armónico:

$$\frac{k}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad [8.6]$$

El período aumenta con la masa oscilante y disminuye con el valor de la constante elástica del cuerpo, es independiente de la amplitud de la oscilación.

Ejercicio 1

Un resorte horizontal de masa despreciable se alarga 8 cm cuando se le aplica una fuerza de 3,6 N. Si a un extremo del resorte se le fija una masa de 0,8 kg y se le estira 10 cm desde la posición de equilibrio, dejándolo luego oscilar libremente, calcular: a) la constante elástica del resorte; b) la frecuencia de la oscilación; c) la amplitud del movimiento; d) la velocidad máxima del cuerpo.

SOLUCIÓN

a) La constante elástica

$$k = \frac{F}{x} = \frac{3,6 \text{ N}}{0,08 \text{ m}} = 45 \text{ N/m.}$$

No aparece el signo (–) porque éste pertenece a la fuerza de recuperación, no a la fuerza que se aplica exteriormente.

b) De la fórmula [8.6] se deduce para la frecuencia:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{45 \text{ N/m}}{0,8 \text{ kg}}} = 1,2 \text{ Hz.}$$

c) La amplitud es igual a la elongación o desplazamiento máximo; en esa posición la energía cinética es nula: $A = 0,10 \text{ m.}$

d) La velocidad máxima la posee cuando pasa el cuerpo por el centro de oscilación O , en el cual $x = 0$, y vale: $v = A\omega \cos \omega t$; cuyo valor es máximo para $\cos \omega t = 1$; por tanto, $v = A\omega = A2\pi f = 0,75 \text{ m/s.}$

Ejercicio 2

Una partícula se mueve a lo largo de una recta con m.a.s. En el punto $x = 3$ cm lleva la velocidad de 9 cm/s y en el $x = 6$ cm su velocidad es 4 cm/s. Determinar: a) la frecuencia angular; b) el período del movimiento; c) la amplitud de la vibración.

SOLUCIÓN

a) De la ecuación general del movimiento

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

deducimos la velocidad derivando respecto del tiempo:

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Elevamos al cuadrado ambas:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ v^2 &= A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2(\omega t + \varphi) = x^2/A^2 \\ \cos^2(\omega t + \varphi) = v^2/A^2 \omega^2 \end{cases}$$

y sumando, se tiene:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \omega^2} = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \quad (1)$$

Sustituyendo en (1) los datos del problema, se obtiene:

$$3^2 \text{ cm}^2 + \frac{(9 \text{ cm/s})^2}{\omega^2} = A^2 \quad ; \quad 6^2 \text{ cm}^2 + \frac{(4 \text{ cm/s})^2}{\omega^2} = A^2$$

Resolviendo el sistema se deduce: $\omega^2 = 2,41 \text{ (rad/s)}^2 \Rightarrow \omega = 1,55 \text{ rad/s}$.

b) De $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 4,05 \text{ s}$.

c) Y para la amplitud, $A = 6,53 \text{ cm}$.

3. Energías cinética y potencial del oscilador armónico

Supongamos un oscilador armónico como el de la figura 8.1, en el que se puede prescindir de toda fuerza disipativa. En este caso el movimiento armónico no es amortiguado y se conserva la energía mecánica:

$$E = E_c + E_{p(x)}$$

Si desplazamos la masa m una longitud x , contada desde el punto de equilibrio, en el resorte aparece una fuerza recuperadora de igual valor que la que se aplica, pero de sentido contrario.

Sabemos por la ley de Hooke, que

$$F = -kx = ma$$

donde a es la aceleración, de dirección y sentido iguales a los de la fuerza recuperadora. Para estirar el resorte hay que realizar un trabajo que se transforma en energía potencial elástica, cuyo valor vamos a deducir.

• Energía potencial del oscilador armónico

Si estiramos el resorte una longitud infinitesimal dx realizamos el trabajo: $dW = F \cdot dx$. Para estirarlo una longitud x , el trabajo necesario se deduce integrando la anterior:

$$W = \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$

donde $F = kx$ es la fuerza que hemos aplicado. Dicho trabajo queda almacenado en el resorte en forma de energía potencial elástica; por tanto,

$$E_{p(x)} = \frac{1}{2} kx^2 \quad [8.7]$$

que, por la relación [8.5] se expresa:

$$E_{p(x)} = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Esta energía será máxima cuando lo sea la elongación, es decir, para $x = +A$, siendo A la amplitud del movimiento:

$$E_c = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - A^2 \sin^2 \omega t) \quad [8.8]$$

• Energía cinética del oscilador

Cuando el móvil alcanza una elongación x , a contar desde el centro de equilibrio, una parte de su energía es potencial y otra parte, cinética; pero su suma permanece constante. El valor de la energía cinética es función de la velocidad que posee el móvil en ese punto:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

y sustituyendo v por la velocidad del oscilador armónico, resulta:

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \omega^2 \cos^2 \omega t$$

y, en función del seno,

$$E_c = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - A^2 \sin^2 \omega t)$$

Si la elongación del movimiento es: $x = A \sin \omega t$, prescindiendo de la dirección, se tiene en la anterior:

$$E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) \quad [8.9]$$

Puesto que se conserva la energía mecánica, la suma de las energías cinética y potencial del oscilador armónico en un punto, es constante:

$$E = E_{p(x)} + E_c$$

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \quad [8.10]$$

expresión que indica que «la energía mecánica de una partícula que oscila con movimiento armónico simple es **proporcional al cuadrado de la amplitud de la oscilación, en cualquier punto**».

De las figuras 8.3 y 8.4 se deduce: a) las energías cinética y potencial oscilan con frecuencia doble que el movimiento armónico (2 ciclos en un período); b) sus valores medios son iguales y valen $\frac{1}{4} k A^2$; c) los valores máximos son también iguales, $\frac{1}{2} k A^2$; cuando E_c es máxima, E_p es cero, y al revés.

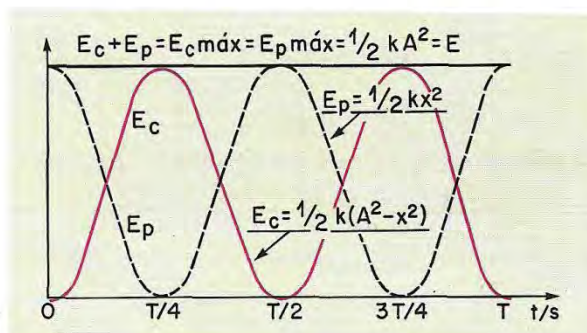


Fig. 8.3. Tiempo de variación de la energía en el m.a.s. La E total permanece constante.

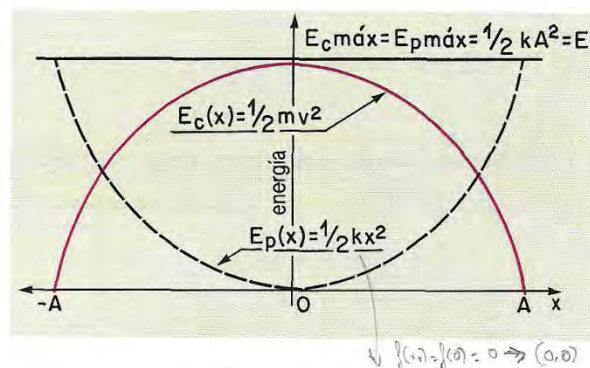


Fig. 8.4. Variación de la energía con la posición en el m.a.s. La E permanece constante.

4. Energías similares a las del oscilador armónico

Sea un sistema físico oscilante que posee energía cuyas fórmulas son:

$$E_p = \frac{1}{2} a x^2 \quad ; \quad E_c = \frac{1}{2} b \dot{x}^2 \quad \left(\text{siendo } \dot{x} = \frac{dx}{dt} \right)$$

donde a y b son constantes positivas del sistema y x una variable; si dicho sistema conserva la energía (no es amortiguado), la energía total:

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} a x^2 + \frac{1}{2} b \dot{x}^2$$

es constante.

Derivando la anterior, respecto del tiempo, se obtiene:

$$ax \cdot \dot{x} + b\dot{x} \cdot \ddot{x} = 0$$

de donde la aceleración cumple:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{a}{b}\right)x \quad \left(\text{si } \dot{x} = \frac{dx}{dt} \neq 0\right)$$

Luego tales sistemas poseen movimiento armónico simple y su período vale:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{b}{a}} \quad \left(\text{pues } \frac{a}{b} = \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}\right)$$

Ejemplos:

Oscilación	E_p	E_c	T
Masa que cuelga de un resorte	$\frac{1}{2} kx^2$	$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} mv^2$	$2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$
Péndulo de torsión	$\frac{1}{2} c\theta^2$	$\frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$	$2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}$
Carga en circuito LC	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{C}\right) Q^2$	$\frac{1}{2} L\dot{Q}^2 = \frac{1}{2} LI^2$	$2\pi \sqrt{LC}$

Ejercicio 3

Con los datos del ejercicio 1, calcular: a) las energías cinética y potencial de la partícula al pasar por el centro de oscilación; b) ídem cuando la elongación es $x_1 = 5$ cm, y $x_2 = 10$ cm.

SOLUCIÓN

a) En el punto $x = 0$, la $E_p = 0$ y la E_c es máxima porque $v = A\omega$, es máxima en ese punto:

$$E_c = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} 45 \text{ N/m} \cdot (0,10 \text{ m})^2 = 0,225 \text{ J}$$

b) Para $x = 0,05$ m,

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} 45 \text{ N/m} \cdot (0,05 \text{ m})^2 = 0,056 \text{ J} \quad \text{y} \quad E_c = E - E_p = 0,225 \text{ J} - 0,056 \text{ J} = 0,169 \text{ J}$$

por el principio de conservación de la energía.

En la posición $x = 10 \text{ cm} = A$, la energía cinética es nula porque $v = 0$; y la E_p es máxima e igual a la $E_{c\text{máx}}$; $E_p = 0,225 \text{ J}$.

Ejercicio 4

Un cuerpo de masa $m = 75$ g, unido al extremo de un muelle de constante elástica $k = 80$ N/m, se le separa de su posición de equilibrio 15 cm y se le deja en libertad. Calcular: a) la frecuencia del movimiento armónico; b) la energía mecánica inicial; c) la velocidad que posee al pasar por $x = 5$ cm; d) la ecuación de este movimiento.

SOLUCIÓN

- a) Sabiendo que la ecuación del período del oscilador armónico es $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ y dado que la frecuencia y el período se relacionan por la expresión $f = \frac{1}{T}$, resulta:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 5,2 \text{ Hz}$$

- b) En el extremo, la energía cinética es nula ($v = 0$) y la energía potencial, máxima:

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \cdot 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,15 \text{ m})^2 = 0,9 \text{ J}$$

- c) Por el principio de conservación de la energía, la suma de las energías cinética y potencial en un punto cualquiera es constante, E . Por tanto,

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = E$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{2} 0,075 \text{ kg} \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,05 \text{ m})^2 = 0,9 \text{ J}$$

de donde, $v = 4,62$ m/s.

- d) La ecuación general del movimiento es:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

que se determina conociendo A , ω y φ .

Siendo $A = 0,15$ m; para $t = 0$, se tiene:

$$A = A \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = 1$$

de donde $\varphi = \frac{\pi}{2}$ es la fase inicial, y

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{80 \text{ N/m}}{0,075 \text{ kg}}} = 32,66 \text{ rad/s}$$

Luego,

$$x = 0,15 \sin\left(32,66t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m} = 0,15 \cos 32,66t \text{ m}$$

5. Movimiento ondulatorio

Movimiento ondulatorio es cualquier perturbación producida en un punto del espacio que se propaga a través de la materia por ondas mecánicas, como el sonido, oleaje, etc., o en el vacío mediante ondas electromagnéticas (luz, radio, televisión...).

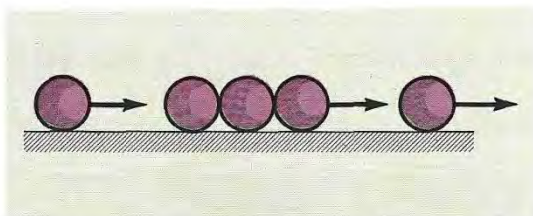


Fig. 8.5. La última bola sale con la misma energía y el mismo momento lineal de la que choca.

En el primer caso, las partículas transmiten una energía y la cantidad de movimiento, sin trasladarse, de modo parecido a como una bola de billar lanzada contra una serie de bolas iguales, en contacto, transmiten ambas magnitudes a la última de la fila (fig. 8.5).

El movimiento ondulatorio es un movimiento periódico que transmite energía sin necesidad de transportar partículas.

En el movimiento ondulatorio hay que diferenciar claramente la propagación de la perturbación y el movimiento de las partículas materiales: la perturbación se propaga con la velocidad de fase, propia del medio, y las partículas vibran en torno a una posición sin trasladarse.

Clases de ondas

Por la forma de transmitirse la perturbación se distinguen dos clases de ondas: longitudinales y transversales.

Ondas longitudinales son las que tienen en la misma dirección el desplazamiento de las partículas y la propagación de la perturbación. Tales son las ondas que se producen en un resorte deformado (fig. 8.6), las ondas sonoras que se propagan en el seno de un gas, o por un tubo (fig. 8.7).

Ondas transversales son las que se propagan perpendicularmente a la vibración de las partículas, como las de una cuerda de guitarra, las ondas superficiales del agua, las ondas electromagnéticas, etc.

Las ondas longitudinales se llaman ondas de presión porque al producirse un sonido, por ejemplo, al vibrar una varilla (diapasón), los átomos se aproximan o se alejan alternativamente de la posición de equilibrio produciendo simultáneamente compresiones ($+\Delta p$) o dilataciones ($-\Delta p$) de las moléculas del aire que rodean la varilla (como se indica en el tubo).

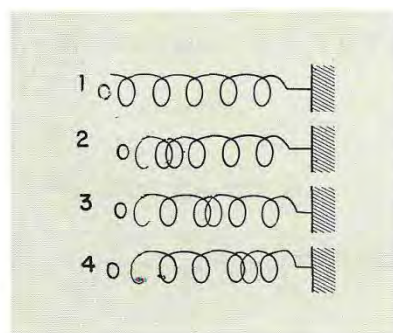


Fig. 8.6. Compresión y dilatación longitudinal en un muelle.

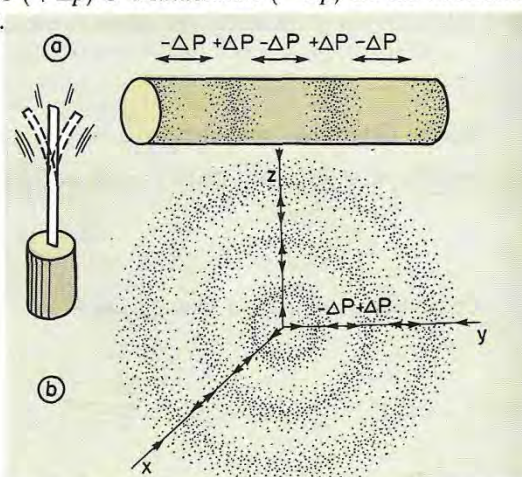


Fig. 8.7. Compresiones ($+\Delta p$) y dilataciones longitudinales ($-\Delta p$) de los gases al propagarse un sonido o perturbación longitudinal.

Cuando el sonido se produce en un centro puntual, un golpe de campana (fig. 8.7b), la perturbación sonora se extiende mediante **ondas esféricas** que producen el sonido al llegar al oído y poner en vibración el tímpano. En medios isótropos, las ondas esféricas se propagan **radialmente** en todas **direcciones** y sus frentes de onda poseen las mismas condiciones de velocidad y energía.

Las ondas electromagnéticas son transversales, pues los campos eléctrico y magnético vibran en planos perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación.

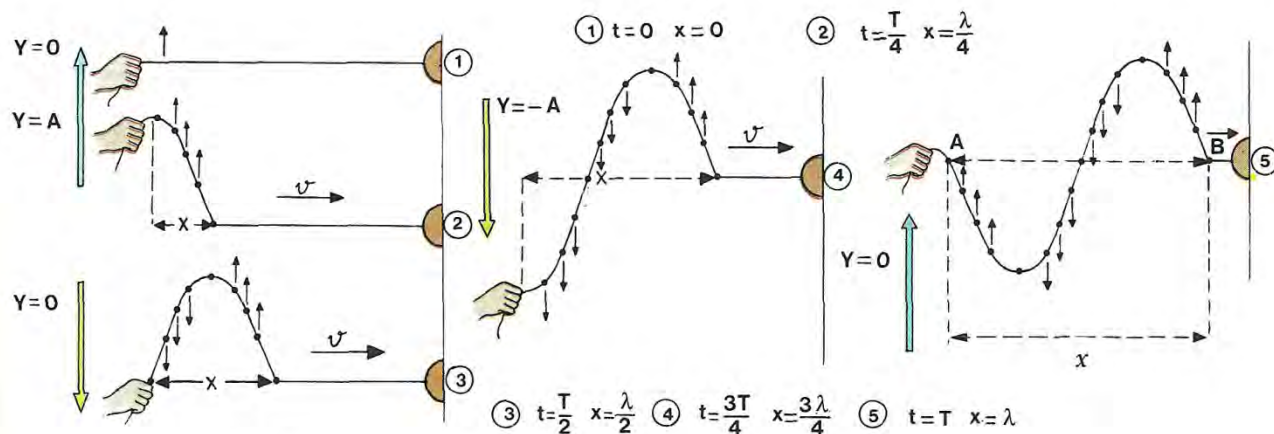


Fig. 8.8. Formación de una onda transversal. El movimiento periódico del extremo libre de la cuerda origina la onda, que se propaga la distancia $x = \lambda$ (longitud de onda) con velocidad v durante T_s (período), mientras la elongación toma los valores comprendidos entre 0 y $\pm A$ (amplitud).

Las ondas transversales mecánicas se propagan sólo por los sólidos (y parcialmente por la superficie de los líquidos debido a la tensión superficial) porque precisan una cierta rigidez en el medio.

Las ondas longitudinales, en cambio, como dependen de la mayor o menor elasticidad del medio, se propagan por los sólidos, líquidos y gases.

6. Ecuación del movimiento ondulatorio unidireccional

En este estudio nos limitaremos a las ondas mecánicas sinusoidales o armónicas que se propagan en una dirección. Son los movimientos ondulatorios armónicos más sencillos; se llaman armónicos por ser funciones sinusoidales del tiempo.

El estado de vibración de un punto cualquiera P en una onda depende de la posición o distancia x de dicho punto al origen del movimiento, y del tiempo t que tarda en llegar al punto P la perturbación; lo que se indica con la expresión: $y(x, t)$.

Estas ondas reciben el nombre de **progresivas** o **viajeras** porque transportan energía y cantidad de movimiento desde el origen a otros puntos, sin transporte de partículas ni materia.

El origen de tales ondas es debido a la **vibración armónica** de un **cuerpo**, y a la **propagación** de la misma sin distorsiones.

En el origen del movimiento la elongación $x = 0$, y la ecuación del movimiento armónico simple que origina la onda es:

$$y(x, t) = A \sin \omega t$$

en la cual ω recibe el nombre de **frecuencia angular** o **pulsación** y se define por las expresiones:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ rad/s} ; \quad \omega = 2\pi f \text{ rad/s}$$

La elongación y de un punto cualquiera de la onda, por ejemplo x (siendo $x > 0$) varía también con el tiempo, por lo que presenta un desfase respecto del origen; de ahí que la ecuación de un punto cualquiera de la onda se exprese:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - \varphi)$$

siendo φ el desfase o retraso de la oscilación en el punto P respecto del origen.

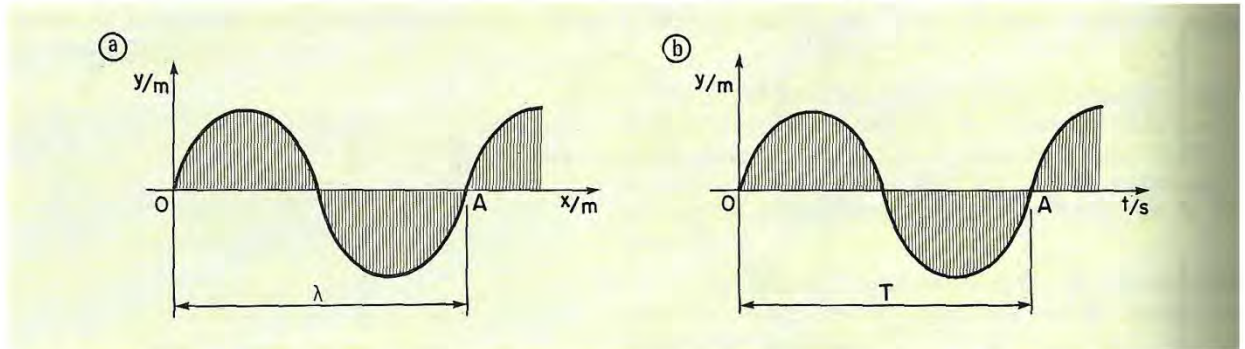


Fig. 8.9. a) $OA =$ longitud de onda (en m).

b) $OA =$ tiempo empleado en recorrer la distancia λ : un período T , en segundos (s).

Como la **velocidad** de propagación de la onda por un medio homogéneo e isotrópico **es constante**, el desfase φ depende de la distancia del punto x al origen; por tanto, $\varphi = kx$.

Sustituyendo en la ecuación anterior resulta:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx)$$

[8.11]

que es la **ecuación** del movimiento **ondulatorio** unidireccional.

La ecuación dada representa una onda que se propaga con velocidad v positiva (según el sentido positivo del eje OX). Si la propagación fuera en sentido negativo (hacia la izquierda del eje OX), tanto la velocidad como los desplazamientos x son negativos con relación al origen y la ecuación del movimiento es:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t + kx)$$

[8.11 bis]

En cualquier caso, cada punto del medio por el que se propaga la onda realiza un m.a.s.

6.1. Características del movimiento ondulatorio

Longitud de onda λ es la distancia que hay entre dos puntos consecutivos de la onda que están en fase, es decir, que tienen la misma velocidad, \vec{v} , aceleración, \vec{a} , y elongación, \vec{y} , por lo que se cumple:

$$k\lambda = 2\pi$$

de donde $k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ m}^{-1}$; k se llama **número de ondas** y representa el número de ondas comprendido en la longitud 2π .

Si se sustituye la frecuencia angular ω y el número de ondas k por sus valores en la ecuación [8.11] se obtiene otra equivalente del movimiento ondulatorio:

$$y(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right)$$

[8.12]

En estas ecuaciones A es la amplitud de la onda y representa la elongación máxima o el mayor desplazamiento respecto del eje de propagación OX .

$2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right)$ es la **fase del movimiento** de la que dependen los valores de la elongación y .

Si se incrementa el tiempo t en un período T , la fase de la onda no cambia, pero la onda avanza una longitud igual a λ ; por tanto,

$$\lambda = v \cdot T \quad ; \quad v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \quad [8.13]$$

v es la velocidad de propagación de la onda y se llama **velocidad de fase**; f es la frecuencia del movimiento y se mide en hertzios, Hz, o ciclos/s.

Multiplicando y dividiendo por 2π la [8.13] se obtiene:

$$v = (2\pi f) \cdot \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right) = \frac{\omega}{k} \text{ (m/s)} \quad [8.14]$$

que relaciona la velocidad de propagación de la onda v con la frecuencia angular o pulsación, ω , y el número de ondas, k .

Ejercicio 5

Una onda transversal se propaga por una cuerda tensa, de ecuación $y(x, t) = 6 \sin(4\pi t + 0,02\pi x)$ cm. Deducir: a) la longitud de onda; b) el período; c) la velocidad de propagación; d) el sentido de la propagación.

SOLUCIÓN

Si comparamos esta ecuación con la del movimiento ondulatorio [8.11] y se identifican términos, $A = 0,06$ m:

a) $k = 0,02\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad \text{de donde } \lambda = 1 \text{ m.}$

b) $\omega = 4\pi = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad T = 0,5 \text{ s.}$

c) Sabemos que $v = \frac{\omega}{k} = \frac{4\pi}{0,02\pi} = \pm 2 \text{ m/s.}$

d) La indeterminación del signo de v se resuelve con el signo de la fase; siendo positivo (+), la velocidad de propagación es negativa, pues la onda avanza en sentido negativo del eje OX ; $v = -2 \text{ m/s.}$

7. Velocidad de propagación de las ondas

La **velocidad de propagación** o de fase de las **ondas mecánicas** depende, exclusivamente, de las **condiciones** que tenga el **medio**, y es **constante** en cada caso.

Cuando el medio es **sólido**, las ondas transversales se propagan con mayor velocidad que las longitudinales.

En este caso, la **velocidad** de las ondas **transversales** depende de la tensión o fuerza que se aplica y de la masa por unidad de longitud de la cuerda: $\mu = m/l$.

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad [8.15]$$

La velocidad de las ondas **longitudinales** en los líquidos depende del **módulo de compresibilidad** K y de la **densidad** del medio:

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad [8.16]$$

La propagación de las ondas longitudinales en los gases se realiza mediante compresiones y dilataciones rápidas sin variación de calor, y se deduce para la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

siendo γ la relación entre los calores específicos de los gases, $\gamma = c_p/c_v$ y ρ la densidad del gas. Sustituyendo p por su equivalente en la ecuación de los gases ideales ($p = mRT/MV = \rho RT/M$), se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_w}} \quad [8.17]$$

donde M es la masa molar molecular (g/mol), T la temperatura kelvin, y R la constante de los gases.

Según esto, en los gases la velocidad depende de la temperatura T y disminuye con la masa molar molecular. Por ejemplo, la velocidad v_0 del sonido en el aire a 0°C o 273 K vale:

$$v_0 = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,31 \cdot 273}{28,88 \cdot 10^{-3}}} = 331 \text{ m/s}$$

donde γ del aire es 1,4 y $R = 8,31 \text{ J/Kmol}$.

Por lo cual se obtiene de las dos últimas expresiones la velocidad del sonido en el aire, en función de la temperatura T :

$$v = v_0 \sqrt{\frac{T}{273}}$$

Ejercicio 6

Dada la onda de ecuación: $y(x, t) = 4 \sin(31,4t + 0,628x)$ en unidades SI; determinar: a) la velocidad y sentido de la propagación; b) el instante en que un punto que dista 5 cm del origen alcanza su velocidad máxima de vibración.

SOLUCIÓN

a) La velocidad de propagación $v = \frac{\lambda}{T}$. Para calcular v deducimos λ y T de la ecuación:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0,628 \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{0,628} \text{ m} ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 31,4 \text{ s}^{-1} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{31,4} \text{ s}$$

De donde,

$$v = \frac{\frac{2\pi}{0,628} \text{ m}}{\frac{2\pi}{31,4} \text{ s}} = \pm 50 \text{ m/s}$$

La indeterminación del signo de v se resuelve en la fase: $(31,4t + 0,628x)$; el signo (+) indica que la velocidad y las posiciones de la onda son negativas; la onda avanza hacia la izquierda y, por tanto, $v = -50 \text{ m/s}$.

b) La velocidad de vibración de un punto de la onda es la variación o derivada de la elongación respecto del tiempo en dicho punto:

$$v = \frac{dy}{dt} = 4 \cdot 31,4 \cos(31,4t + 0,628x) \text{ m/s} = 125,6 \cos[31,4t + 0,628 \cdot (-0,05)] \text{ m/s}$$

El valor máximo corresponde a $\cos(31,4t - 0,0314) = 1$; es decir, $v_{\text{máx}} = 125,6 \text{ m/s}$ y ocurre para los valores de la fase:

$$31,4t - 0,0314 = 2\pi \cdot n ; \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots);$$

Para el primer instante, $n = 0$; $t = 0,001 \text{ s} = 1 \text{ ms}$.

8. Energía de las ondas

Cuando la onda llega a un punto, éste empieza a vibrar y adquiere energía cinética, ya que antes estaba en reposo; y, simultáneamente, para desplazarlo de su posición de equilibrio hay que comunicarle energía potencial. Por tanto, la propagación de la onda lleva consigo un transporte de energía.

Las energías cinética y potencial se transforman una en otra, pero su suma permanece constante, prescindiendo de rozamientos. Por lo que se puede decir:

$$E = E_c + E_p = \text{constante}$$

Cuando $E_p = 0$, entonces $E = E_{c\text{máx}} = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$ y al revés.

En este caso $v_{\text{máx}}$ es la **velocidad de vibración** del punto, no la de propagación de la onda, y se deduce en cada caso hallando el valor de la **derivada** de la **ecuación** de la onda respecto del tiempo:

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Para el valor máximo, $\cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 1$ y entonces $v_{\text{máx}} = A \cdot \frac{2\pi}{T} = A \cdot \omega \text{ m/s}$

y

$$E = E_{c\text{máx}} = \frac{1}{2}m \cdot A^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = 2m\pi^2 f^2 A^2 \quad [8.18]$$

Ecuación que indica que la **energía** de una onda es proporcional al **cuadrado** de la **frecuencia** y de la **amplitud** de la misma.

Así, en las ondas electromagnéticas, las ultravioletas (de $f \cdot 10^{14}$ a $3 \cdot 10^{17}$ Hz) transportan más energía que las de la luz visible (de $f \cdot 10^{14}$ a $8 \cdot 10^{14}$ Hz).

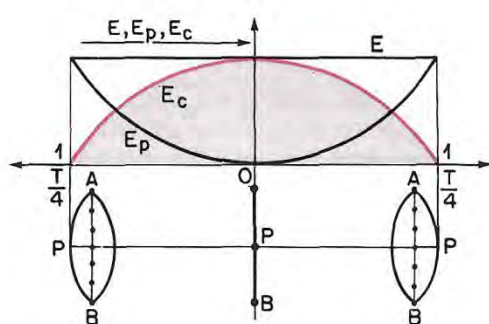
Podemos asimilar, por analogía, la vibración de un punto de la onda a la de un punto material, de un resorte, y obtenemos para energía potencial del mismo:

$$E_p = \int_0^y F dy = \int_0^y ky dy = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}m\omega^2y^2$$

Con lo cual, la energía mecánica en un punto de la onda vale:

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2}m\omega^2y^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad [8.19]$$

siendo m la masa de la partícula.



Todos los puntos del medio que toman parte en la transmisión de la energía oscilan de continuo en torno a la posición de equilibrio; por lo que la energía que posee la unidad de volumen se expresa:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho v_{\text{máx}}^2$$

siendo ρ la densidad del medio y $v_{\text{máx}} = A \cdot \omega$.

Fig. 8.10. La energía total se mantiene constante: $E = E_c + E_p$.

De donde se sigue que la densidad de energía o energía media de una onda que se propaga con velocidad v vale:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 = 2\pi^2 \rho f^2 A^2 \quad [8.20]$$

9. Intensidad del movimiento ondulatorio

La energía de una partícula que vibra armónicamente se propaga con el movimiento ondulatorio. Se llama **intensidad de la onda** I la **energía media que atraviesa por segundo la unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación del movimiento**.

Suponiendo un centro puntual emisor de ondas esféricas en un medio homogéneo, que emite por segundo la energía media P_m (potencia emisora, J/s = W), la intensidad de la onda en un punto que dista R m del centro emisor vale:

$$I = \frac{\bar{E}}{S_n t} = \frac{P_m}{S_n} = \frac{P_m}{4\pi R^2} \quad [8.21]$$

siendo S_n la superficie perpendicular a la dirección de propagación.

Su unidad en el SI es el vatio/m².

Si es v la velocidad de propagación, la onda recorre en un segundo la distancia v y transporta la energía contenida en un cilindro de longitud v y área de la base la unidad; por lo que la energía transportada vale: $\bar{E} \cdot v$, siendo \bar{E} la energía media de la unidad de volumen y el producto $\bar{E} \cdot v$ es la intensidad de la onda, por definición; por tanto,

$$I = \bar{E} \cdot v = \frac{1}{2} \rho v A^2 \omega^2 = 2\pi^2 \rho v f^2 A^2 \quad [8.21 \text{ bis}]$$

La intensidad de la onda tiene el sentido del flujo de energía que pasa por la unidad de superficie cada segundo.

9.1. Variación de la intensidad y la amplitud con la distancia

La energía total que llega en cada segundo a dos puntos distantes R_1 y R_2 del centro emisor de ondas esféricas, en un medio isótropo, se deduce por lo dicho antes:

$$\bar{E}_1 = 4\pi R_1^2 I_1 \quad ; \quad \bar{E}_2 = 4\pi R_2^2 I_2$$

considerando $E_1 = E_2$ se obtiene:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \quad [8.22]$$

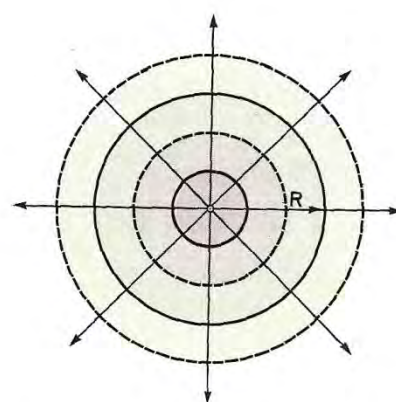


Fig. 8.11. Propagación radial de ondas esféricas.

La energía de una onda de frecuencia f es proporcional al cuadrado de la amplitud; luego la intensidad de la onda cumple igualmente:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

comparada con la anterior, se tiene:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

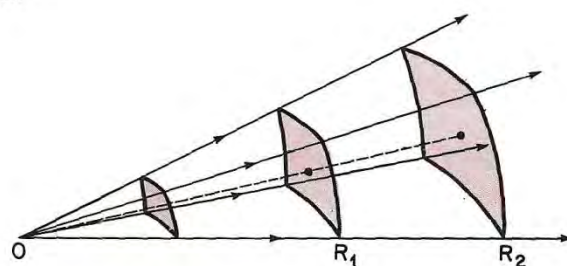


Fig. 8.12. Frentes de onda esférica.

Según esto, la intensidad de una onda esférica disminuye con el cuadrado de la distancia; pero las amplitudes disminuyen con la distancia al centro emisor (no al cuadrado de esa distancia).

Se dice que una onda **no es amortiguada** cuando mantiene constante la amplitud A en todos los puntos, a lo largo de la propagación. Y como la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, la constancia de la amplitud en la propagación supone que la energía se transmite sin pérdida de un punto a otro, es decir, sin amortiguamiento.

Ecuación que indica que la **energía** de una onda es proporcional al **cuadrado** de la **frecuencia** y de la **amplitud** de la misma.

Así, en las ondas electromagnéticas, las ultravioletas (de $f \cdot 10^{14}$ a $3 \cdot 10^{17}$ Hz) transportan más energía que las de la luz visible (de $f \cdot 10^{14}$ a $8 \cdot 10^{14}$ Hz).

Podemos asimilar, por analogía, la vibración de un punto de la onda a la de un punto material, de un resorte, y obtenemos para energía potencial del mismo:

$$E_p = \int_0^y F dy = \int_0^y ky dy = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}m\omega^2y^2$$

Con lo cual, la energía mecánica en un punto de la onda vale:

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2}m\omega^2y^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad [8.19]$$

siendo m la masa de la partícula.

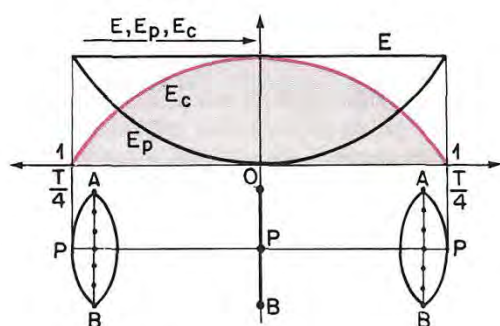


Fig. 8.10. La energía total se mantiene constante: $E = E_c + E_p$.

Todos los puntos del medio que toman parte en la transmisión de la energía oscilan de continuo en torno a la posición de equilibrio; por lo que la energía que posee la unidad de volumen se expresa:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho v_{\text{máx}}^2$$

siendo ρ la densidad del medio y $v_{\text{máx}} = A \cdot \omega$.

De donde se sigue que la densidad de energía o energía media de una onda que se propaga con velocidad v vale:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 = 2\pi^2 \rho f^2 A^2 \quad [8.20]$$

9. Intensidad del movimiento ondulatorio

La energía de una partícula que vibra armónicamente se propaga con el movimiento ondulatorio. Se llama **intensidad de la onda** I la **energía media que atraviesa por segundo la unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación del movimiento**.

Suponiendo un centro puntual emisor de ondas esféricas en un medio homogéneo, que emite por segundo la energía media P_m (potencia emisora, J/s = W), la intensidad de la onda en un punto que dista R m del centro emisor vale:

$$I = \frac{\bar{E}}{S_n t} = \frac{P_m}{S_n} = \frac{P_m}{4\pi R^2} \quad [8.21]$$

siendo S_n la superficie perpendicular a la dirección de propagación.

Su unidad en el SI es el vatio/m².

Si es v la velocidad de propagación, la onda recorre en un segundo la distancia v y transporta la energía contenida en un cilindro de longitud v y área de la base la unidad; por lo que la energía transportada vale: $\bar{E} \cdot v$, siendo \bar{E} la energía media de la unidad de volumen y el producto $\bar{E} \cdot v$ es la intensidad de la onda, por definición; por tanto,

$$I = \bar{E} \cdot v = \frac{1}{2} \rho v A^2 \omega^2 = 2\pi^2 \rho v f^2 A^2 \quad [8.21 \text{ bis}]$$

La intensidad de la onda tiene el sentido del flujo de energía que pasa por la unidad de superficie cada segundo.

9.1. Variación de la intensidad y la amplitud con la distancia

La energía total que llega en cada segundo a dos puntos distantes R_1 y R_2 del centro emisor de ondas esféricas, en un medio isótropo, se deduce por lo dicho antes:

$$\bar{E}_1 = 4\pi R_1^2 I_1 \quad ; \quad \bar{E}_2 = 4\pi R_2^2 I_2$$

considerando $E_1 = E_2$ se obtiene:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \quad [8.22]$$

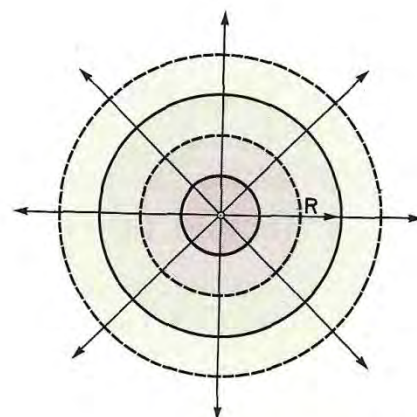


Fig. 8.11. Propagación radial de ondas esféricas.

La energía de una onda de frecuencia f es proporcional al cuadrado de la amplitud; luego la intensidad de la onda cumple igualmente:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

que, comparada con la anterior, se tiene:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

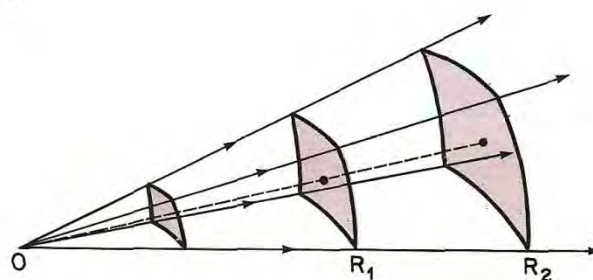


Fig. 8.12. Frentes de onda esférica.

Según esto, la intensidad de una onda esférica disminuye con el cuadrado de la distancia; pero las amplitudes disminuyen con la distancia al centro emisor (no al cuadrado de esa distancia).

Se dice que una onda **no es amortiguada** cuando mantiene constante la amplitud A en todos los puntos, a lo largo de la propagación. Y como la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud, la constancia de la amplitud en la propagación supone que la energía se transmite sin pérdida de un punto a otro, es decir, sin amortiguamiento.

Ejercicio 7

Una onda armónica esférica tiene de intensidad $I = 8 \cdot 10^{-8} \text{ W/cm}^2$ a 10 m del foco emisor. Si se admite que no hay absorción, calcular: a) la energía emitida por el foco en un minuto; b) la amplitud de las oscilaciones a los 20 m, si a los 10 m es de 6 mm.

SOLUCIÓN

- a) Si no hay absorción, la energía transmitida en la unidad de tiempo por la unidad de superficie del frente de onda es constante; por tanto, de la definición de intensidad $= E/S \cdot t$ se deduce:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= I \cdot S \cdot t \Rightarrow \bar{E} = 4\pi R^2 \cdot I \cdot t \\ \bar{E} &= 4\pi(10 \cdot 10^2)^2 \text{ cm}^2 \cdot 8 \cdot 10^{-8} \text{ W/cm}^2 \cdot 60 \text{ s} = 60,3 \text{ J}\end{aligned}$$

- b) La amplitud disminuye con la distancia al foco; por tanto,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow A_2 = A_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} = 6 \text{ mm} \cdot \frac{10 \text{ m}}{20 \text{ m}} = 3 \text{ mm}$$

10. Principio de Huygens

En un medio homogéneo e isótropo, un foco puntual origina ondas que se propagan en todas direcciones y su frente de onda es esférico.

Frente de onda en un instante dado es el lugar geométrico de todos los puntos que tienen el mismo estado de vibración. En la figura 8.12 los frentes de ondas sucesivos son superficies esféricas que, a grandes distancias del centro emisor, los pequeños elementos de superficie se pueden considerar como planos, y las ondas, planas; sus frentes de onda son perpendiculares a la dirección de propagación.

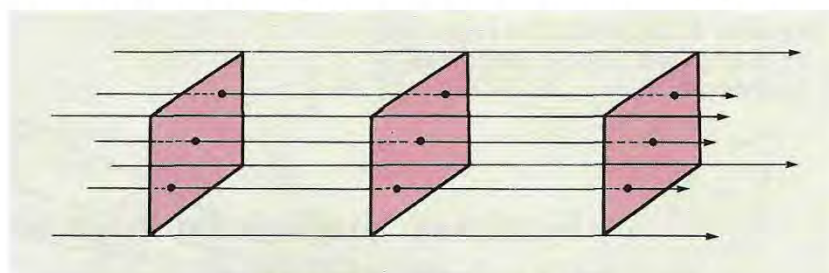


Fig. 8.13. Frentes de onda plana.

Se llama **rayo** a la línea perpendicular a los frentes de onda, e indica la dirección de propagación de las ondas.

Cuando el foco emisor es lineal, como, por ejemplo, una varilla que vibra, la onda producida es cilíndrica y se propaga radialmente; en todo momento, la dirección de propagación es perpendicular al frente de onda (si el medio es homogéneo e isótropo).

Por el principio de Huygens «todo punto de un frente de onda se convierte en centro emisor de ondas elementales o secundarias que se propagan en todo sentido».

Y la amplitud de la onda en un punto del frente de onda se obtiene por superposición de ondas elementales. La posición posterior del frente de onda se puede determinar mediante la envolvente de las ondas elementales originadas en cada punto del anterior, como se observa en la figura 8.14.

El primer frente de onda 1, tiene todos sus puntos en el mismo estado de vibración.

El frente de onda 2 es la envolvente de las ondas elementales producidas en los puntos del primero, y, a su vez, cada punto del 2 origina ondas elementales cuya envolvente constituye el frente de onda 3, y así sucesivamente.

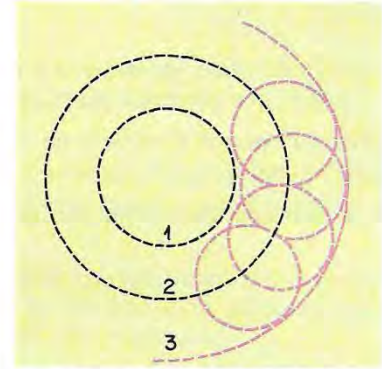


Fig. 8.14. Construcción de frentes de onda según Huygens.

11. Aplicaciones de este principio a la reflexión y refracción de las ondas

Reflexión

Sea una onda plana que se propaga por un medio homogéneo con velocidad v ; dicha onda se refleja en una superficie plana reflectante continuando su propagación por el mismo medio.

El tiempo que emplea el frente de onda en A para llegar a A' es t ; y la distancia $AA' = vt$. En este mismo tiempo, el radio de la onda secundaria de centro B es: $BB' = vt$, y su frente de onda se determina trazando la tangente a esta onda desde el punto A' . De la figura 8.15 se deduce que los ángulos $\varphi = \varphi'$; es decir, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

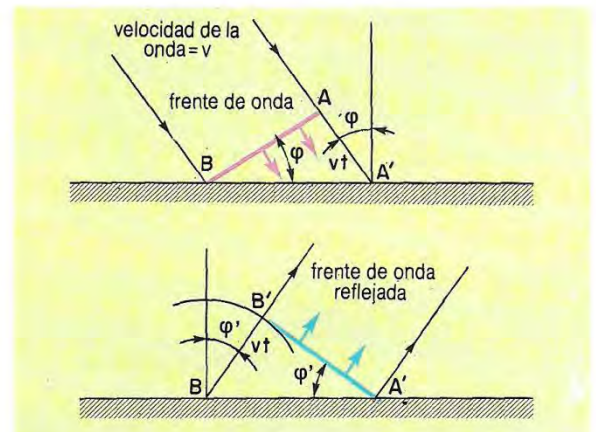


Fig. 8.15. Reflexión de onda plana, según Huygens.

La figura 8.16 muestra la reflexión de una onda esférica en una superficie plana. Las ondas secundarias indican cómo se origina la onda reflejada en la superficie reflectante. En ella se observa que $OC = OC'$, y los centros de emisión (F) y de curvatura de la onda reflejada (F') cumplen: $FO = F'O$.

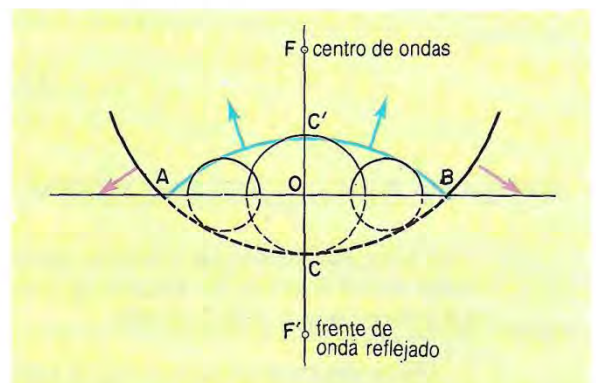


Fig. 8.16. Formación de la imagen en la reflexión, según Huygens.

Ejercicio 7

Una onda armónica esférica tiene de intensidad $I = 8 \cdot 10^{-8} \text{ W/cm}^2$ a 10 m del foco emisor. Si se admite que no hay absorción, calcular: a) la energía emitida por el foco en un minuto; b) la amplitud de las oscilaciones a los 20 m, si a los 10 m es de 6 mm.

SOLUCIÓN

- a) Si no hay absorción, la energía transmitida en la unidad de tiempo por la unidad de superficie del frente de onda es constante; por tanto, de la definición de intensidad $= E/S \cdot t$ se deduce:

$$\bar{E} = I \cdot S \cdot t \Rightarrow \bar{E} = 4\pi R^2 \cdot I \cdot t$$
$$\bar{E} = 4\pi(10 \cdot 10^2)^2 \text{ cm}^2 \cdot 8 \cdot 10^{-8} \text{ W/cm}^2 \cdot 60 \text{ s} = 60,3 \text{ J}$$

- b) La amplitud disminuye con la distancia al foco; por tanto,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow A_2 = A_1 \cdot \frac{R_1}{R_2} = 6 \text{ mm} \cdot \frac{10 \text{ m}}{20 \text{ m}} = 3 \text{ mm}$$

10. Principio de Huygens

En un medio homogéneo e isótropo, un foco puntual origina ondas que se propagan en todas direcciones y su frente de onda es esférico.

Frente de onda en un instante dado es el lugar geométrico de todos los puntos que tienen el mismo estado de vibración. En la figura 8.12 los frentes de ondas sucesivos son superficies esféricas que, a grandes distancias del centro emisor, los pequeños elementos de superficie se pueden considerar como planos, y las ondas, planas; sus frentes de onda son perpendiculares a la dirección de propagación.

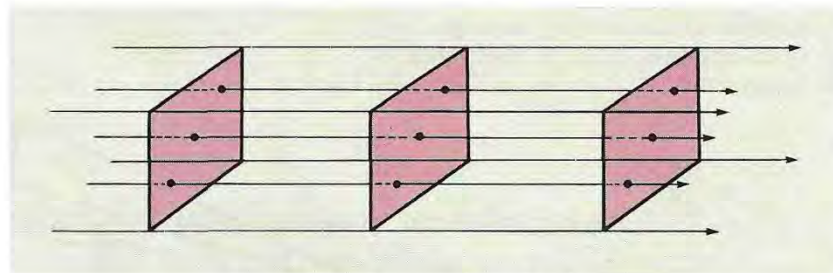


Fig. 8.13. Frentes de onda plana.

Se llama **rayo** a la línea perpendicular a los frentes de onda, e indica la dirección de propagación de las ondas.

Cuando el foco emisor es lineal, como, por ejemplo, una varilla que vibra, la onda producida es cilíndrica y se propaga radialmente; en todo momento, la dirección de propagación es perpendicular al frente de onda (si el medio es homogéneo e isótropo).

Por el principio de Huygens «todo punto de un frente de onda se convierte en centro emisor de ondas elementales o secundarias que se propagan en todo sentido».

Y la amplitud de la onda en un punto del frente de onda se obtiene por superposición de ondas elementales. La posición posterior del frente de onda se puede determinar mediante la envolvente de las ondas elementales originadas en cada punto del anterior, como se observa en la figura 8.14.

El primer frente de onda 1, tiene todos sus puntos en el mismo estado de vibración.

El frente de onda 2 es la envolvente de las ondas elementales producidas en los puntos del primero, y, a su vez, cada punto del 2 origina ondas elementales cuya envolvente constituye el frente de onda 3, y así sucesivamente.

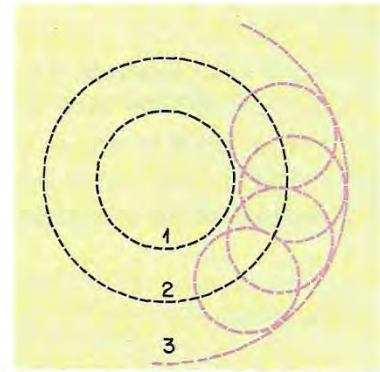


Fig. 8.14. Construcción de frentes de onda según Huygens.

11. Aplicaciones de este principio a la reflexión y refracción de las ondas

Reflexión

Sea una onda plana que se propaga por un medio homogéneo con velocidad v ; dicha onda se refleja en una superficie plana reflectante continuando su propagación por el mismo medio.

El tiempo que emplea el frente de onda en A para llegar a A' es t ; y la distancia $AA' = vt$. En este mismo tiempo, el radio de la onda secundaria de centro B es: $BB' = vt$, y su frente de onda se determina trazando la tangente a esta onda desde el punto A' . De la figura 8.15 se deduce que los ángulos $\varphi = \varphi'$; es decir, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

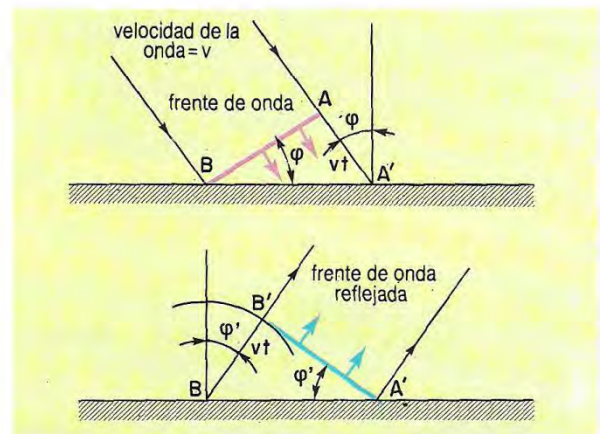


Fig. 8.15. Reflexión de onda plana, según Huygens.

La figura 8.16 muestra la reflexión de una onda esférica en una superficie plana. Las ondas secundarias indican cómo se origina la onda reflejada en la superficie reflectante. En ella se observa que $OC = OC'$, y los centros de emisión (F) y de curvatura de la onda reflejada (F') cumplen: $FO = F'O$.

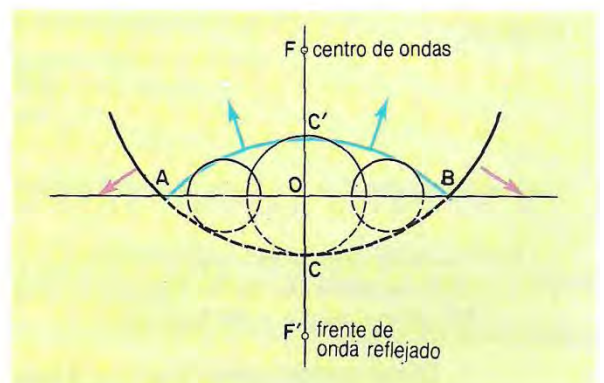


Fig. 8.16. Formación de la imagen en la reflexión, según Huygens.

Refracción

Un frente de onda incidente AB se propaga por el medio 1 con la velocidad v_1 ; pasando después al medio 2 por el que prosigue propagándose con velocidad v_2 ; suponemos que $v_1 > v_2$.

Mientras el punto B recorre en el medio 2 la distancia $BB' = v_2 t$, el punto A de la onda incidente recorre en el medio 1: $AA' = v_1 t$.

Por división de ambas igualdades se obtiene:

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{v_1 t}{v_2 t} = \frac{v_1}{v_2}$$

De la figura se deduce también:

$$\sin \varphi_1 = \frac{AA'}{BA'} ; \quad \sin \varphi_2 = \frac{BB'}{BA'}$$

siendo φ_1 el ángulo de incidencia y φ_2 , el de refracción.

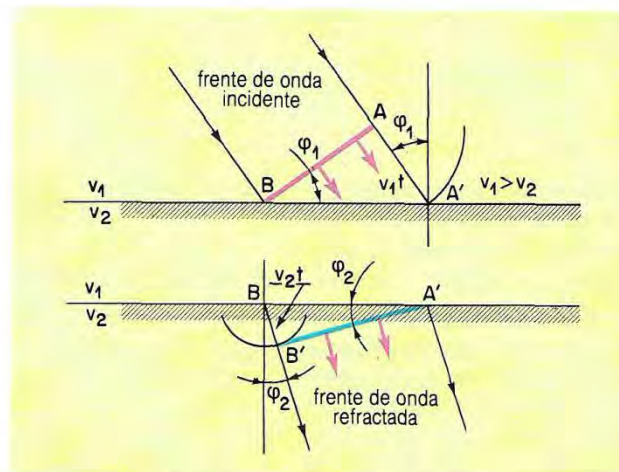


Fig. 8.17. Refracción de onda plana, según Huygens.

Por división de las últimas ecuaciones resulta:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{v_1}{v_2}$$

de donde

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{v_1}{v_2} = n$$

ecuación que expresa las leyes de la refracción:

1. Una onda que incide oblicuamente sobre una superficie plana que separa dos medios se refracta, y la razón de los senos de los ángulos de incidencia y de refracción es igual al cociente de las velocidades del primer medio y del segundo.

Dicho cociente mide también el índice de refracción n del segundo medio respecto del primero.

2. Los ángulos de incidencia φ_1 y de refracción φ_2 son coplanarios.

12. Principio de superposición

Se comprueba experimentalmente que **cuando se cruzan dos ondas**, por ejemplo, en la superficie tranquila del agua, **cada onda conserva** después de cruzarse la **misma forma**, e **igual energía** y cantidad de movimiento que antes del encuentro.

De este hecho se deduce que **no hay interacciones** en las ondas cuando se cruzan o encuentran. Esto justifica que dos personas puedan entenderse cuando hablan en un sitio con ruidos y que se puedan distinguir las diferentes voces de una coral o los instrumentos de una orquesta.

Cuando dos ondas se superponen se cumple el llamado **principio de superposición**:

«El movimiento resultante en un punto y en un instante dados, producido por dos ondas viajeras que se desplazan por el mismo medio, es un vector suma de los desplazamientos que hubiera tenido cada onda de haberse propagado aisladamente»; y se expresa:

$$\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$$

Esto podría compararse con la superposición de fuerzas que actúan sobre un punto material; pero no con el choque entre dos partículas, pues en este caso varían sus velocidades.

El principio de superposición se aplica tanto a las ondas electromagnéticas como a las mecánicas, cuyas ecuaciones son lineales. No lo cumplen, por ejemplo, las explosiones violentas cuyas ondas de choque tienen ecuaciones cuadráticas.

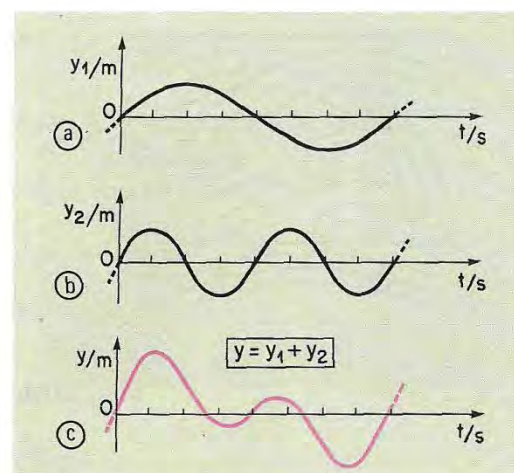


Fig. 8.18. Ejemplo de superposición de ondas: (c) = (a) + (b).

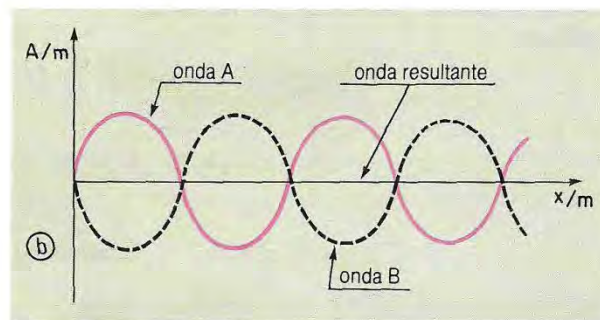
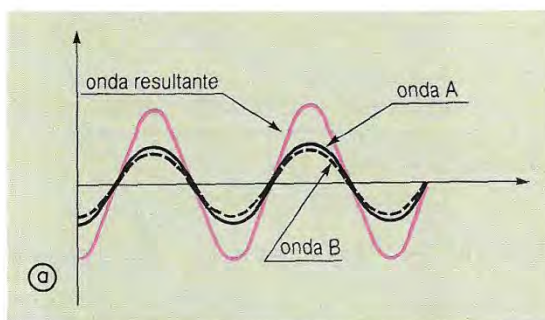


Fig. 8.19. Diagrama de superposición de ondas transversales: a) en concordancia de fase; b) en oposición.

Entre los fenómenos físicos en los que interviene el principio de superposición citamos:

- Las **interferencias** producidas entre ondas de igual frecuencia que proceden del mismo foco.
- Las **ondas estacionarias** originadas por dos ondas de igual frecuencia y amplitud que se propagan con la misma velocidad en sentidos contrarios.
- Las **pulsaciones** originadas por dos ondas de frecuencias casi iguales que se propagan en el mismo medio con la misma velocidad.
- La **difracción** originada por ondas secundarias procedentes de puntos coherentes del mismo frente de onda.

Estudiemos brevemente estos procesos.

13. Interferencias

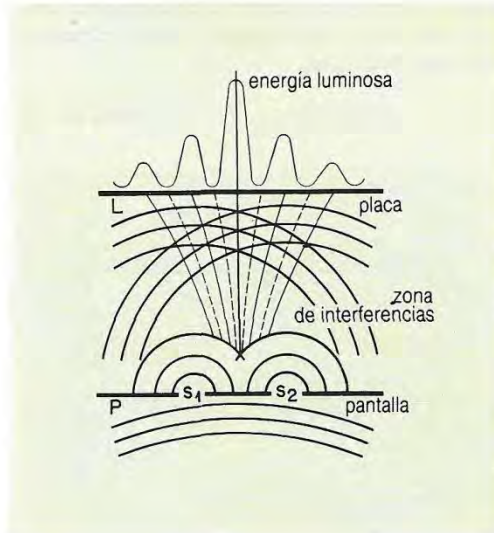


Fig. 8.20. Al interferir dos ondas de frecuencia f procedentes de dos focos coherentes s_1 y s_2 , se forman puntos de amplitud mínima (las líneas de puntos de la figura) y puntos de máxima amplitud (indicados por las líneas continuas).

El término **interferencia** se refiere a los efectos físicos de la **superposición de dos o más ondas**. Aquí lo vamos a estudiar para dos ondas de igual **frecuencia**.

Cuando dos ondas de igual frecuencia procedentes de un foco coherente se cruzan o interfieren en un punto, el movimiento resultante puede **reforzarse o anularse**.

El fenómeno de las interferencias es uno de los que caracterizan el movimiento ondulatorio.

Sean dos centros F_1 y F_2 que originan sendas ondas de la misma frecuencia (o período) de ecuaciones:

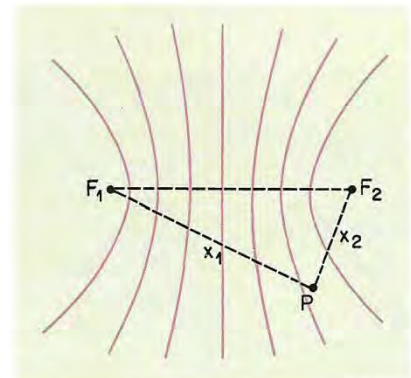
$$y_1 = A_1 \sin(\omega t - kx_1) \quad , \quad y_2 = A_2 \sin(\omega t - kx_2)$$

x_1 y x_2 son las distancias de los focos a un punto P del medio por el que se propagan.

Por el principio de superposición, la función de onda del movimiento resultante en el punto P es:

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin(\omega t - kx_1) + A_2 \sin(\omega t - kx_2)$$

que desarrollamos:



$$y = A_1 \sin \omega t \cos kx_1 - A_1 \cos \omega t \sin kx_1 + A_2 \sin \omega t \cos kx_2 - A_2 \cos \omega t \sin kx_2$$

de donde,

$$y = \sin \omega t (A_1 \cos kx_1 + A_2 \cos kx_2) - \cos \omega t (A_1 \sin kx_1 + A_2 \sin kx_2)$$

Hacemos la sustitución:

$$\left. \begin{aligned} A \sin \varphi &= A_1 \sin kx_1 + A_2 \sin kx_2 \\ A \cos \varphi &= A_1 \cos kx_1 + A_2 \cos kx_2 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

y resulta para la ecuación del movimiento ondulatorio en el punto P :

$$y = A \sin \omega t \cos \varphi - A \cos \omega t \sin \varphi = A \sin(\omega t - \varphi)$$

que también se puede poner:

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi\right) \quad [8.23]$$

El **período** y la **frecuencia** del **movimiento resultante** son los **mismos que los de las ondas componentes**, diferenciándose de ellas en la **amplitud**, A , y en la fase φ .

Una y otra se pueden determinar a partir de las ecuaciones (a). Por división, resulta:

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin kx_1 + A_2 \sin kx_2}{A_1 \cos kx_1 + A_2 \cos kx_2}$$

de donde se obtiene la fase φ en función de x_1 y x_2 , pues $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ es conocida.

La amplitud A se obtiene elevando al cuadrado las ecuaciones (a) y sumando el resultado:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 (\sin kx_1 \sin kx_2 + \cos kx_1 \cos kx_2)$$

es decir,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos k(x_1 - x_2)$$

La amplitud A será máxima cuando $\cos k(x_1 - x_2) = 1$, es decir, para

$$2\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda} = 2n\pi$$

pues $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, de donde $x_1 - x_2 = n \cdot \lambda$ [8.24]

Con lo cual se obtiene en esos puntos:

$$A^2 = (A_1 + A_2)^2 \quad ; \quad A = A_1 + A_2$$

Cuando $A_1 = A_2$, la amplitud $A = 2A_1 = 2A_2$ se duplica.

Se dice en este caso que la interferencia es **constructiva**, ya que las amplitudes se suman.

En las **interferencias** existe un **máximo de amplitud** cuando las diferencias de las distancias de los focos F_1 y F_2 al punto P son múltiplos de la longitud de onda λ . Se dice en este caso, que las ondas interfieren en **concordancia de fase** (fig. 8.21).

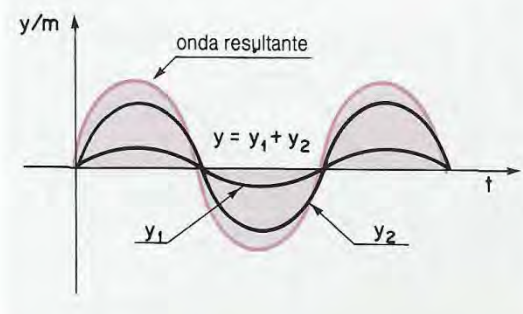


Fig. 8.21. Interferencia constructiva: las ondas interfieren en concordancia de fase.

Y la amplitud es mínima cuando

$$\cos k(x_1 - x_2) = -1$$

es decir,

$$2\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda} = (2n + 1)\pi$$

de donde,

$$x_1 - x_2 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2} \quad [8.25]$$

Con lo cual,

$$A^2 = (A_1 - A_2)^2 \quad ; \quad A = A_1 - A_2$$

La interferencia en este caso se llama **destructiva** porque las amplitudes se **restan**; A se hace nula si $A_1 = A_2$.

Existe un **mínimo en las interferencias cuando la diferencia de las distancias de los focos al punto de interferencia P es un múltiplo impar de semilongitud de onda**. Las ondas interfieren en este caso en **oposición de fase** (fig. 8.22).

Son un ejemplo de interferencias, los colores que aparecen en las manchas de gasolina en la carretera, sobre suelo mojado, o en las pompas de jabón, en el nácar, etc., debido a que interfieren algunas radiaciones de luz que se reflejan ya en la primera capa, ya en la segunda: como el espesor de las capas varía de unos puntos a otros también varían los colores suprimidos, y por eso se perciben colores diferentes.

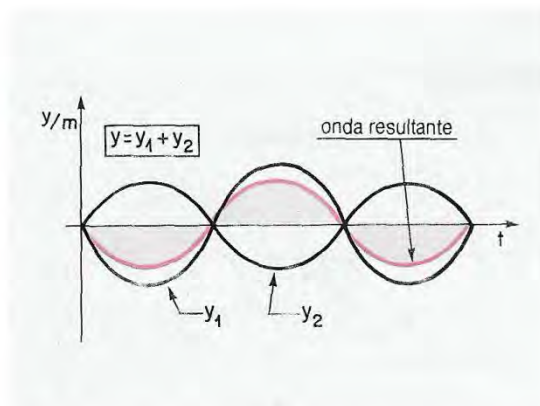


Fig. 8.22. Interferencia destructiva: las ondas interfieren en oposición de fase.

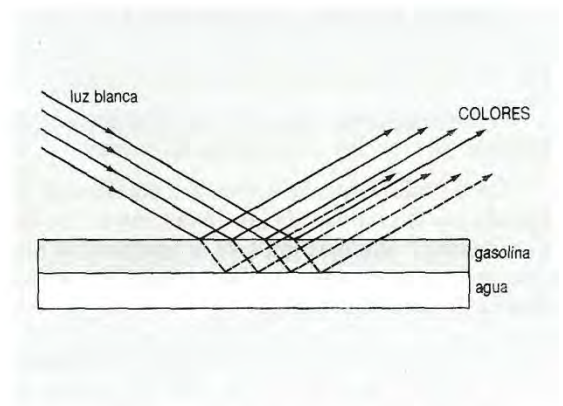


Fig. 8.23. Colores producidos por interferencias en películas delgadas de gasolina.

Ejercicio 8

De un foco puntual parte una onda que se propaga según el eje OX hacia la derecha, de amplitud 2 m, frecuencia angular $\omega = \frac{\pi}{3}$ rad/s y longitud de onda 36 m. Si se propaga por un medio de densidad $1\,000\text{ kg/m}^3$ (agua) determinar: a) la ecuación de la onda; b) su intensidad; c) la elongación y velocidad de vibración de un punto distante $x = 24\text{ m}$ del origen en el instante $t = 4\text{ s}$.

SOLUCIÓN

a) La ecuación del movimiento ondulatorio es:

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

De los datos se deduce:

$$A = 2\text{ m} \quad ; \quad \lambda = 36\text{ m} \quad \text{y} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 6\text{ s}$$

por tanto,

$$y = 2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{6} - \frac{x}{36} \right) \text{ m}$$

y su velocidad de propagación vale

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{36\text{ m}}{6\text{ s}} = 6\text{ m/s}$$

b) La intensidad de la onda es:

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,000\text{ kg/m}^3 \cdot 6\text{ m/s} \cdot \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \cdot 4\text{ m}^2 = 13\,160\text{ W/m}^2$$

c) La elongación del punto se obtiene por sustitución en la ecuación de la onda:

$$y = 2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{6} - \frac{x}{36} \right) \text{ m}$$

$$\text{para } t = 4\text{ s y } x = 24\text{ m, } y = 2 \sin 2\pi \left(\frac{4}{6} - \frac{24}{36} \right) = 2 \sin 2\pi \cdot 0 = 0$$

$$\text{La velocidad de vibración del punto es: } v = \frac{dy}{dt} = 2 \cdot \frac{2\pi}{6} \cos 2\pi \left(\frac{t}{6} - \frac{x}{36} \right) \text{ m/s}$$

$$\text{para } t = 4\text{ s y } x = 24\text{ m, } v = \frac{2\pi}{3} \cdot 1\text{ m/s} = 2,1\text{ m/s (valor máximo)}$$

Hay que distinguir la velocidad de propagación de la onda (movimiento uniforme: $v = \lambda/T = \text{constante}$) de la velocidad de vibración de cada partícula del medio (que realiza un m.a.s.).

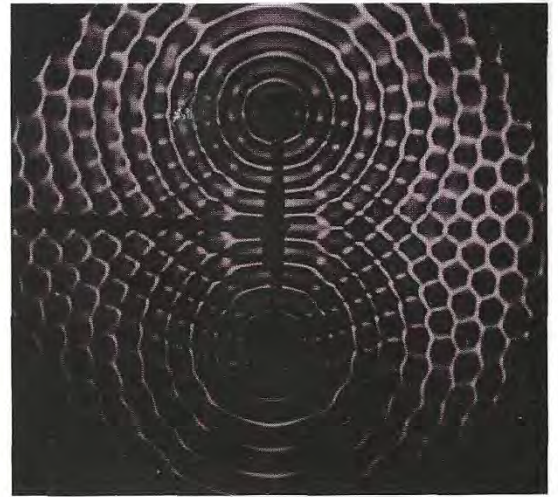
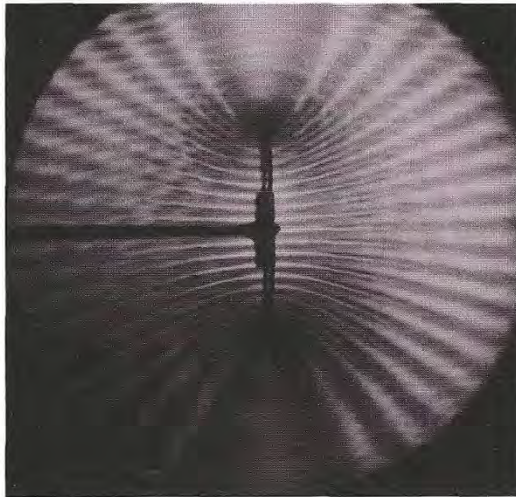


Fig. 8.24. Interferencias de ondas circulares en el agua.

14. Ondas estacionarias

Las ondas estacionarias se originan al superponerse dos ondas de la misma frecuencia y amplitud que se propagan con igual velocidad, pero en sentido contrario.

Es un caso particular de interferencias y se forman, por ejemplo, en las cuerdas del piano o el violín, en los tubos sonoros..., y van asociadas a los electrones en sus desplazamientos alrededor del núcleo.

Distinguimos dos casos:

- a) Sean dos ondas que interfieren en una cuerda con un extremo fijo (fig. 8.25):

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + kx) - A \sin(\omega t - kx)$$

El signo menos (−) se debe a que la onda reflejada experimenta un desfase de π radianes, y la amplitud cambia de signo.

Aplicando la ecuación trigonométrica: $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

se obtiene: $y = 2A \sin kx \cos \omega t$, o su igual, $y = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T}$ [8.26]

- b) Cuando se superponen las ondas dadas, sin extremo fijo, se obtiene para la onda estacionaria otra ecuación análoga:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= A \sin(\omega t + kx) + A \sin(\omega t - kx) = \\ &= 2A \cos kx \sin \omega t \end{aligned} \quad [8.26']$$

$$\left(\text{Recordando: } \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \right)$$

De estas ecuaciones, [8.26] y [8.26'], se deduce:

- ① La **frecuencia** angular de las ondas estacionarias es la misma que la de las ondas componentes:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

- ② La **amplitud resultante** varía con la posición x del punto:

$$\text{caso a) } A_r = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \quad ; \quad \text{caso b) } A_r = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

- ③ En los **nodos**, $A_r = 0$, y esto ocurre:

a) Cuando $\sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$, es decir, para $\frac{2\pi x}{\lambda} = n\pi$; de donde $x = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

b) Cuando $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$, para $\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$; de donde $x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$

la distancia entre dos nodos vale: $\frac{\lambda}{2}$ (fig. 8.25) y se comprueba dando a n dos valores consecutivos y restando los resultados.

Como en el extremo $x = L$ hay un nodo, si está fijo, se cumple: $L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$ [8.27]

luego son posibles ondas estacionarias en una cuerda con extremos fijos cuando la longitud de onda cumple la [8.27].

- ④ En los **antinodos** o **vientres**, la amplitud A_r es máxima y vale $A_r = \pm 2A$; lo cual ocurre:

a) Cuando $\sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$; es decir, para $\frac{2\pi x}{\lambda} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$ (el extremo está fijo), de donde:

$$x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

b) Cuando $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1$, para $2\pi \frac{x}{\lambda} = n\pi \Rightarrow x = n \frac{\lambda}{2}$

la distancia entre dos antinodos es $\frac{\lambda}{2}$ (fig. 8.26).

Para comprobarlo, basta sustituir n por dos valores consecutivos y restar.

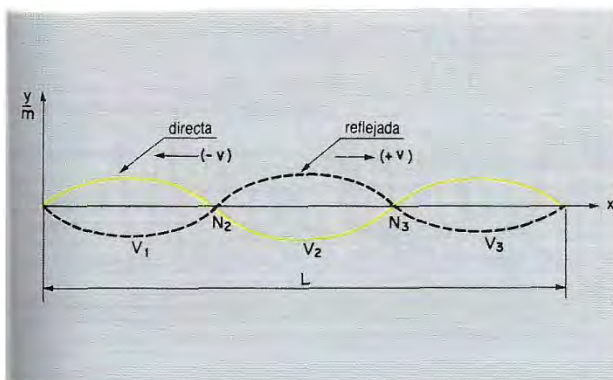


Fig. 8.25. Ondas estacionarias.

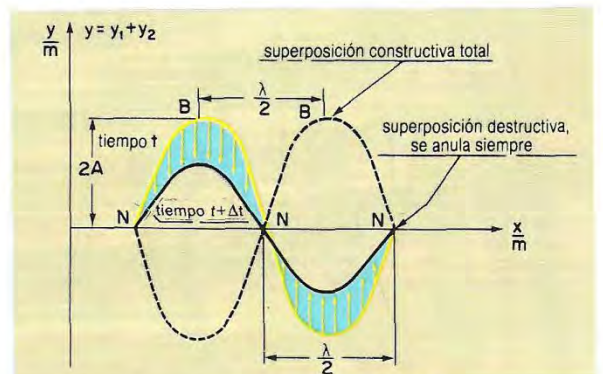


Fig. 8.26. Onda estacionaria dibujada en el tiempo t y en el $t + \Delta t$.

Al superponerse estas ondas (a) hay puntos en los cuales las elongaciones se suman y en otros se restan, porque sus centros de emisión no son coherentes. La elongación resultante y , en función del tiempo, para un valor dado de x , se deduce de la superposición de las dos ondas:

$$y_1 = A \sin 2\pi f_1 t \quad ; \quad y_2 = A \sin 2\pi f_2 t$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \cdot \sin 2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) t$$

Según esto, la frecuencia de la amplitud es $\frac{f_1 - f_2}{2}$, de pequeño valor (por eso sus máximos están distanciados) mientras que la frecuencia de los desplazamientos o elongaciones en el tiempo es grande:

$$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

y su envolvente es la amplitud de la resultante. El resultado es una onda de **amplitud modulada** (b).

La **frecuencia** de la **pulsación** es el **número de veces que la amplitud alcanza su valor máximo en cada segundo**, y vale:

$$f_p = f_1 - f_2$$

pues, si en el período de la pulsación T la onda f_1 completa un período más que la onda f_2 , los ciclos completos que dan en cada segundo son, respectivamente, $f_1 T$ y $f_2 T$; por tanto, $f_1 T - f_2 T = 1$

de donde

$$f_p = \frac{1}{T} = f_1 - f_2$$

En el osciloscopio se pueden observar con mucha facilidad las pulsaciones de las ondas sonoras. Basta conectar la salida de altavoces de un amplificador a los bornes x y «tierra» del osciloscopio y se hacen vibrar dos diapasones de frecuencias parecidas —o, simplemente, silbar delante del micrófono— y se observan claramente las ondas pulsantes que se originan, con los máximos muy bien resaltados (fig. 8.28).

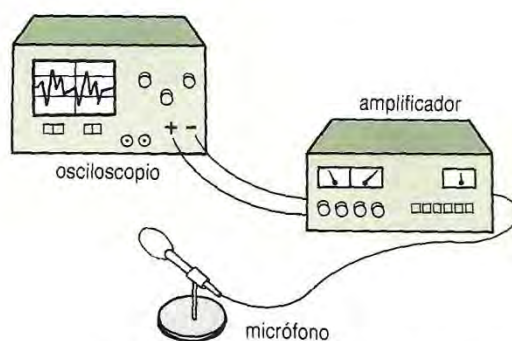


Fig. 8.28. Pulsaciones producidas en osciloscopio.

16. Difracción

Se entiende por **difracción** el **cambio de dirección que experimenta una onda en su propagación, en virtud de la cual la onda bordea los obstáculos o atraviesa pequeñas ranuras**.

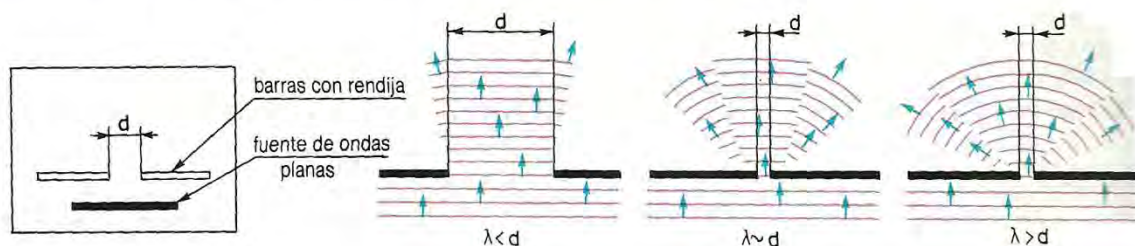


Fig. 8.29. Cubeta de ondas para experimentar la difracción.

«Sombras» claras: las ondas curvan a distancia.

Ligero doblamiento de las ondas.

Doblamiento apreciable de las ondas.

Las ondas planas producidas delante de la rendija d , se difractan al atravesarla. Para observar la difracción se puede variar la anchura de la rendija d , acercando o alejando las barras que la forman (en la cubeta de ondas) manteniendo constante la longitud de onda λ ; o bien, variar ésta, con la rendija d constante.

En cualquier caso, se observa que la difracción se aprecia mejor cuando la longitud de onda λ es mayor que la anchura de la rendija d . Si d es muy pequeña, respecto de λ , las ondas secundarias que aparecen en la rendija son semicircunferencias (con el centro en la rendija).

Hay dos casos extremos: si el objeto que está delante de la onda es mucho mayor que la longitud de onda λ , detrás del objeto aparecen «sombras», es decir, no hay perturbación; las ondas se curvan en torno a los recodos del obstáculo.

Si el objeto es mucho menor que la longitud de onda λ , la difracción permite reconstruir el frente de onda detrás del objeto; éste actúa como un nuevo centro emisor de ondas secundarias.

La difracción de la luz resulta de la superposición de ondas luminosas procedentes de focos coherentes, con un mismo frente de onda, después de ser distorsionado el frente de onda por algún objeto, como lentes delgadas, espejos, rendijas estrechas, etc.

La difracción seguida de interferencias producidas por dos rendijas, constituye el **experimento de Young**.

En F_1 y F_2 se producen difracciones de luz procedentes de un foco F . Las ondas secundarias que salen de F_1 y F_2 interfieren y se recogen en una pantalla. El punto P de la pantalla dista y del centro, y su distancia a la red de difracción es d ; la separación entre las rendijas es a .

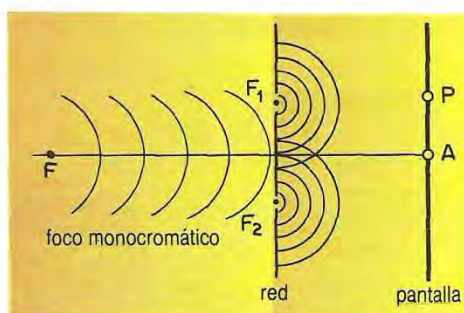


Fig. 8.30. Difracción de luz coherente.

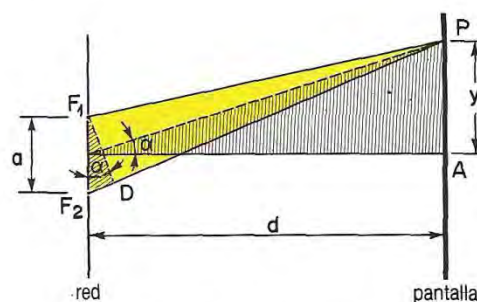


Fig. 8.31. Interferencias en la pantalla de ondas difractadas en F_1 y F_2 .

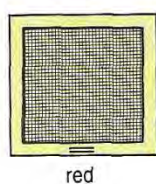
La interferencia en el punto P de las ondas procedentes de F_1 y F_2 depende de la diferencia de caminos: $F_2P - F_1P$. En la figura

$$F_2P - F_1P = F_2D = a \sin \alpha \approx a \tan \alpha \approx a \cdot \frac{y}{d} \quad (\text{para } \alpha < 0,1 \text{ rad})$$

Si esta diferencia: $a \cdot \frac{y}{d} = n\lambda$, en el punto P hay luz (máximo); y si $a \cdot \frac{y}{d} = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$, en P hay oscuridad (mínimo).

Como y y d son conocidos y a es una constante de las rendijas, se puede hallar la longitud de onda; o bien calcular a si se conoce la longitud de onda empleada λ .

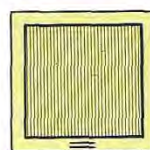
Si se observa un foco luminoso lejano a través de una tela de visillos, se ve una especie de cruz luminosa formada por difracción e interferencias de la luz al pasar por los orificios de la trama. Si a dicha tela se le quita una de las dos series de hilos paralelos, se ve el foco alargado en dirección perpendicular a los hilos. Al girar estos dispositivos llamados **redes** de difracción, la figura luminosa también gira.



red



figura de difracción



red



figura de difracción

Fig. 8.32. Difracción de la luz en «redes» ópticas.

17. Absorción de las ondas

Al incidir una onda sobre una sustancia, su energía puede ser **reflejada** total o parcialmente, **absorbida** y **transmitida** (refractada), sean ondas mecánicas (como el sonido), sean electromagnéticas (como la luz, los rayos X, etc.).

Se entiende por **absorción** la **disminución de intensidad I que experimenta una onda al atravesar un medio transparente** (para dicha onda).

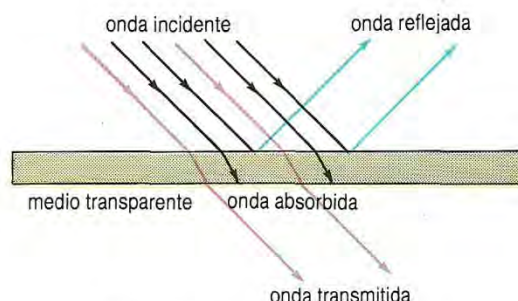


Fig. 8.33. Reflexión, absorción y refracción de ondas.

Si nos limitamos a considerar la absorción de ondas en puntos muy alejados del origen, sus frentes de onda se pueden considerar como planos. La intensidad en estos casos, disminuye de acuerdo con la relación:

$$dI = -\alpha I dx$$

siendo dx el espesor elemental del medio que se considera.

El signo menos ($-$) indica que la disminución de I aumenta con el espesor.

Según esto, **la absorción o debilitamiento de una onda es proporcional a la intensidad de la onda incidente y al espesor del medio que atraviesa**. Alfa (α) es el coeficiente de absorción, y se define por la expresión:

$$\alpha = -\frac{dI}{I dx}$$

es decir, **el coeficiente de absorción es la disminución relativa de la intensidad de la onda por unidad de longitud que recorre en el medio que atraviesa**.

Su unidad en el SI es m^{-1} .

De la ecuación de definición de la absorción se deduce, para la disminución de intensidad relativa:

$$\frac{dI}{I} = -\alpha dx$$

cuya integración da: $\ln I/I_0 = -\alpha x$; que, pasando a los números, resulta:

$$I = I_0 e^{-\alpha x} \quad [8.28]$$

según lo cual, **la intensidad de una onda que atraviesa un medio de espesor x depende de la intensidad I_0 de la onda incidente, del espesor atravesado x y del coeficiente de absorción**.

Se conoce como ley de Beer-Lambert.

Según esto, la intensidad de la onda disminuye con la distancia, así como su amplitud, pero la frecuencia no cambia.

El fenómeno de la absorción tiene aplicación en la sonorización de salas de conferencias, espectáculos, etc., así como en el reconocimiento de grupos atómicos y enlaces porque cada uno de ellos tiene un máximo de absorción para un «número de onda» característico. Por ejemplo, el grupo de los fenoles $-\text{OH}$ presenta un máximo de absorción para $3\,000\text{ cm}^{-1}$ (en el infrarrojo).

Las ondas planas producidas delante de la rendija d , se difractan al atravesarla. Para observar la difracción se puede variar la anchura de la rendija d , acercando o alejando las barras que la forman (en la cubeta de ondas) manteniendo constante la longitud de onda λ ; o bien, variar ésta, con la rendija d constante.

En cualquier caso, se observa que la difracción se aprecia mejor cuando la longitud de onda λ es mayor que la anchura de la rendija d . Si d es muy pequeña, respecto de λ , las ondas secundarias que aparecen en la rendija son semicircunferencias (con el centro en la rendija).

Hay dos casos extremos: si el objeto que está delante de la onda es mucho mayor que la longitud de onda λ , detrás del objeto aparecen «sombras», es decir, no hay perturbación; las ondas se curvan en torno a los recodos del obstáculo.

Si el objeto es mucho menor que la longitud de onda λ , la difracción permite reconstruir el frente de onda detrás del objeto; éste actúa como un nuevo centro emisor de ondas secundarias.

La difracción de la luz resulta de la superposición de ondas luminosas procedentes de focos coherentes, con un mismo frente de onda, después de ser distorsionado el frente de onda por algún objeto, como lentes delgadas, espejos, rendijas estrechas, etc.

La difracción seguida de interferencias producidas por dos rendijas, constituye el **experimento de Young**.

En F_1 y F_2 se producen difracciones de luz procedentes de un foco F . Las ondas secundarias que salen de F_1 y F_2 interfieren y se recogen en una pantalla. El punto P de la pantalla dista y del centro, y su distancia a la red de difracción es d ; la separación entre las rendijas es a .

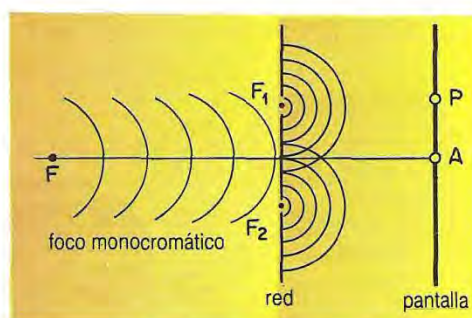


Fig. 8.30. Difracción de luz coherente.

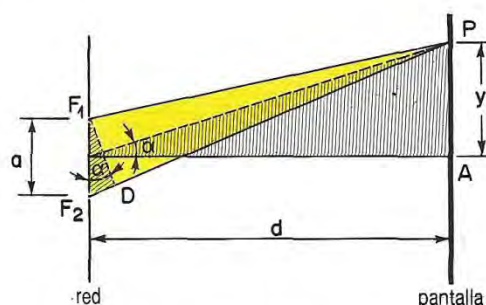


Fig. 8.31. Interferencias en la pantalla de ondas difractadas en F_1 y F_2 .

La interferencia en el punto P de las ondas procedentes de F_1 y F_2 depende de la diferencia de caminos: $F_2P - F_1P$. En la figura

$$F_2P - F_1P = F_2D = a \sin \alpha \approx a \tan \alpha \approx a \cdot \frac{y}{d} \quad (\text{para } \alpha < 0,1 \text{ rad})$$

Si esta diferencia: $a \cdot \frac{y}{d} = n\lambda$, en el punto P hay luz (máximo); y si $a \cdot \frac{y}{d} = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$, en P hay oscuridad (mínimo).

Como y y d son conocidos y a es una constante de las rendijas, se puede hallar la longitud de onda; o bien calcular a si se conoce la longitud de onda empleada λ .

Si se observa un foco luminoso lejano a través de una tela de visillos, se ve una especie de cruz luminosa formada por difracción e interferencias de la luz al pasar por los orificios de la trama. Si a dicha tela se le quita una de las dos series de hilos paralelos, se ve el foco alargado en dirección perpendicular a los hilos. Al girar estos dispositivos llamados **redes** de difracción, la figura luminosa también gira.



Fig. 8.32. Difracción de la luz en «redes» ópticas.

17. Absorción de las ondas

Al incidir una onda sobre una sustancia, su energía puede ser **reflejada** total o parcialmente, **absorbida** y **transmitida** (refractada), sean ondas mecánicas (como el sonido), sean electromagnéticas (como la luz, los rayos X, etc.).

Se entiende por **absorción** la **disminución de intensidad I que experimenta una onda al atravesar un medio transparente** (para dicha onda).

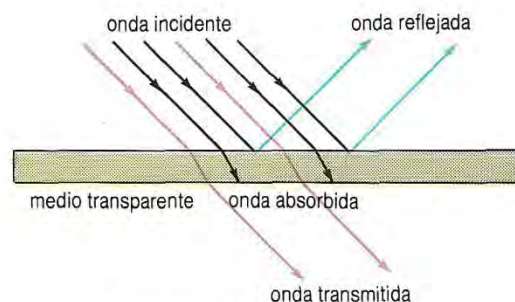


Fig. 8.33. Reflexión, absorción y refracción de ondas.

Si nos limitamos a considerar la absorción de ondas en puntos muy alejados del origen, sus frentes de onda se pueden considerar como planos. La intensidad en estos casos, disminuye de acuerdo con la relación:

$$dI = -\alpha I dx$$

siendo dx el espesor elemental del medio que se considera.

El signo menos ($-$) indica que la disminución de I aumenta con el espesor.

Según esto, **la absorción o debilitamiento de una onda es proporcional a la intensidad de la onda incidente y al espesor del medio que atraviesa**. Alfa (α) es el coeficiente de absorción, y se define por la expresión:

$$\alpha = -\frac{dI}{I dx}$$

es decir, el **coeficiente de absorción es la disminución relativa de la intensidad de la onda por unidad de longitud que recorre en el medio que atraviesa**.

Su unidad en el SI es m^{-1} .

De la ecuación de definición de la absorción se deduce, para la disminución de intensidad relativa:

$$\frac{dI}{I} = -\alpha dx$$

cuya integración da: $\ln I/I_0 = -\alpha x$; que, pasando a los números, resulta:

$$I = I_0 e^{-\alpha x} \quad [8.28]$$

según lo cual, **la intensidad de una onda que atraviesa un medio de espesor x depende de la intensidad I_0 de la onda incidente, del espesor atravesado x y del coeficiente de absorción**.

Se conoce como ley de Beer-Lambert.

Según esto, la intensidad de la onda disminuye con la distancia, así como su amplitud, pero la frecuencia no cambia.

El fenómeno de la absorción tiene aplicación en la sonorización de salas de conferencias, espectáculos, etc., así como en el reconocimiento de grupos atómicos y enlaces porque cada uno de ellos tiene un máximo de absorción para un «número de onda» característico. Por ejemplo, el grupo de los fenoles $-\text{OH}$ presenta un máximo de absorción para $3\,000\text{ cm}^{-1}$ (en el infrarrojo).

18. Polarización de las ondas

Así como las interferencias y la difracción caracterizan los movimientos ondulatorios, la **polarización** permite comprobar si una onda es **transversal** o no (pues las longitudinales no se polarizan, ya que vibran siempre en el sentido de la propagación). La onda **transversal** puede **vibrar en todos los planos normales a la propagación**; si se consigue que vibre en uno solo, se dice que la onda está polarizada.

En este caso se dice que la onda está polarizada **linealmente**, pues la proyección de las vibraciones de los puntos sobre el plano es un segmento de recta (fig. 8.34).

Cuando el punto O vibra en forma circular, en lugar de hacerlo linealmente, los demás puntos de la onda también vibran circularmente y en este caso la **polarización es circular**.

Si la vibración inicial es elíptica, la onda estará polarizada **elípticamente**.

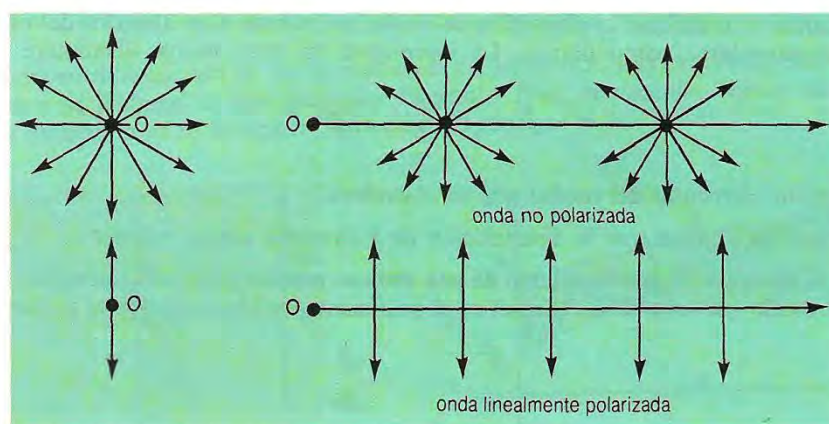


Fig. 8.34.

Las ondas electromagnéticas, como la luz, son transversales y, de ordinario, no están polarizadas, ya que provienen de innumerables fuentes (cada átomo excitado). Estas ondas se pueden polarizar mediante la reflexión, refracción, dispersión de la luz, etc.

El medio más sencillo es el de la **absorción selectiva** mediante láminas que llevan embutidas sustancias cristalinas con láminas paralelas. Tienen la propiedad de dejar pasar sólo la componente de la onda cuyo vector eléctrico vibra paralelamente a la dirección de los cristales. Tales láminas se llaman **polaroides**: la que se coloca de objetivo se llama **polarizador**, y la que se coloca de ocular, **analizador**. Cuando sus ejes están perpendiculares, no pasa luz; y pasa, cuando son paralelos. Esto se indica en la figura 8.35.

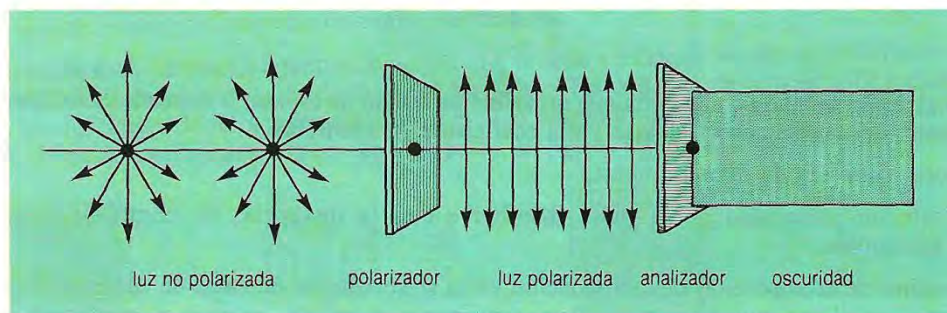


Fig. 8.35. Polarización de la luz por absorción.

19. Características y espectro de las ondas sonoras

El sonido es el resultado de un proceso oscilatorio que se produce en el aire (u otros medios). Las **ondas sonoras** son **ondas longitudinales** porque los **elementos de volumen de aire se mueven paralelamente a la dirección de propagación de las ondas**. Si la fuente emite ondas sonoras que se propagan en **todas direcciones** en un medio tridimensional uniforme, los frentes de onda son esféricos, con el centro en la fuente. Tales ondas se denominan **esféricas** y se propagan por **compresiones** y **dilataciones** del medio; por eso se les llama también **ondas de presión**.

La **energía** de las ondas esféricas se distribuye uniformemente por el frente de onda y, al llegar al oído, hacen vibrar el tímpano; éste comunica su vibración al oído medio (cadena de huesecillos), y éstos, al líquido del oído interno. Finalmente, las **vibraciones mecánicas** se convierten en **impulsos eléctricos nerviosos** en las células ciliares y llegan por el nervio acústico al cerebro, donde son interpretados.

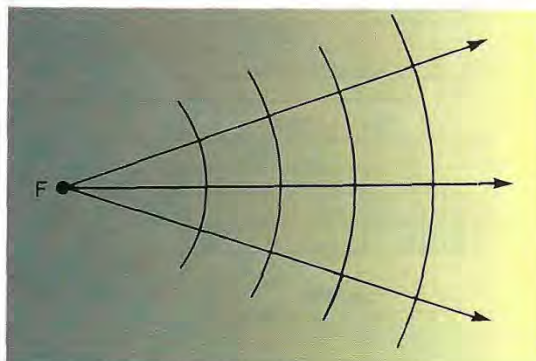


Fig. 8.36. Propagación de ondas esféricas.

Desde el punto de vista **físico**, las **ondas sonoras** se caracterizan por su **espectro**, que es de dos clases: a) **espectro de rayas**, característico del instrumento sonoro que produce **oscilaciones periódicas**; corresponde a los **sonidos musicales**; b) **espectro continuo**, cuando las oscilaciones no son periódicas: es propio de los **ruidos**.

Cuando una cuerda tensa se pone en vibración, como en el violín, los extremos fijos no pueden entrar en vibración; en ellos hay siempre un nodo. Según [8.27], las longitudes de onda posibles en una cuerda de longitud L son:

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

como se observa en la figura 8.37.

De la ecuación $f = \frac{v}{\lambda}$ se deducen los valores de las frecuencias sustituyendo el valor de v por [8.15]:

$$f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \left(\text{sonido fundamental} \right. \\ \left. \text{o primer armónico} \right)$$

$$f_2 = 2f_0 = \frac{2}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (\text{segundo armónico})$$

$$f_3 = 3f_0 = \frac{3}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (\text{tercer armónico})$$

$$f_4 = 4f_0 = \frac{4}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (\text{cuarto armónico})$$

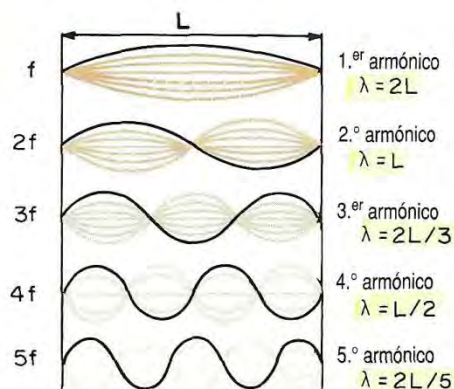


Fig. 8.37. Ondas estacionarias en una cuerda con extremos fijos.

El sonido que produce una cuerda de violín, de guitarra, etc., es una mezcla de **armónicos**, es decir, de sonidos cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia del sonido fundamental, f_0 ; por eso, entre ambas frecuencias, existe la relación: $f = n \cdot f_0$, siendo f la frecuencia de los armónicos.

Es muy difícil producir un tono puro en una cuerda o instrumento musical (salvo en el diapasón); para ello, el perfil de la onda tendría que coincidir (en las cuerdas) con una de las formas de la anterior figura, lo que no es fácil de conseguir.

Precisamente, el timbre de una nota musical depende de los sobretonos y armónicos que contiene y de sus amplitudes relativas. Por esta razón son diferentes las calidades musicales o timbres de la misma nota producida en distintos instrumentos.

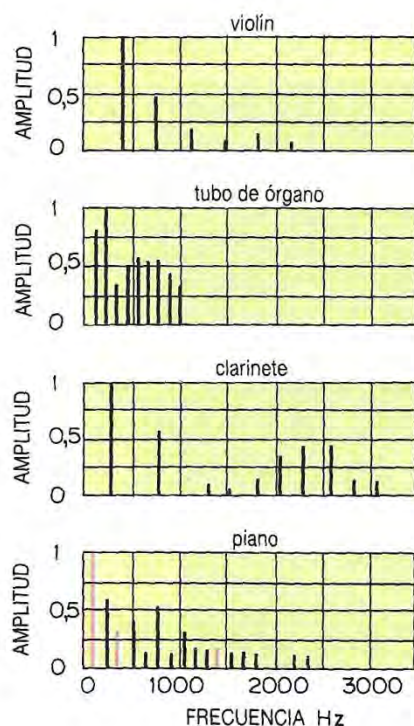
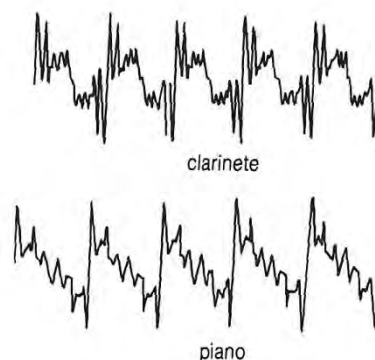


Fig. 8.38. Espectros de varios instrumentos.

En la figura (8.38) se representan los **espectros** de varios instrumentos. En esos **diagramas se relacionan las amplitudes de los diferentes sobretonos y armónicos con las correspondientes frecuencias**.

El resultado de las vibraciones y armónicos que produce cada instrumento son las **curvas periódicas no sinusoidales** que los caracterizan.

En la gráfica figuran las del piano y clarinete. Cuanto más complejo es el espectro y la gráfica de la onda sonora, más rico es el timbre musical.



20. Intensidad y nivel de intensidad sonora (sonoridad)

El oído humano puede percibir una gama muy amplia de intensidades. El mínimo de intensidad de energía audible (**umbral** de audición) es del orden de 10^{-12} W/m^2 . Para que el oído pueda apreciar que un sonido tiene doble intensidad que otro, tiene que recibir una intensidad mucho mayor que el doble, porque la sonoridad que se capta guarda una relación aproximadamente logarítmica con la intensidad que incide en el oído. Por eso se define el nivel de intensidad sonora por la relación logarítmica:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad [8.29]$$

donde I es la intensidad de energía del sonido, e I_0 el umbral de audición: representa la intensidad de energía asociada con el sonido más débil que se puede oír: $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

El **nivel de intensidad sonora** o **sonoridad** es una magnitud adimensional y se mide en **decibelios**, dB.

Un sonido de intensidad un millón de veces superior al umbral de audición tiene un nivel de intensidad o sonoridad de 60 dB.

Según el valor de la **sonoridad**, los **sonidos** se dicen **fuertes** o **débiles**.

Tabla 8.1
Niveles de intensidad aproximados de algunos sonidos corrientes

Tipo de sonido	Nivel de intensidad (dB)
Umbral de la audición	0
Susurro de las hojas	10
Habitación muy tranquila, goteo	20
Habitación normal: conversación en voz baja a 5 m	40
Conversación ordinaria	60
Tráfico de una calle bulliciosa	70
Radio alta; orquesta sinfónica (fuerte)	80
Tren al pasar por una estación	90
Remachadora	100
Umbral de la sensación desagradable: motor de avión a 5 m	120
Umbral de la sensación dolorosa	140

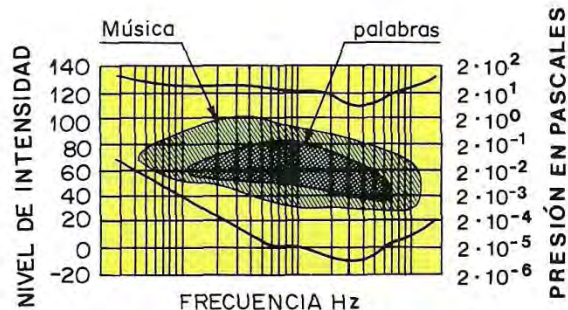


Fig. 8.39. Relación del nivel de intensidad en dB con la frecuencia y la presión.

La gráfica señala los **niveles de intensidad** sonora en decibelios relacionados con las frecuencias, en Hz, y las presiones, en pascuales. Las curvas de trazo grueso limitan las oscilaciones que puede percibir el oído humano: van de 20 a 20 000 Hz.

Los **ultrasonidos** son oscilaciones de frecuencia superior a los 20 000 Hz. No se perciben por el oído, pero tienen aplicaciones en medicina, en la industria, en la investigación. Por ejemplo, se usan los ultrasonidos en cardiología, neurología y obstetricia (ecografía) y para localizar anomalías en el cuerpo; en oceanografía, para medir los fondos submarinos con el sonar*; en la industria, se precipitan las partículas sólidas en suspensión en humos y aerosoles, se dispersan las emulsiones de grasa en el agua, se detectan grietas en los metales, etc.

Los **infrasonidos** tienen frecuencia inferior a la frecuencia umbral, 20 Hz. Se originan en los terremotos, truenos y el viento. Tales vibraciones influyen en el organismo produciendo rozamientos entre los órganos internos y originando irritaciones en las terminaciones nerviosas.

* Sonar: de «Sound Navigation Ranging» = navegación y medida de distancias por el sonido.

Ejercicio 10

Se emiten simultáneamente dos sonidos, de nivel de intensidad o sonoridad 50 y 60 dB, respectivamente. Calcular: a) la intensidad del sonido resultante; b) el nivel de intensidad o sonoridad que se percibe.

SOLUCIÓN

a) La intensidad del sonido se deduce de la ecuación del nivel de intensidad o sonoridad:

$$50 = 10 \log \frac{I_1}{10^{-12} \text{ W/m}^2} \Rightarrow \log \frac{I_1}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 5$$

de donde

$$\frac{I_1}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 10^5 \Rightarrow I_1 = 10^{-7} \text{ W/m}^2$$

$$60 = 10 \log \frac{I_2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} \Rightarrow I_2 = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

Intensidad total: $I = I_1 + I_2 = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$.

b) Sonoridad resultante:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 10 \log \frac{1,1 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \log 1,1 \cdot 10^6$$

$$\beta = 60,4 \text{ dB}$$

21. Tono y timbre

El tono es una cualidad del sonido que depende de la **frecuencia de la vibración**.

Cuando se oye un sonido complejo, o conjunto de frecuencias, la mayoría de la gente oye el tono que corresponde a la frecuencia fundamental, incluso cuando ésta no existe, debido a fenómenos de interferencias.

Según sea la frecuencia de los sonidos, los tonos se clasifican en **agudos** y **graves**. Los primeros corresponden a frecuencias **altas**, mayor de 1 000 Hz, como las del flautín y la voz de soprano; y los segundos, a frecuencias **bajas**, menor de 1 000 Hz, como las del contrabajo y la tuba, y la voz de bajo.

Timbre

Además de distinguir la intensidad y el tono, el oído humano es capaz de **diferenciar** sonidos de **un mismo tono** y la **misma intensidad** producidos por diferentes instrumentos. Es lo que constituye la **calidad musical** o **timbre** del instrumento.

Un mismo tono musical producido por diferentes instrumentos tiene la misma frecuencia fundamental pero su espectro es diferente. El matiz del timbre de un sonido lo determinan las distribuciones de las intensidades de los armónicos, cuyas frecuencias suelen ser múltiplos enteros de la frecuencia principal; así, la **octava** es un armónico de frecuencia doble que el fundamental. Según es el contenido y amplitud de los armónicos de un tono, así es la calidad o timbre del sonido musical.

Por el timbre reconocemos la voz de las personas y las diferenciamos, incluso por teléfono.

Tema Optativo

Efecto Doppler

Cuando se propaga un movimiento ondulatorio, la frecuencia de vibración del medio es la misma que la del emisor; es decir, un receptor en reposo recibe la misma frecuencia que la emitida por la fuente. Pero cuando el observador o la fuente, o ambos a la vez, no están en reposo la frecuencia recibida por el observador no es la misma que la emitida por el emisor; este hecho se conoce con el nombre de **efecto Doppler**.

Un movimiento ondulatorio se repite en el tiempo y en el espacio; en cada punto hay una oscilación cuyo máximo se desplaza con la velocidad:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \quad (1)$$

siendo T , período, el tiempo que tarda el máximo en recorrer la distancia λ , y f , la frecuencia de la oscilación. La ecuación (1) es válida para todas las ondas.

El efecto Doppler hace que la **frecuencia** de un sonido, por ejemplo, **disminuya** si el observador se aleja de la fuente (o la fuente del observador), y **aumenta** la frecuencia, si la fuente y el observador se **acercan**. Esto se percibe claramente cuando pasa un vehículo emitiendo un sonido: al acercarse, el sonido se hace más agudo y, al alejarse, cambia bruscamente a más grave. El cambio de frecuencia del sonido no sólo se debe al movimiento relativo de la fuente y del observador, sino que los resultados cuantitativos son diferentes dependiendo de quién se mueva. Y esto porque tanto la velocidad del observador, v_o , como la de la fuente, v_f , se dan en un medio en el que se propaga la onda, cuya velocidad depende de dicho medio. Por eso, en el sonido distinguimos necesariamente dos situaciones: a) **el que se mueve es el observador**; b) **lo que se mueve es la fuente**.

- a) Si se **aleja el observador** de la fuente (fija) con velocidad v_o , la velocidad **relativa del sonido** respecto del observador es:

$$v_r = v - v_o$$

siendo v la velocidad del sonido en el aire.

Por la ecuación (1), se cumple: $v - v_o = \lambda \cdot f_1$ (2)

donde f_1 es la frecuencia que percibe el observador que se aleja. Pero la onda sonora que se propaga en el medio con velocidad v , cumple, a su vez,

$$v = \lambda \cdot f \quad (3)$$

siendo f la frecuencia del sonido emitido. Si se elimina λ entre (2) y (3) se obtiene para la frecuencia del observador:

$$f_1 = f \left(\frac{v - v_o}{v} \right) \quad (4)$$

- b) Si se **aleja la fuente** sonora, respecto del observador fijo, con velocidad v_f , en el tiempo T correspondiente a un período, la fuente se aleja del observador $s = v_f T$, con lo cual la longitud de onda que le llega al observador es:

$$\lambda_1 = \lambda + v_f T$$

a la cual corresponde una frecuencia:

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1}$$

sustituyendo f' por su valor anterior resulta:

$$f_1 = f \left(\frac{v \pm v_o}{v \mp v_f} \right) \quad (6)$$

Al **acercarse simultáneamente**, corresponde el (+) del numerador con el (-) del denominador; y al **alejarse**, el (-) del numerador con el (+) del denominador.

Obsérvese que si en la (6) hacemos $v_f = 0$ se obtiene la (4'); y si hacemos $v_o = 0$, se obtiene la (5').

El efecto Doppler tiene aplicación en los diversos campos de la Física; por ejemplo, en Astronomía se determina la velocidad de una estrella estudiando la variación de la frecuencia producida. En electrónica, al analizar la variación de frecuencia emitida por un radar en el choque con un cuerpo en movimiento se puede determinar la posición y el movimiento del cuerpo.

Cuestiones

- 8.1. El número de ondas k es igual a la frecuencia de un movimiento ondulatorio (cierto/falso).
- 8.2. Cada partícula de una cuerda por la que se propaga una onda sinusoidal realiza un movimiento armónico (cierto/falso).
- 8.3. Las ondas sonoras no se polarizan (cierto/falso).
- 8.4.* Un pulso se mueve por una cuerda fija por un extremo. Al llegar a ese extremo, *a)* el pulso no se refleja; *b)* se refleja y se invierte; *c)* se refleja sin invertir; *d)* el poder reflejarse e invertirse depende de la densidad de la cuerda. Indicar si es verdadero o falso lo propuesto.

Universidad de Valladolid, 1986

- 8.5.* De dos muelles diferentes se suspenden cuerpos distintos y se les dan alargamientos iguales. Hallar la razón entre los períodos de sus oscilaciones libres.

Universidad de Valladolid, 1982

- 8.6. Al pasar la luz de un medio a otro varía su velocidad y su longitud de onda; ¿varía también su frecuencia?
- 8.7. La nota de un violín suena desafinada, es decir, por debajo de su frecuencia, ¿qué hay que hacer para afinarla?
- 8.8. La intensidad y la amplitud de una onda disminuyen con la distancia al origen, ¿cuál disminuye más?
- 8.9. De dos ondas de la misma amplitud y frecuencias respectivas 256 y 512 Hz, ¿cuál posee mayor intensidad?
- 8.10.* Dos fuentes próximas tienen distinta amplitud, pero igual frecuencia, ¿se produce en algún punto interferencia destructiva completa?; para que se produzca interferencia constructiva, entre dos focos coherentes, ¿qué diferencia de caminos deben recorrer?

Universidad de Valladolid, 1987

- 8.11.* Indicar si es verdadero o falso lo que se dice:

Se hace vibrar el extremo de una cuerda y origina una onda que se propaga por la cuerda que está en un plano vertical: *a)* la onda se propaga con la velocidad de la luz; *b)* la longitud de onda es el doble de la distancia entre dos crestas consecutivas; *c)* la onda está polarizada.

Universidad de Valladolid, 1985

- 8.12. La niebla dificulta mucho la visibilidad, ¿tiene esto algo que ver con la difracción? Razonarlo.

8.13. Las ondas del espectro visible están comprendidas entre 400 y 800 nm, aproximadamente, y la frecuencia de los sonidos perceptibles por el oído oscila entre 20 y 20 000 Hz. Comparar el diámetro medio del orificio u obstáculo que difracta ambas ondas.

8.14.* Dibujar, superponiendo en la misma figura, dos ondas de modo que una de ellas tenga doble frecuencia que la otra y su fase inicial sea de π radianes.

Universidad de Valladolid, 1983

8.15. Cuando interfieren dos ondas de igual frecuencia, ¿varía su velocidad?, ¿varía su energía?

8.16. ¿Hay interferencias entre la luz emitida por dos linternas?

8.17. Una onda progresiva, de pequeña amplitud, se desplaza por un muelle a 10 m/s y frecuencia de 100 Hz. Dos puntos separados por 2,5 cm tienen de desfaseamiento:

$$a) \ 0 \qquad b) \ \frac{\pi}{4} \qquad c) \ \frac{\pi}{2} \qquad d) \ \frac{3\pi}{4}$$

8.18.* La velocidad de un movimiento ondulatorio depende: a) de la amplitud de la vibración; b) de la energía de la fuente; c) de la frecuencia de la vibración; d) de las características físicas del medio; e) de nada de lo indicado.

Universidad de Valladolid, 1983

8.19. ¿Por qué se modifica el tono de una cuerda de guitarra al presionar en un punto o en otro?

8.20. Una copa de vidrio fino se puede romper al emitir delante un sonido agudo, ¿por qué?

8.21. ¿Se puede afirmar que el decibelio es unidad de intensidad?

8.22. Se puede oír lo que pasa al otro lado de una esquina, pero no se puede ver sin asomarse, ¿por qué?

Problemas

8.1. Un resorte lleva en un extremo una masa m y oscila con un período $T = 2$ s. Si se aumenta la masa en 2 kg, el nuevo período es de 3 s. Calcular m .

8.2.* El estudio experimental del movimiento armónico simple de una partícula de 250 g se hace tomando $t = 0$ en el instante en que pasa la partícula por el punto de equilibrio y de elongación negativa a positiva. Si tarda 1 min 20 s en describir 100 oscilaciones completas, y el valor máximo de la fuerza que produce el movimiento es $F = 25$ N, determinar: A , ω y φ_0 en la ecuación del movimiento: $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

8.3. Una bola de masa $m = 20$ g oscila con m.a.s. con período $T = \pi$ s y amplitud de 10 cm. Calcular: a) la velocidad máxima de la bola; b) la velocidad cuando la fase es de 60° ; c) la fuerza restauradora sobre la bola, cuando las fases son: 0° , 30° y 90° , respectivamente.

8.4. Una partícula de masa 2 unidades SI se mueve a lo largo del eje X hacia el origen, por la acción de una fuerza $F = -10x\vec{i}$. Inicialmente está a 2 m del origen moviéndose con una velocidad de 10 m/s. Calcular: a) el período del movimiento; b) el instante que pasa por el origen la primera vez; c) la velocidad en dicho instante.

8.5.* Una partícula de masa 5 g oscila por la acción de un resorte cuyo movimiento es: $x = 7 \cos(3t + 1)$, siendo x , cm; t , segundos y 1 radianes. Determinar: a) la velocidad v_m y la aceleración a_m (máximas) de la partícula; b) el período de oscilación y la constante recuperadora del resorte; c) los instantes en los que v y a se hacen máximas; d) la representación gráfica de la aceleración instantánea en función de la velocidad v y la de la aceleración a en función de la posición x .

- 8.6.*** Un muelle elástico de 10 cm tiene uno de sus extremos fijo en la pared vertical y descansa en una superficie horizontal sin rozamiento. Se le aplica una fuerza de 20 N para mantenerlo estirado una longitud de 15 cm. En esta posición se suelta y oscila libremente. Calcular: a) la constante de recuperación del resorte; b) la ecuación del movimiento vibratorio armónico resultante; c) las energías potencial E_p y cinética E_c cuando $x = 2$ cm; d) velocidad máxima y aceleración máxima, indicando las elongaciones de cada una. Periodo, $T = 4$ s.

Universidad de Cantabria, 1984

- 8.7.** En el centro de una piscina de 6 m de radio se produce una perturbación que origina un movimiento ondulatorio en la superficie del agua; la longitud de onda vale $3/4$ m y tarda 12 s en llegar a la orilla; calcular: a) el periodo y la frecuencia del movimiento; b) la amplitud, si al cabo de $1/4$ de segundo la elongación en el origen es de 4 cm; c) la elongación de un punto situado a 6 cm del foco emisor en el instante $t = 12$ s.

- 8.8.*** 1) Una cuerda de longitud $L = 60$ cm tiene el extremo S unido a un vibrador animado de movimiento vertical sinusoidal de amplitud $A = 1,0$ cm y frecuencia $f = 100$ Hz. El otro extremo está unido a un dispositivo que impide la reflexión de onda. Si en el instante $t = 0$ el extremo S está en su posición de equilibrio y considerando positivo el desplazamiento ascendente, deducir la ecuación de la elongación de S en función del tiempo. 2) Las vibraciones se propagan con velocidad $v = 30,0$ m/s. Determinar: a) la longitud de onda; b) el vector de onda \vec{k} ; c) la expresión de la elongación de un punto M situado a una distancia $x = 45,0$ cm del punto S .

Universidad Autónoma de Barcelona, 1987

- 8.9.** Una onda de 10 cm de amplitud se propaga de izquierda a derecha y su periodo es de 12 s. Supuesta sinusoidal, hallar la elongación en el origen cuando el tiempo es 1 s, contado a partir de la iniciación del movimiento, desde la posición de equilibrio. En ese mismo instante, la elongación es nula en un punto distante 4 cm del origen hacia la derecha. Hallar la longitud de onda correspondiente.

Universidad Autónoma de Barcelona, 1988

- 8.10.** Una onda longitudinal se propaga por un resorte que tiene un extremo unido a una fuente vibrátil. Si la frecuencia de la vibración es $f = 25$ Hz y la longitud de onda, $\lambda = 0,24$ m, calcular: a) la velocidad de propagación; b) la ecuación de la onda, si la elongación máxima es 0,3 cm y se propaga en sentido positivo en el eje OX .

Universidad Autónoma de Barcelona, 1989

- 8.11.*** La ecuación del movimiento de una onda transversal por una cuerda tensa es:

$$y = 0,25 \cos(0,05t - 0,2x)$$

en unidades SI. Calcular: a) la velocidad de propagación de la onda por la cuerda; b) la velocidad del punto de la cuerda $x = 2,5$ m en el instante $t = 10$ s.

- 8.12.*** Una onda unidimensional se propaga de derecha a izquierda con velocidad de 8 m/s, frecuencia $f = 2$ Hz y de amplitud 30 cm. Calcular: a) la longitud de onda; b) la ecuación de la onda; c) la velocidad de una partícula en $x = 2$ m en el instante $t = 1$ s.

Universidad de Valencia, 1986

- 8.13.*** Una cuerda puesta en el eje OX vibra transversalmente según el eje OY con movimiento ondulatorio de ecuación:

$$y(x, t) = 0,002 \sin(60x + 300t)$$

en unidades SI. Se pide: a) dirección y velocidad con que se propaga la onda; b) longitud de onda y frecuencia del movimiento.

Universidad Complutense, 1983

- 8.14.*** Dos ondas de ecuaciones:

$$y_1 = 6 \sin(1500t - 250x) \quad ; \quad y_2 = 6 \sin(1500t + 250x)$$

en unidades SI, interfieren. Calcular: *a*) la ecuación de las ondas estacionarias resultantes; *b*) la amplitud de los nodos; *c*) la distancia entre dos vientres consecutivos.

Universidad Autónoma de Barcelona, 1989

- 8.15.*** El extremo de una cuerda $x = 0$, oscila según la ecuación: $y = A \sin \omega t$, siendo $A = 0,1 \text{ m}$ y $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$. Por la cuerda se propaga una onda sinusoidal, y el punto $x_1 = 0,05 \text{ m}$ vibra según la expresión

$$y = A \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Calcular: *a*) la frecuencia de la onda; *b*) la velocidad de propagación; *c*) la longitud de onda; *d*) la ecuación de la onda.

- 8.16.*** Una onda armónica esférica tiene de intensidad $6 \cdot 10^{-8} \text{ W/cm}^2$ a 20 m del foco emisor. Si no hay absorción, calcular: *a*) la energía emitida por el foco emisor en un minuto; *b*) la amplitud de la onda a los 40 m , si a los 20 m es de 4 mm .

Universidad de Valencia, 1987

- 8.17.*** Una perturbación se propaga por un medio elástico, según la ecuación:

$$y = 24 \sin(1987t - 6x)$$

en unidades SI. Determinar: *a*) la frecuencia de las vibraciones; *b*) la velocidad de propagación de la onda; *c*) la ecuación de otra onda que se propaga en sentido contrario, e idéntica a la dada.

Universidad de Valladolid, 1987

- 8.18.** *a*) Calcular la velocidad del sonido en hidrógeno a 27°C si la del sonido en el aire a 0°C es de 331 m/s . *b*) Hallar la longitud de onda del sonido cuya frecuencia es de 435 Hz ; *c*) El valor de v en el aire a 15°C .

- 8.19.*** Una cuerda vibra según la ecuación:

$$y(x, t) = 5 \sin \frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t \quad (x \text{ e } y \text{ en cm, } t \text{ en s})$$

Calcular: *a*) la amplitud y velocidad de las ondas que originan la onda estacionaria; *b*) la velocidad en un punto que dista $x = 1,5 \text{ cm}$ del origen en el instante $t = 1,25 \text{ s}$; *c*) la distancia entre dos nodos.

- 8.20.*** En una cuerda horizontal de longitud indefinida se produce una onda sinusoidal transversal en $x = 0$; el movimiento de la misma se produce dos veces cada segundo. Si la densidad lineal de la cuerda es de $0,25 \text{ kg/m}$ y está sometida a una tensión de 10 N , calcular: *a*) la velocidad de propagación del movimiento ondulatorio en la cuerda; *b*) la frecuencia y longitud de onda del mismo; *c*) la ecuación del movimiento; *d*) la velocidad y aceleración de un punto situado a $3,16 \text{ m}$ del origen de la perturbación. Dato: amplitud del movimiento, $A = 0,5 \text{ m}$.

- 8.21.** Dos masas de $0,80$ y $1,0 \text{ kg}$ penden de resortes idénticos de constante elástica $k = 4,0 \cdot \pi^2 \text{ N/m}$. Ambos se sueltan para oscilar simultáneamente de sus desplazamientos máximos iguales y describen m.a.s. Calcular: *a*) las frecuencias de oscilación de cada uno de ellos; *b*) el menor tiempo en que uno de ellos da exactamente una vibración más que el otro (período de las pulsaciones); *c*) la frecuencia con que ambos resortes alcanzan en el mismo instante la elongación máxima (frecuencia de las pulsaciones).

- 8.22.*** La ecuación de una onda en unidades SI es:

$$y = 0,04 \sin(300\pi t - 3x)$$

Calcular: *a*) la frecuencia de la onda y su velocidad; *b*) la diferencia de fase entre las posiciones de un punto en el intervalo de tiempo $t = 1 \text{ s}$; *c*) la distancia entre dos puntos consecutivos cuya diferencia de fase es $\pi/3$ radianes; *d*) la diferencia de fase entre dos puntos, en un instante dado, cuya separación es de $0,5 \text{ m}$.

- 8.23.*** La emisora de radio *A* emite con frecuencia de 30 MHz; y la *B*, con frecuencia de 300 MHz. Si se admite que la intensidad de ambas es la misma y no hay amortiguamiento, calcular: *a*) sus longitudes de onda; *b*) la relación de sus amplitudes en un punto equidistante de ambas; ¿qué emisora llega con mayor amplitud?
- 8.24.** Una onda sonora plana, sin amortiguamiento, se propaga en un medio gaseoso con velocidad $v = 350$ m/s en la dirección *OX*; la frecuencia de la onda armónica es de 12 kHz y la amplitud de la oscilación de la molécula del medio, $3 \cdot 10^{-5}$ m. Si la elongación en el instante inicial es de $1,5 \cdot 10^{-5}$ m en el punto (0, 0, 0), *a*) calcular la longitud de onda; *b*) deducir la ecuación de la onda sonora.
- 8.25.*** En el punto *M* se superponen dos movimientos ondulatorios procedentes de dos focos coherentes *A* y *B*. La distancia *MA* es 35 m y la *MB*, 20 m. Se propagan con velocidad de 900 m/s y frecuencia, 150 Hz. La amplitud del movimiento ondulatorio procedente de *A* es 0,4 m en el punto *M*, y la procedente de *B*, 0,3 m. Determinar: *a*) la función del movimiento que define el estado del punto *M*; *b*) la relación de intensidades entre la del movimiento ondulatorio en *M* y las de cada movimiento que incide en *M* procedentes de *A* y *B*.

Universidad del País Vasco

- 8.26.** Se emite un sonido de 80 dB y frecuencia de 2 000 Hz. Calcular la longitud de onda y la intensidad sonora si se supone para temperatura del aire 15 °C.
- 8.27.** Un observador recibe dos sonidos producidos simultáneamente cuyos niveles de intensidad sonora son 40 y 60 dB. Calcular: *a*) la intensidad del sonido resultante; *b*) el nivel de intensidad sonora del mismo
- 8.28.** Un tren pasa por un puente a 105 km/h y emite un sonido de 530 Hz. Calcular la frecuencia que percibe un observador situado cerca de la vía, al acercarse el tren y al alejarse; velocidad del sonido, 340 m/s.
- 8.29.*** Un coche se separa de una pared a 90 km/h y se dirige hacia un observador emitiendo un sonido de 600 Hz. Calcular: *a*) la frecuencia que llega al observador directamente; *b*) la que le llega después de reflejarse en la pared.

Universidad Complutense

- 8.30.** Si en el problema anterior soplara un viento de 30 m/s en la dirección y sentido del movimiento del coche, deducir las frecuencias que percibe el observador: *a*) directamente del coche; *b*) después de reflejarse en la pared.

Respuesta a los problemas

- 8.1.** $m = 1,6$ kg.
- 8.2.** $A = 1,6$ m; $\omega = \frac{5\pi}{2}$ rad/s; $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ rad.
- 8.3.** $v_{\max} = 0,20$ m/s; $v = 0,1$ m/s; $F_1 = 0$; $F_2 = -4 \cdot 10^{-3}$ N; $F_3 = -8 \cdot 10^{-3}$ N.
- 8.4.** $T = 2,81$ s; $t = 1,26$ s; $v = 10,95$ m/s.
- 8.5.** $v_m = -0,21$ m/s; $a_m = -0,63$ m/s²; $T = 2,1$ s; $k = 45 \cdot 10^{-3}$ N/m; $t_0 = 0,19$ s; $t_1 = 1,24$ s... (*v*); $t'_1 = 0,71$ s... (*a*).
- 8.6.** $k = 400$ N/m; $x = 0,05 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$ m; $E_p = 0,08$ J; $E_c = 0,42$ J; $v_m = 7,85 \cdot 10^{-2}$ m/s; $a_m = 0,12$ m/s².
- 8.7.** $T = 1,5$ s; $f = 0,67$ Hz; $A = 4,62$ cm; $y = -2,23$ cm.

- 8.8.** 1) $y = 1,0 \sin 200\pi t$ cm;
2) $\lambda = 0,30$ m; $k = 20,9 \text{ m}^{-1}$; $y = 1,0 \sin (200\pi t - 9,4)$ cm.
- 8.9.** $y = 5$ cm; $\lambda = 0,48$ m.
- 8.10.** $v = 6$ m/s; $y = 0,3 \cdot 10^{-2} \sin(50\pi t - 26,18x)$ m.
- 8.11.** $v = 0,25$ m/s; $v' = 0$.
- 8.12.** $\lambda = 4$ m; $y = 0,30 \sin(4\pi t + 1,57x)$ m; $v = -3,77$ m/s.
- 8.13.** $v = -5$ m/s; $\lambda = 0,10$ m; $f = 47,75$ Hz.
- 8.14.** a) $y = 12 \cos 250x \cdot \sin 1500t$; b) $y = 0$; c) $d = 1,26 \cdot 10^{-2}$ m.
- 8.15.** $f = 10$ Hz; $v = 4$ m/s; $\lambda = 0,4$ m; $y = 0,1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0,1} - \frac{5x}{2}\right)$ m.
- 8.16.** $E = 180,96$ J; $A_2 = 2$ mm.
- 8.17.** $f = 316,2$ Hz; $v = 331$ m/s; $y = 24 \sin(1987t + 6x)$ m.
- 8.18.** $v = 1317,4$ m/s; $\lambda = 3$ m; $v_{15} = 340$ m/s.
- 8.19.** $A = 2,5$ cm; $v = 1,20$ m/s; $v_x = 0$; $\Delta x = 3$ cm.
- 8.20.** $v = 6,32$ m/s; $f = 2$ Hz; $\lambda = 3,16$ m; $y = 0,5 \sin 2\pi\left(\frac{t}{0,5} - \frac{x}{3,16}\right)$ m;
 $v_x = 2\pi \cos(4\pi t - 6,32)$ m/s; $a_x = -8\pi^2 \sin(4\pi t - 6,32)$ m/s².
- 8.21.** $f_1 = 1,12$ Hz; $f_2 = 1$ Hz; $T = 8,3$ s; $f_p = 0,12$ Hz.
- 8.22.** $f = 150$ Hz; $v = 315$ m/s; $\Delta\varphi = 300\pi$ rad; $\Delta x = 0,35$ m;
 $\Delta\varphi = 1,5$ rad.
- 8.23.** $\lambda_1 = 10$ m; $\lambda_2 = 1$ m; $A_2 = 0,10A_1$.
- 8.24.** $\lambda = 2,9 \cdot 10^{-2}$ m; $y(x, t) = 3 \cdot 10^{-5} \sin\left(24\pi \cdot 10^3 t - 216,67x + \frac{\pi}{6}\right)$ m.
- 8.25.** $y = 0,7 \sin(300\pi t - 1,11)$ m; $\frac{I}{I_1} = 3$; $\frac{I}{I_2} = 5,4$.
- 8.26.** $\lambda = 0,17$ m; $I = 10^{-4}$ W/m².
- 8.27.** $I = 1,01 \cdot 10^{-6}$ W/m²; $\beta = 60,04$ dB.
- 8.28.** $f_1 = 580$ Hz; $f_1' = 488$ Hz.
- 8.29.** $f_1 = 647,6$ Hz; $f_1' = 559$ Hz.
- 8.30.** $f_1 = 704,8$ Hz; $f_1' = 555$ Hz.

Vibración de una varilla

Objetivo 1:

Comprobar que el tiempo de la vibración varía con la longitud de la varilla.

Material:

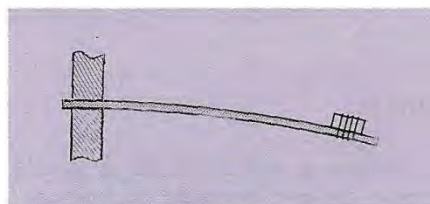
Una regla o varilla metálica graduada de 1 m; pinza; cronómetro; pesas; papel adhesivo (cello).

Realización:

1. Con la longitud $l = 90$ cm se separa por el extremo libre y se hace oscilar la varilla; y se mide el tiempo que tarda en dar 50 vibraciones. Se repite dos veces la misma medida.

Montaje:

Se fija una pesa o una masa de 100 g en el extremo de la varilla con papel adhesivo y el otro extremo se sujeta con una pinza de modo que queden 90 cm de varilla.



2. Se reduce la longitud de la varilla a 85 cm y se miden otras dos veces el tiempo que tarda en dar 50 vibraciones.

3. Con longitudes menores, se hacen una tercera y cuarta observación, y se anotan los resultados en la tabla.

Longitud L/m que vibra	Tiempo para 50 vibraciones			Tiempo medio t/s	Tiempo T para una vibración T/s	$\log T/s$	$\log L/m$
	t_1/s	t_2/s	t_3/s				

Se representa en una gráfica midiendo en ordenadas los $\log T/s$, y en abscisas, los valores de $\log L/m$. De la gráfica se deduce la pendiente de la recta y se analizan los resultados.

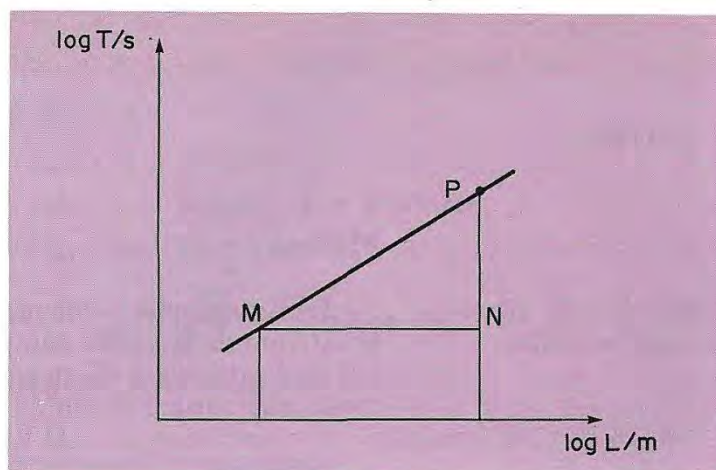
Suponiendo que la relación entre el período de la vibración T y la longitud de la varilla es:

$$T \sim L ; \frac{T/s}{(L/m)^n} = k$$

constante de proporcionalidad, tomando logaritmos,

$$\log T/s = n \cdot \log L/m + \log k$$

de donde la gráfica de $\log T$ respecto de $\log L/m$ es una recta, cuya pendiente PN/MN para dos puntos bastantes separados es el valor de n .



Objetivo 2:

El tiempo de vibración de la varilla de longitud constante depende de la masa colocada en el extremo.

Se representa en una gráfica los valores de $\log T/s$ y los de $\log m/kg$, y se determina la pendiente de la recta y se analizan los resultados.

Realización:

1. Se fija una masa de 100 g en el extremo de la varilla y con la longitud de 90 cm se la hace vibrar; se mide el tiempo que tarda en dar 50 oscilaciones y se repite esta medida 3 veces.

2. Se cambia la masa, colocando en el extremo, 50, 150 y 200 g y se repite para cada masa la medida del tiempo y se llevan los valores a la tabla:

Errores

En ambas experiencias se calculan los errores cometidos y se expresan los valores de las experiencias con sus correspondientes errores.

La representación gráfica de los logaritmos de una variable frente a los logaritmos de otra se pueden aplicar en los experimentos en los que no se conoce la relación exacta entre las variables.

Masa en el extremo libre m kg	Tiempo para 50 vibraciones				Tiempo T para una vibración T/s	$\log T/s$	$\log m/kg$
	t_1/s	t_2/s	t_3/s	Media t/s			