CAPÍTULO 1

MATEMÁTICAS

1 MATEMÁTICAS

1.1. INTRODUCCIÓN

El presente capítulo recoge los conocimientos básicos en matemáticas necesarios para instaladores autorizados de gas de las categorías A, B y C.

1.2. NÚMEROS ENTEROS Y DECIMALES

1.2.1. Números enteros

Son aquellos que nos permiten representar partes enteras; por ejemplo:

1 un libro

2 dos libros

3 tres libros

1.2.2. Números decimales

Los números que nos permiten representar fracciones de la unidad entera se llaman fraccionarios.

Los números fraccionarios, según su representación, los podemos dividir en dos grupos:

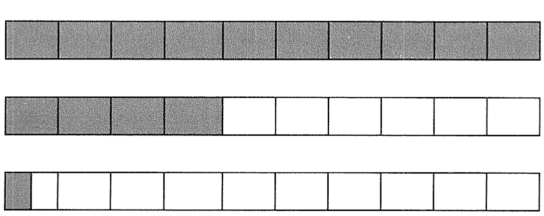
- Números decimales
- Números quebrados

En un **número decimal** podemos distinguir dos partes: la parte entera y la parte decimal, las cuales se encuentran separadas por una coma. La parte entera es la situada a la izquierda de la coma y la parte decimal se encuentra a la derecha de la coma.

2,46	2 es la parte entera del número 2,46	2,**46**	46 es la parte decimal del número 2,46

La primera cifra después de la coma representa el número de décimas partes de la unidad, la segunda el número de centésimas partes, la tercera el número de milésimas partes, y así sucesivamente.

De esta forma 2,46 representa 2 unidades enteras, 4 décimas de una unidad y 6 centésimas de una unidad.



1 unidad entera

4 décimas partes

6 centésimas partes

1.3. OPERACIONES BÁSICAS CON NÚMEROS ENTEROS Y DECIMALES (MÁX. 4 ENTEROS Y 3 DECIMALES)

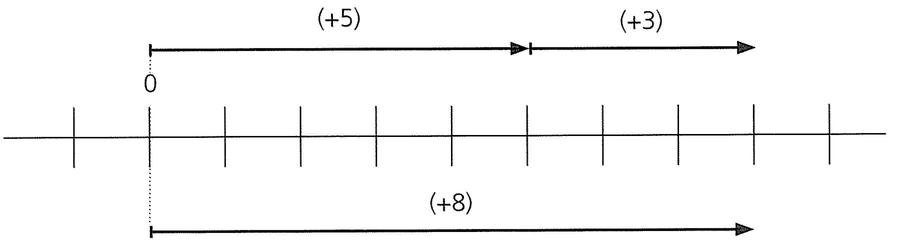
1.3.1. Operaciones básicas con números enteros

Puesto que más adelante se verán las operaciones con números negativos, aquí se trata exclusivamente de los números enteros positivos o números **naturales**.

1.3.1.1. Suma

Para sumar dos números naturales

(+5) + (+3) = (+8) gráficamente haríamos



Como vemos, al sumar gráficamente, ponemos una flecha detrás de otra. El resultado es una flecha de longitud igual a la suma de las otras dos.

La suma de números naturales tiene las siguientes propiedades:

- **Operación interna:** la suma de dos números naturales es otro número natural

  Ejemplo: 5 + 3 = 8; 8 es también un número natural

- **Propiedad conmutativa:** al sumar dos números naturales no importa el orden en que se sumen

  Ejemplo: 5 + 3 = 8;
  3 + 5 = 8

- **Propiedad asociativa:** al sumar tres o más números naturales no importa el orden en que se agrupen para sumarlos de dos en dos

  Ejemplo: 5 + (3 + 8) = 5 + 11 = 16
  (5 + 3) + 8 = 8 + 8 = 16

- **Elemento neutro:** si a un número natural se le suma 0 el resultado es el mismo número

  Ejemplo: 5 + 0 = 5

1.3.1.2. Resta

Al restar se quita del número mayor (**minuendo**) el valor del número menor (**substraendo**). Se escribe primero el minuendo y seguidamente el substraendo. El resultado de la resta se llama **diferencia**.

Propiedades de la resta:

- La resta no es una **operación interna** en el conjunto de números naturales (no siempre la resta de dos números naturales es un número natural, sólo si el minuendo es mayor que el sustraendo)

  Ejemplo: 5 - 3 = 2   2 es un número natural
  3 - 5 = -2   -2 **no** es un número natural

- La resta no tiene la **propiedad conmutativa** (no podemos intercambiar la posición del minuendo con la del sustraendo).

  Ejemplo: 5 - 3 = 2 pero
  3 - 5 no es igual a 2

- Tampoco tiene la **propiedad asociativa** ya que el orden en que se agrupen influye en el resultado.

  Ejemplo: 5 - (3 + 8) = -6
  (5 - 3) + 8 = 10

- Si sumamos o restamos el mismo número al minuendo y al substraendo obtenemos la misma diferencia.

  Ejemplo: 5 - 3 = 2

Si sumamos el número 4 al minuendo y al sustraendo tenemos:

5 + 4 = 9
3 + 4 = 7
9 - 7 = 2

1.3.1.3. Multiplicación y división

La multiplicación (o **producto**) de dos números naturales consiste en sumar el primero (**multiplicando**) consigo mismo tantas veces como indica el segundo (**multiplicador**) se representa por los símbolos × ó ·.

Ejemplo: 5 × 3 significa 5 + 5 + 5 (3 veces)

La multiplicación tiene las siguientes propiedades:

- Es una **operación interna**: el producto de dos números naturales es otro número natural

  Ejemplo: 5 × 3 = 15; 15 es un número natural

- **Propiedad conmutativa**: al multiplicar dos números naturales no importa el orden en que se multipliquen

  Ejemplo: 5 × 3 = 15
  3 × 5 = 15

- **Propiedad asociativa**: al multiplicar tres números naturales entre sí no importa el orden en que se agrupen para multiplicarlos de dos en dos

  Ejemplo: 5 × (3 × 8) = 5 × 24 = 120
  (5 × 3) × 8 = 15 × 8 = 120

- **Propiedad distributiva**: al multiplicar la suma de dos números por un tercero el producto es el mismo que si se suman los productos de cada sumando por el tercer número.

  Ejemplo: 5 × (3 + 8) = 5 × 3 + 5 × 8 En efecto:
  5 × 11 = 55
  5 × 3 = 15
  5 × 8 = 40
  15 + 40 = 55

- **Elemento neutro**: al multiplicar un número natural por el número 1 el resultado es el mismo número

  Ejemplo: 5 × 1 = 5

- Al multiplicar un número natural por el número 0 el resultado es 0.

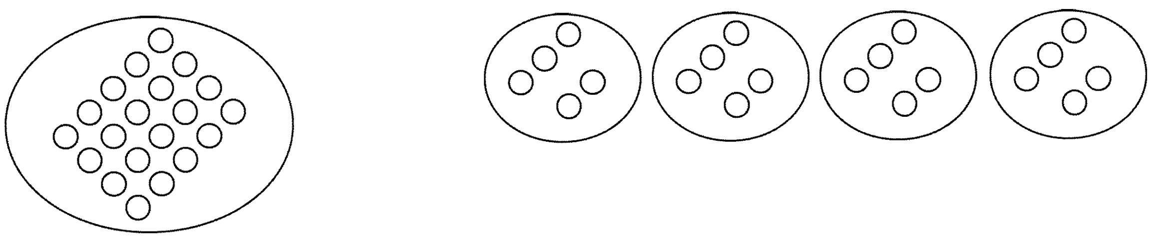
  Ejemplo: $5 \times 0 = 0$

1.3.1.4. División

La división es la operación inversa de la multiplicación. Cuando un número se divide por otro, al primero se le llama **dividendo** y al segundo **divisor**. El resultado de la división es el **cociente**.

La división entre dos números naturales requiere que el dividendo sea mayor que el divisor. La división puede ser **exacta** o **inexacta**. En este último caso hay, además, un **resto**.

Ejemplo 1: Queremos dividir 20 por 4. Ello significa determinar cuántas veces "cabe" 4 en 20. En el gráfico siguiente podemos llegar a poner una bola de las 20 que hay en el círculo grande, en cada uno de los cuatro círculos menores, hasta 5 veces. El **cociente** es, pues, 5 y la división es **exacta**.



Para efectuar la división de modo manual, el dividendo y el divisor se disponen normalmente como sigue:

$$\begin{array}{rr|ll} \text{dividendo} & 20 & \underline{4\qquad} & \text{divisor} \\ \text{resto} & 0 & 5 & \text{cociente} \end{array}$$

Ejemplo 2: Queremos dividir 22 por 4. Procediendo de manera análoga vemos que nos sobran 2 bolas después de haber colocado 5 en cada círculo menor. En este caso la división es **inexacta** y el **resto** es 2.

Para comprobar si una división es correcta se multiplica el divisor por el cociente y se le suma, en su caso, el resto. El resultado debe coincidir con el dividendo.

1.3.2. Operaciones básicas con números decimales

1.3.2.1. Suma de decimales:

Para sumar decimales lo único que debemos tener en cuenta es que las comas coincidan en la misma columna.

Ejemplo:

Para sumar 825,003 más 77,86 más 0,125 más 7,2 dispondremos las cantidades de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rr} & 825{,}003 \\ + & 77{,}86 \\ & 0{,}125 \\ & 7{,}2 \\ \hline \end{array}$$

añadimos ceros a la derecha para igualar los decimales y efectuamos la suma:

$$
\begin{array}{rr}
 & 825{,}003 \\
 & 77{,}860 \\
+ & 0{,}125 \\
 & 7{,}200 \\
\hline
 & 910{,}188
\end{array}
$$

1.3.2.2. Resta de decimales

Para restar dos números decimales, debemos colocar, como en la suma, las comas en la misma columna, el número al cual le restamos arriba y el número que restamos abajo.

Ejemplo:

Para efectuar la resta 1596,17 menos 896,888 dispondremos las cantidades de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{rr}
 & 1596{,}17 \\
- & 896{,}888 \\
\hline
\end{array}
$$

añadiremos ceros a la derecha para igualar los decimales y efectuaremos la resta:

$$
\begin{array}{rr}
 & 1596{,}170 \\
- & 896{,}888 \\
\hline
 & 699{,}282
\end{array}
$$

1.3.2.3. Multiplicación de decimales

En la multiplicación es indiferente la colocación de los números. Lo que si hay que tener en cuenta es, una vez resuelta la multiplicación operando como si fueran enteros, separar tantas cifras decimales en el producto como cifras decimales haya sumando las de los dos factores.

Ejemplo:

Para multiplicar 137,066 × 25,4. La operación se puede presentar de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rr}
 & 137{,}066 \\
\times & 25{,}4 \\
\hline
 & 548264 \\
 & 685330 \\
 & 274132 \\
\hline
 & 3481{,}4764
\end{array}
$$

Aquí vemos cuatro cifras decimales (tres en el multiplicando y una en el multiplicador) y esas son las que hemos separado.

1.3.2.4. División de decimales

En primer lugar suprimimos la coma del divisor, multiplicando el **dividendo** y el **divisor** por 1 seguido de tantos ceros como decimales tiene el **divisor**, es decir el número que divide. En el siguiente ejemplo el divisor tiene tres decimales, luego la primera operación a realizar es multiplicar el dividendo y el divisor por 1000.

Ejemplo:

Efectuar la siguiente división:

$$
3641{,}3 \;\; \underline{|\;\; 321{,}008}
$$

Una vez multiplicado el dividendo y el divisor por 1000 nos queda:

```
3641300 | 321008
```

```
3641,300 | 321,008      =      3641300,0 | 321008
```

y ahora se divide normalmente hasta que llegamos a la coma.

```
3641300 | 321008
 431220   11
 110212
```

a continuación ponemos la coma en el resultado. Y operamos con los decimales añadiendo ceros al dividendo hasta tener el cociente con el número de decimales deseado.

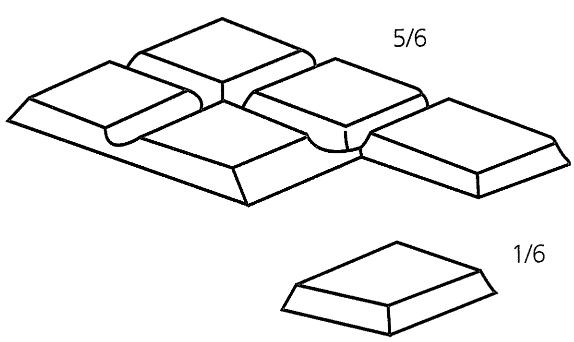
```
3641300,0 | 321008
  4312200   11,3
  1102120
   139096
```

1.4. NÚMEROS QUEBRADOS. REDUCCIÓN DE UN NÚMERO QUEBRADO A UN NÚMERO DECIMAL

Llamamos números quebrados a los que nos permiten representar las partes iguales de la unidad entera.

Si dividimos la unidad en dos partes iguales, cada una de ellas es una mitad y se representa por 1/2. Si la unidad la dividimos en tres partes iguales, cada una de ellas es un tercio y se representa por 1/3. De acuerdo con esto tendremos:

una mitad 1/2	un quinto 1/5	un octavo 1/8
un tercio 1/3	un sexto 1/6	un noveno 1/9
un cuarto 1/4	un séptimo 1/7	un décimo 1/10



Si de una chocolatina de seis pastillas, cogemos una pastilla, significa que hemos tomado 1/6 de la chocolatina.

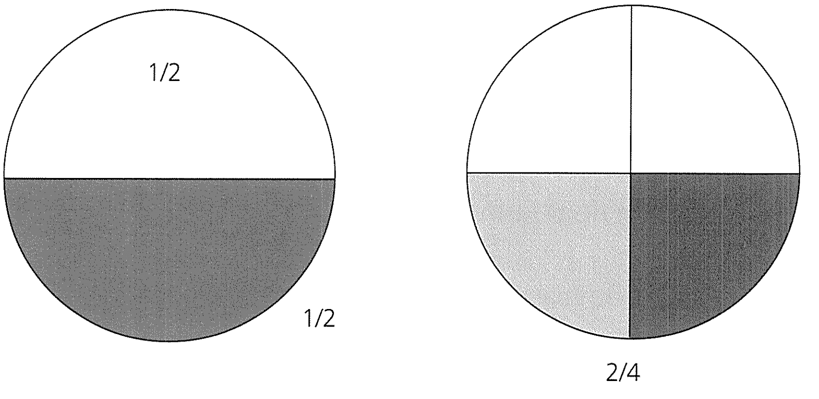
En un quebrado podemos distinguir dos partes: el **numerador y** el **denominador. El denominador** representa las partes en que hemos dividido la unidad y el **numerador** las partes que tomamos de la misma. El **numerador** se sitúa arriba y el **denominador** abajo.

$$\frac{\mathbf{3}}{4}$$ 3 es el numerador del quebrado 3/4

$$\frac{3}{\mathbf{4}}$$ 4 es el denominador del quebrado 3/4

1.4.1. Equivalencia de quebrados

Sean los quebrados 1/2 y 2/4, y los vamos a representar mediante las siguientes figuras:



1/2 significa que hemos dividido el círculo en 2 partes y hemos tomado una. 2/4 significa que hemos dividido el círculo en 4 partes y hemos tomado dos: Como vemos, la superficie gris en el primer círculo es la misma que la suma de las dos grises en el segundo círculo. Por tanto 1/2 y 2/4 representan la misma superficie, y estos quebrados se dice que son equivalentes. **Dos quebrados son equivalentes cuando representan la misma cantidad.**

Si en un quebrado multiplicamos o dividimos el numerador y el denominador por un mismo número, el quebrado que obtenemos es equivalente al primero, ya que representa la misma cantidad.

Vamos a comprobarlo:

Multiplicando el numerador y el denominador de 6/12 por 3, se obtiene:

$$\frac{6}{12} = \frac{6 \times 3}{12 \times 3} = \frac{18}{26} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Dividiendo el numerador y el denominador de 6/12 por 2, se obtiene:

$$\frac{6}{12} = \frac{\frac{6}{2}}{\frac{12}{2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

1.4.2. Lectura de quebrados

En este mismo apartado ya hemos visto como se leen los quebrados cuyo denominador es inferior a 11.

Cuando el denominador es igual o mayor que 11 leeremos el quebrado nombrando al numerador seguido del denominador y de la palabra **avo** si el numerador es 1 o **avos** si el numerador es distinto de uno, de esta forma tendremos:

$\frac{1}{12}$ un doceavo $\frac{2}{12}$ dos doceavos

1.4.3. Simplificación de quebrados

Consiste en dividir el numerador y el denominador por el mismo número tantas veces como sea posible, por ejemplo:

Si tenemos $\frac{18}{24}$ y dividimos el numerador y el denominador por 2 tendremos: $\frac{9}{12}$ si los dividimos por 3 obtendremos: $\frac{3}{4}$ Como no es posible dividir el numerador y el denominador por otro número, no es posible simplificar más el quebrado.

Debemos observar que $\frac{18}{24}$ y $\frac{3}{4}$ son dos quebrados equivalentes.

1.4.4. Reducción a común denominador

Para sumar o restar quebrados es necesario que los denominadores de todos los quebrados que intervienen en la operación sean iguales. Esto se consigue multiplicando el numerador y el denominador de cada uno de los quebrados por el producto de los denominadores de todos los demás, denominándose a esta operación reducción a común denominador.

Por ejemplo, si tenemos que realizar una operación de suma o resta con los siguientes quebrados.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{3}$$

Para que todos tengan el mismo denominador, realizaremos las siguientes operaciones:

multiplicaremos el numerador y el denominador del primer quebrado, $\frac{1}{2}$, por el producto de los denominadores de los otros quebrados, es decir por 4×3

$$\frac{1 \times 4 \times 3}{2 \times 4 \times 3} = \frac{12}{24} \text{ es equivalente a } \frac{1}{2}$$

multiplicaremos el numerador y el denominador del segundo quebrado $\frac{3}{4}$, por el producto de los denominadores de los otros quebrados, es decir por 2×3

$$\frac{3 \times 2 \times 3}{4 \times 2 \times 3} = \frac{18}{24} \text{ es equivalente a } \frac{3}{4}$$

multiplicaremos el numerador y el denominador del tercer quebrado, $\frac{2}{3}$, por el producto de los denominadores de los otros quebrado por el producto de los denominadores de los otros quebrados, es decir 2×4

$$\frac{2 \times 2 \times 4}{3 \times 2 \times 4} = \frac{16}{24} \text{ es equivalente } \frac{2}{3}$$

En todos ellos el denominador común es 24 y por consiguiente se cumple:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \text{ es equivalente a } \frac{12}{24} + \frac{18}{24} + \frac{16}{24} = \frac{46}{24} = \frac{23}{12}$$

1.4.5. Reducción de un número quebrado a un número decimal

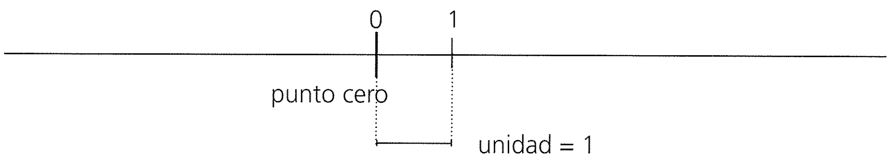
Para convertir un número quebrado en un número decimal basta dividir el numerador por el denominador. De esta forma:

1/4 equivale a 0,25

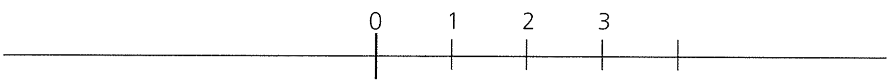
1.5. NÚMEROS NEGATIVOS. OPERACIONES (sólo categorías B y A)

1.5.1. Números negativos

Tracemos una recta infinita (tan larga como queramos) hacia la derecha y hacia la izquierda, y marquemos un punto al que llamaremos **punto cero u origen.** Tomemos, además, una longitud arbitraria (la que queramos) que servirá de **unidad de medida.**

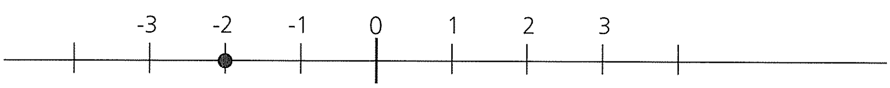


Pongamos dicha unidad de longitud repetidas veces hacia la derecha. De este modo podremos representar cualquier **número entero positivo** sobre la recta.



Haciendo la misma operación por la izquierda del origen podemos representar cualquier **número entero negativo.**

En la siguiente representación hemos señalado un punto a la izquierda del punto cero con el número -2.



Este número nos indica que el punto se encuentra a la izquierda del origen y que la distancia al punto cero es de dos unidades.

Los puntos situados a la izquierda del punto cero representan los números negativos, y siempre se indican con el signo menos delante ("-").

Algunas veces hemos utilizado números negativos. Por ejemplo, cuando hace mucho frío, decimos que la temperatura es de 7 grados bajo cero. Podemos indicarlo de otra forma: la temperatura es menos 7 grados (-7).

Cuando dos números son iguales pero su signo es distinto, diremos que son opuestos. De esta forma las siguientes parejas de números, uno positivo y otro negativo, están formadas por números opuestos.

3,25	-3,25
+6	-6
1.525	-1.525

La suma de dos números opuestos, siempre es igual a cero,

(-3) + (+3) =0

Si subimos -3 peldaños de una escalera, queremos indicar que bajamos 3 escalones. Entonces si subimos (-3) peldaños y luego subimos (+3) peldaños, nos encontraremos en el punto original, no hemos subido ni bajado ningún escalón.

1.5.2. Significado de los signos + y -

Los signos + y - tienen dos significados diferentes:

Para indicar la operación que hay que realizar con dos números (suma o resta).

Para indicar si un número es positivo o negativo.

Cuando un número es positivo, muchas veces, se suprime su signo.

A fin de evitar las confusiones derivadas del doble significado de los signos + y - se utilizan los paréntesis. De esta forma tenemos:

$$(+3) \times (-5) \times (+16)$$

debemos notar que podemos eliminar los signos de los números 3 y 16, y los paréntesis que los encierran por ser positivos.

$$3 \times (-5) \times 16$$

sin que por ello la operación pierda su significado.

Cuando un paréntesis va precedido por el signo más, éste puede eliminarse. De esta forma:

$$+ (30 - 5) = 30 - 5$$

Cuando deseamos eliminar un paréntesis que va precedido por el signo menos, debemos cambiar todos los signos de sumar y restar que haya dentro de él. Así

$$- (30 - 5) = - 30 + 5$$

También podemos aplicar las reglas anteriores a la inversa, de esta forma tenemos:

$$8 + 9 - 16 = + (8 + 9 - 16)$$

$$- 8 - 9 + 16 = - (8 + 9 - 16)$$

1.5.3. Valor absoluto

Llamamos valor absoluto de un número al valor que tiene sin considerar el signo. Así

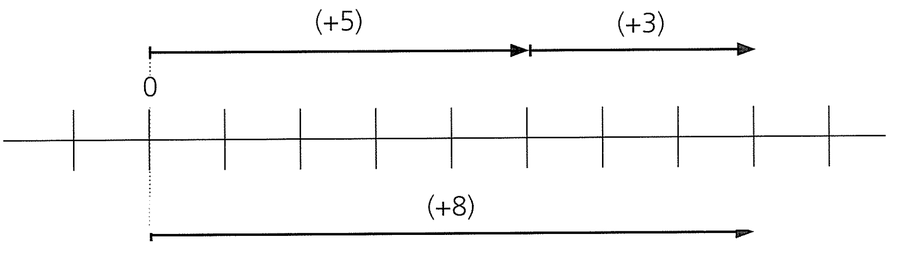
- 7 y + 7 tienen el mismo valor absoluto, 7

1.5.4. Operaciones con números negativos

1.5.4.1. Suma

Para sumar dos números positivos

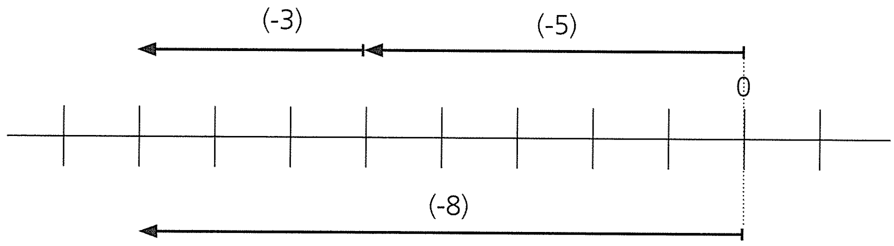
$(+5) + (+3) = (+8)$ gráficamente haríamos



Como vemos, al sumar gráficamente, ponemos una flecha detrás de otra. El resultado es una flecha de longitud igual a la suma de las otras dos.

Para sumar dos números negativos el proceso es similar al de sumar dos números positivos.

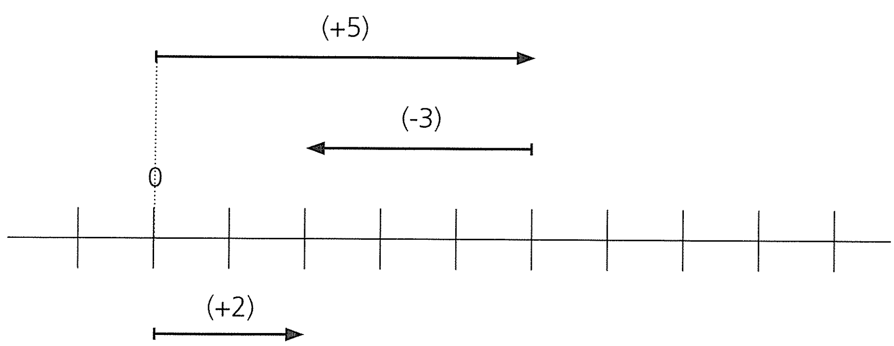
(-5) + (-3) = (-8)



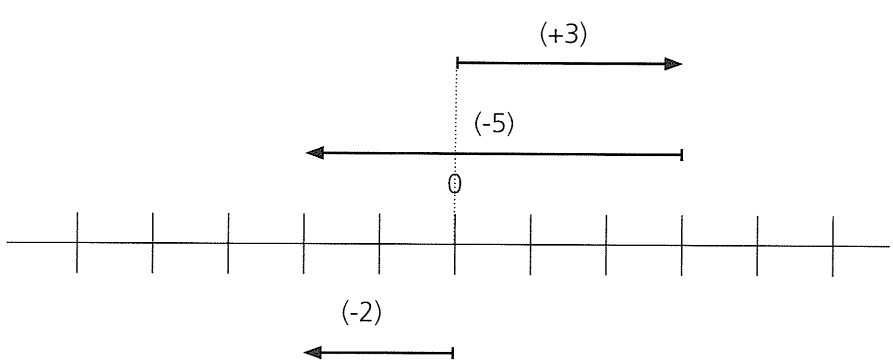
se suman los valores absolutos y al resultado hay que añadirle el signo menos ("-").

Cuando debe realizarse la suma de un número positivo y otro negativo, podemos tener dos casos: que **el valor absoluto del número positivo sea mayor** que el valor absoluto del número negativo o que **el valor absoluto del número negativo sea mayor** que el valor absoluto del número positivo.

(+5) + (-3) = (+2)



(+3) + (-5) = (-2)



Si nos fijamos

(+5) + (-3) = 5 - 3 = 2
(+3) + (-5) = 3 - 5 = -2

la suma de un número positivo y otro negativo consiste en una resta, en la cual se resta del mayor valor absoluto el valor absoluto menor. Y el signo del resultado es el signo del número de mayor valor absoluto.

1.5.4.2. Resta

Vamos a realizar la siguiente operación, (-5) - (-3)

Para ello se eliminan los paréntesis y se opera:

$$-5 + 3 = (-5) + (+3) = -2$$

como vemos la resta de dos números negativos consiste en la suma de uno positivo y otro negativo.

1.5.4.3. Multiplicación y división

Al efectuar el producto o la división de números positivos y negativos debe operarse como si se tratara de números positivos. El signo del resultado se rige por la siguiente regla:

Multiplicando Dividendo	Multiplicador Divisor	Producto Cociente	Resto
+	+	+	+
+	-	-	+
-	+	-	-
-	-	+	-

Ejemplo

Efectuar el siguiente producto

$$250 \times (-41)$$

Multiplicamos los valores absolutos

$$\begin{array}{r} 250 \\ \times\ 41 \\ \hline 250 \\ 1000 \\ \hline 10250 \end{array}$$

y el signo del producto es "-" ya que el multiplicando es positivo y el multiplicador es negativo, luego

$$250 \times (-41) = -\ 10.250$$

Efectuar la división siguiente:

$$(-250) : (-41)$$

en primer lugar efectuamos el cociente del valor absoluto

$$\begin{array}{r|l} 250 & 41 \\ \cline{2-2} 4 & 6 \end{array}$$

como el dividendo es negativo al igual que el divisor, el cociente es positivo y el resto es negativo

cociente = 6

resto = - 4

1.5.4.4. Operaciones combinadas

Cuando se tiene un conjunto de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, con algunas de ellas encerradas entre paréntesis:

$$2 + 5 - \frac{6}{3} + 4 \times (23 + 2) - 2 =$$

debe operarse con el siguiente **orden de prioridad:**

1) Efectuar las operaciones que se encuentran encerradas entre paréntesis

$$= 2 + 5 - \frac{6}{3} + 4 \times 25 - 2 =$$

2) Calcular las multiplicaciones y divisiones

$$= 2 + 5 - 2 + 100 - 2 =$$

3) Agrupar los números positivos y negativos entre paréntesis

$$= (2 + 5 + 100) - (2 + 2) =$$

4) Sumar los números que se encuentran dentro de cada paréntesis

$$= (107) - (4) =$$

5) Efectuar la resta

$$= 103$$

Recordemos que en **una operación combinada sin paréntesis** donde haya multiplicaciones, divisiones, sumas y restas, la prioridad es:

1. multiplicaciones (×) y divisiones (:)

2. sumas (+) y restas (-)

Si tenemos que calcular:

$$4 + 5 \times 3$$

primero efectuaremos el producto 5×3, y al resultado le sumaremos 4.

$$4 + 5 \times 3 = 4 + 15 = 19$$

Si en primer lugar realizáramos la suma de 4 y 5, y el resultado lo multiplicáramos por 3 obtendríamos 27. Este resultado no es correcto y no coincide con el anterior (19).

Si en primer lugar debemos efectuar la suma, lo indicaremos mediante unos paréntesis:

$$(4 + 5) \times 3$$

ya que las operaciones que se encuentran encerradas entre paréntesis tienen prioridad sobre el resto de operaciones.

Ejemplo:

Efectuar la siguiente operación:

$$7 - (2 \times 3 + 8 : 2) \times 3 + 4 \times 5 - 11$$

Para realizar esta operación se han de seguir los cinco pasos indicados teniendo en cuenta el orden de prioridad de las operaciones:

$$7 - (2 \times 3 + 8 : 2) \times 3 + 4 \times 5 - 11 =$$

$$7 - (6 + 4) \times 3 + 4 \times 5 - 11 =$$

$$7 - 10 \times 3 + 4 \times 5 - 11 =$$

$$7 - 30 + 20 - 11 =$$

$$(7 + 20) - (30 + 11) =$$

$$27 - 41$$

$$= - 14$$

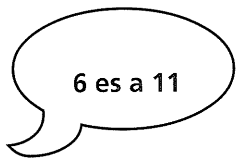
1.6. PROPORCIONALIDADES

1.6.1. Razones

A todo cociente de dos números se le puede llamar también **razón**, y escribirse con los números separados por dos puntos (:) o como quebrados. Por ejemplo:

3: 5	$\frac{3}{5}$
6:11	$\frac{6}{11}$

Razón



se lee

$\frac{6}{11}$ **ó 6 :11**

se escribe

A los números que forman la razón se les llama **términos de la razón.** Al término que se encuentra a la izquierda o arriba de la razón se le llama **antecedente,** y el que se encuentra a la derecha o abajo **consecuente.**

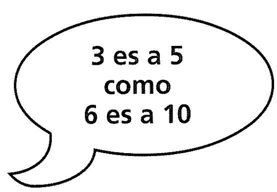
$\mathbf{3} : 4$ $\frac{\mathbf{3}}{4}$	3 es el término antecedente	$3 : \mathbf{4}$ $\frac{3}{\mathbf{4}}$	4 es el término consecuente

Para hallar el valor de una razón, del mismo modo que para hallar el valor de un quebrado, debemos dividir el término antecedente por el consecuente.

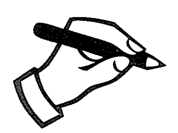
1.6.2. Proporciones

Se le llama **proporción** a dos razones que tengan el mismo valor, por ejemplo, 3 : 5 y 6:10.

Proporción



se lee



$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

se escribe

A los términos de una proporción se les llama extremos y medios. Los *términos* **extremos** son los que se leen en primer y último lugar, y los **medios** son los que se leen en segundo y tercer lugar.

Si colocamos una proporción en forma de quebrado, los extremos son el antecedente de la primera razón y el consecuente de la segunda.

extremo $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ extremo

Los medios son el consecuente de la primera razón y el antecedente de la segunda.

medio $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ medio

En una proporción, el producto de extremos es siempre igual al producto de medios.

Vamos a demostrarlo, sea la siguiente proporción:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

donde 3 y 10 son los extremos y 5 y 6 son los medios. El producto de los extremos 3 y 10 es:

$$3 \times 10 = 30$$

y el producto de los medios 5 y 6 es:

$$5 \times 6 = 30$$

como podemos observar el producto de 3 y 10 (extremos) es igual al producto de 6 y 5 (medios).

1.7. ESCALAS (sólo categorías B y A)

Para realizar trabajos nos basamos en dibujos que nos dan una idea suficientemente exacta de aquello que tenemos que realizar. Estos dibujos están incluidos en los proyectos de las obras a realizar, pero no están dibujados a tamaño natural porque esto sería imposible en la mayoría de los casos.

Habrás observado que entre estos dibujos y la forma real de la instalación existe una proporción, de modo que si una tubería tiene doble longitud que otra en el dibujo, tiene asimismo doble longitud en la realidad, conservándose las proporciones. Esto es debido a que estos dibujos están realizados a escala.

Una escala es una unidad de medida que guarda una determinada proporción conocida con la unidad de medida real. Así, dibujamos los elementos a escala utilizando esta nueva unidad de medida.

Las medidas que aparecen reflejadas en los planos a escala se denominan cotas. Veamos un ejemplo sencillo de escala de reducción:

Supongamos que tenemos un objeto que mide 9 × 4 m, el cual deseamos representar en un papel cuyas medidas son 1 × 0,5 m.

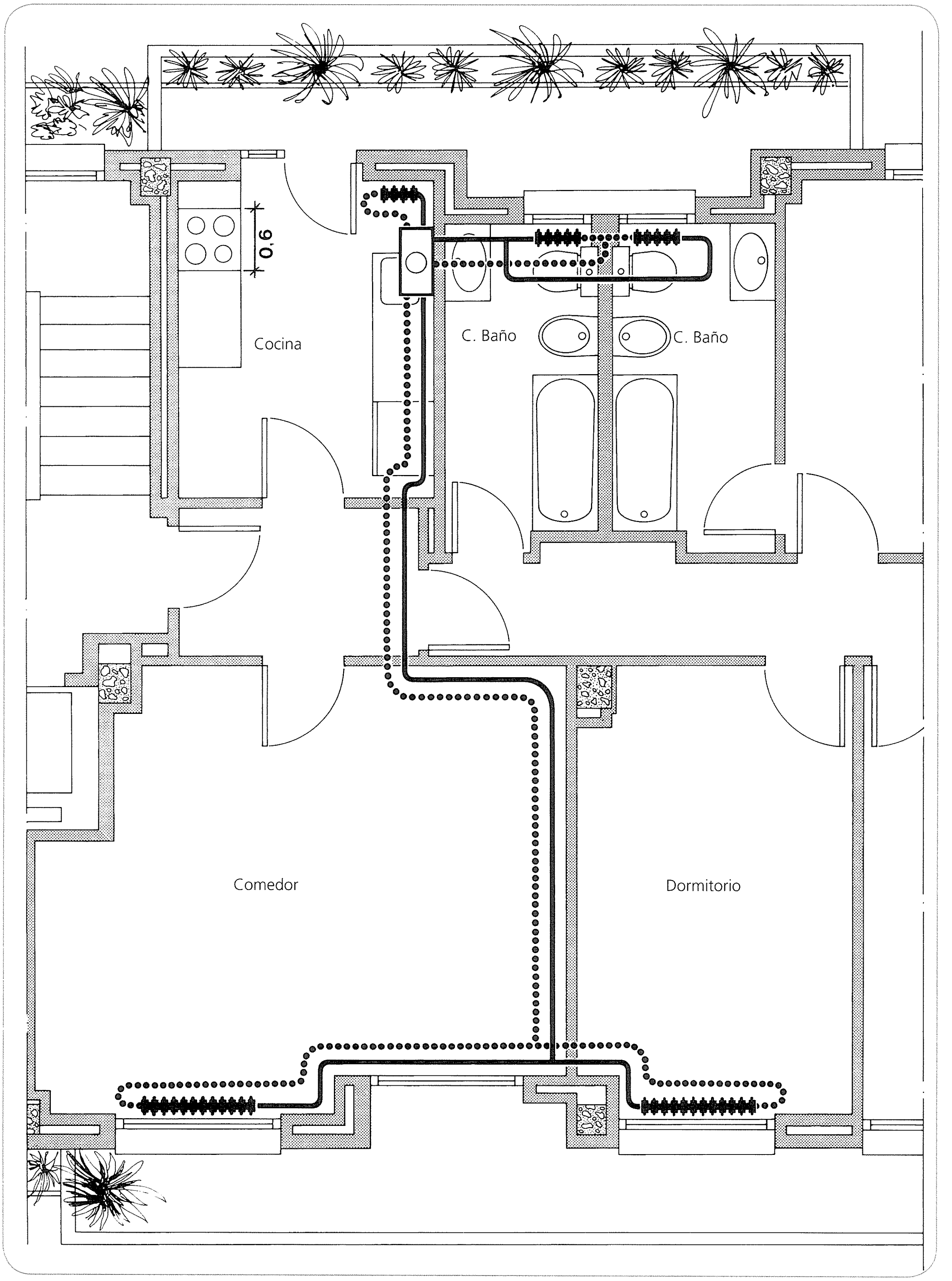
Entonces nos conviene coger la escala "1 es a 10" que se escribe ESCALA: 1:10 y que significa que cada metro en el papel equivale a 10 metros en la realidad, o lo que es lo mismo, todas las medidas del dibujo son las del objeto representado divididas por diez.

Así, para realizar el dibujo, iremos midiendo el objeto en dimensiones reales; dividiremos estas medidas por 10 y las trasladaremos al papel, consiguiendo así un dibujo a escala: 1:10.

Igualmente si tenemos un dibujo hecho a escala: 1:10 y queremos saber cualquier medida real de un elemento en él representado, bastará que midamos este elemento sobre el dibujo y las dimensiones obtenidas las multiplicamos por 10 para tener sus dimensiones reales.

Las escalas se escogen siempre a conveniencia, para poder representar aquello que nos interesa sobre un papel de dimensiones adecuadas para su manejo, así para dibujar un camión a escala podríamos utilizar una escala 1:10 ó 1:25, pero para dibujar el plano de una urbanización utilizaríamos escalas de 1:1.000, 1:2.500 ó 1:5.000 según el tamaño de la misma.

Veamos ahora un ejemplo real:
Fíjate en el plano representado en la figura siguiente. Está dibujado a ESCALA: 1:50.



Si ahora mides cualquier elemento representado en el plano y multiplicas por 50 la medida obtenida del dibujo, sabrás cuál es la dimensión real del mencionado objeto. En el plano las dimensiones de la caldera son 13 mm × 6 mm. En la realidad sus dimensiones son 65 cm × 30 cm.

Si realizas esta operación con un elemento acotado, por ejemplo la cocina de gas, verás que la medida real del elemento coincide con el valor que viene en la cota.

Haz algunas comprobaciones.

Fíjate ahora que para dibujar en este plano un nuevo elemento, deberíamos dividir por 50 las medidas reales del nuevo elemento y dibujarlo con las nuevas medidas. Así, si se tratara de un radiador de calefacción, que tuviera una longitud de 1 m deberíamos dibujarlo sobre papel con una longitud de 1 m : 50 m = 0,02 m = 2 cm.

Escalas de ampliación:

Al igual que existen escalas de reducción también se utilizan escalas de ampliación. Estas escalas se utilizan cuando se quieren representar con detalle elementos muy pequeños. La obtención de las medidas reales se consiguen realizando las operaciones opuestas a las indicadas en el apartado anterior.

1.8. REGLA DE TRES SIMPLE

La regla de tres nos permite resolver problemas que dependen de una proporción. Se llama regla de tres porque siempre hay tres términos conocidos y uno desconocido.

Ejemplo:

Hemos comprobado que en 5 minutos salen por una tubería 100 litros de agua. ¿Cuántos litros saldrán en una hora?

5 min	100 l
60 min	x l

Los litros que salen en una hora (= 60 minutos) son proporcionales a los que salen en 5 minutos, por tanto tenemos una proporción. Llamemos x a los litros que salen en una hora, entonces podemos decir 5 es a 60 como 100 es a x, y escribiremos

$$\frac{5}{60} = \frac{100}{x}$$

Sabemos que el producto de extremos es igual al producto de medios

$$5 \cdot x = 60 \times 100$$

dividiendo por 5 las expresiones a cada lado del signo igual, tenemos

$$x = \frac{60 \cdot 100}{5} = 1.200 \text{ litros}$$

La regla de tres puede ser directa o inversa.

1.8.1. Regla de tres simple directa

La regla de tres directa se aplica cuando las magnitudes del problema son directamente proporcionales, es decir, van de más a más, o de menos a menos.

Ejemplo:

Un coche en 2 horas recorre 150 km. ¿Cuántos km recorrerá en 9 h?

2 h	150 km
9 h	x km

Cuantas más horas el coche circule, más kilómetros recorrerá, por tanto tenemos una regla de tres directa.

Podemos escribir, de forma similar al problema anterior:

$$\frac{2}{9} = \frac{150}{x}$$

despejando x tendremos:

$$x = \frac{9 \cdot 150}{2} = 676 \text{ km}$$

1.8.2. Regla de tres simple inversa

Esta regla se aplicará cuando las magnitudes del problema son inversamente proporcionales, es decir, van de menos a más, o de más a menos.

Ejemplo:

Un gas al circular por el interior de una tubería a una velocidad de 3 m/s, tarda en realizar un recorrido 8 segundos. ¿Cuánto tiempo tardará en realizar el mismo recorrido a una velocidad de 7 m/s?

3 m/s	8 s
7 m/s	x s

Cuanto **mayor** sea la velocidad, **menor** es el tiempo que tardará en realizar el mismo recorrido, por tanto debemos aplicar la regla de tres inversa para resolver el problema.

En la regla de tres simple directa el planteamiento sería:

$$\frac{3}{7} = \frac{8}{x}$$

Pero en la regla de tres simple inversa se invierte el término de la derecha. El planteamiento es, pues:

$$\frac{3}{7} = \frac{x}{8}$$

despejando x tenemos

$$x = \frac{3 \cdot 8}{7} = 3,4 \quad \text{segundos}$$

1.9. PORCENTAJES

1.9.1. Tanto por ciento

El tanto por ciento nos indica de cien unidades cuántas nos corresponden. Es un caso particular de la regla de tres simple directa.

En los problemas de porcentajes siempre sabemos que a 100 unidades le corresponden n, y deseamos conocer cuántas unidades le corresponden a m, donde n y m son conocidos, es decir, se plantea la proporción

$$\frac{n}{100} = \frac{x}{m}, \qquad \text{despejando x:} \qquad \boxed{x = m \cdot \frac{n}{100}}$$

donde:

n es el tanto por ciento aplicado

m es la cantidad a la que se aplica el tanto por ciento

× es la cantidad resultante de aplicar el tanto por ciento a m

Ejemplo:

Una factura asciende a 160 €, y el comerciante nos indica que realizará un 20 por ciento de descuento. ¿Cuánto deberemos pagar?

El comerciante nos indica que por cada 100 € de compra nos descuenta 20, deseamos conocer que descuento corresponde al importe de la factura.

$$x = 160 \times \frac{20}{100} = 32 \text{ € de descuento}$$

por tanto:

total factura = importe factura - descuento = 160 - 32 = 128 €

1.9.2. Tanto por uno

El tanto por uno nos indica de una unidad cuánto nos corresponde.

Si conocemos el tanto por ciento, n, el tanto por uno se obtiene dividiendo n por cien y se deduce de aplicar la siguiente regla de tres simple

$$\frac{n}{100} = \frac{x}{1}, \qquad \text{despejando x}$$

$$\boxed{x = \cdot \frac{n}{100}}$$

donde:

x es el tanto por uno

n es el tanto por ciento

Ejemplo:

Una factura asciende a 160 €, y el comerciante nos indica que realizará un 20 % de descuento, el tanto por uno será pues:

$$x = \frac{n}{100} = \frac{20}{100} = 0,20$$

Es decir, el comerciante nos indica que por cada euro que compremos, nos descuenta 20 céntimos de euro.

Para calcular el descuento que nos hace el comerciante utilizando el tanto por uno, planteamos la proporción siguiente

$$\frac{0,20}{1} = \frac{x}{160} \quad \text{despejando x queda:}$$

$$x = \frac{0,20 \cdot 160}{1} = 0,20 \cdot 160 = 32 \text{ €}$$

Como habréis observado para calcular el descuento basta multiplicar el importe por el tanto por uno.

1.10. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

1.10.1. Unidades de medida de longitud (m, dm, cm, mm)

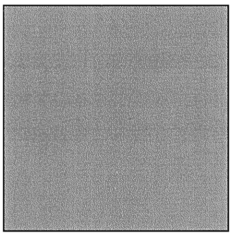
El Sistema Internacional de Unidades, conocido por sus siglas SI, emplea como unidad de medida de la longitud el metro, cuyo símbolo es m.

El metro tiene múltiplos y submúltiplos. En el siguiente cuadro se establecen sus equivalencias:

	Denominación	Símbolo	Equivalencia
Múltiplos	kilómetro	km	1 000 m
	hectómetro	hm	100 m
	decámetro	dam	10 m
Unidad	metro	m	1 m
Submúltiplos	decímetro	dm	1 dm = 0,1 m
	centímetro	cm	1 cm = 0,01 m
	milímetro	mm	1 mm = 0,001 m

1.10.2. Unidades de medida de superficie (m^2, dm^2, cm^2, mm^2)

En el Sistema Internacional de Unidades **la unidad de superficie (o área) es el metro cuadrado (m^2)** que equivale a un cuadrado de un metro de lado.



1 metro

El metro cuadrado, como todas las unidades, tiene múltiples y submúltiplos, que se resumen en el siguiente cuadro.

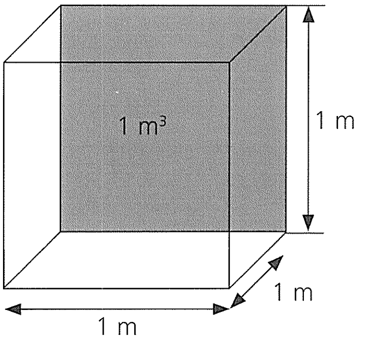
	Denominación	Símbolo	Equivalencia
Múltiplos	kilómetro cuadrado	km^2	1 000 000 m^2
	hectómetro cuadrado	hm^2	10 000 m^2
	decámetro cuadrado	dam^2	100 m^2
Unidad	metro cuadrado	m^2	1 m^2
Submúltiplos	decímetro cuadrado	dm^2	0,01 m^2
	centímetro cuadrado	cm^2	0,000 1 m^2
	milímetro cuadrado	mm^2	0,000 001 m^2

Otras unidades muy empleadas para la medida de las superficies son el **área (a)** que equivale a 100 m^2, y la **hectárea (ha)** que equivale a 10.000 m^2.

$$1\ a = 1\ dam^2 = 100\ m^2$$
$$1\ m^2 = 0{,}01\ a$$
$$1\ ha = 1\ hm^2 = 10\ 000\ m^2$$
$$1\ m^2 = 0{,}0001\ ha$$

1.10.3. Unidades de medida de volumen (m^3, dm^3, l, cm^3, mm^3)

En el Sistema Internacional de Unidades la **unidad de volumen es el metro cúbico (m^3),** que equivale al volumen de un paralelepípedo cuyas aristas tienen un metro de largo



El metro cúbico tiene múltiplos y submúltiplos, como nos muestra el siguiente cuadro:

	Denominación	Símbolo	Equivalencia
Múltiplos	kilómetro cúbico hectómetro cúbico decámetro cúbico	km^3 hm^3 dam^3	1 000 000 000 m^3 1 000 000 m^3 1000 m^3
Unidad	metro cúbico	m^3	1 m^3
Submúltiplos	decímetro cúbico centímetro cúbico milímetro cúbico	dm^3 cm^3 mm^3	0,001 m^3 0,000 001 m^3 0,000 000 001 m^3

Otra unidad muy utilizada para la medida de volúmenes es el litro (l), el cual equivale a 1 dm^3.

$$1\ l = 1\ dm^3$$

Nota: Como símbolo de la unidad litro el SI admite también la L, para evitar confusiones entre la l y el 1.

1.11. POTENCIAS Y RAÍCES CUADRADAS. POTENCIAS EN BASE 10 Y EXPONENTE NEGATIVO (sólo categorías B y A)

1.11.1. Potencias

Cuando en un producto dado todos los factores son iguales, al producto se le llama **potencia.** De esta forma los siguientes productos son potencias.

7×7

$5 \times 5 \times 5$

$3 \times 3 \times 3 \times 3$

$0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5$

1.11.2. Representación de una potencia

Una potencia se representa mediante dos números: la **base** y el **exponente.**

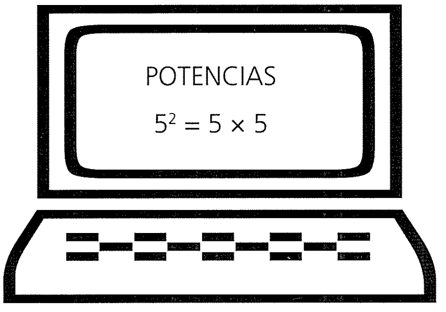
7×7 se representa por 7^2
porque 7 se repite como factor 2 veces

$5 \times 5 \times 5$ se representa por 5^3
porque 5 se repite como factor 3 veces

$3 \times 3 \times 3 \times 3$ se representa por 3^4
porque 3 se repite como factor 4 veces

$0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5$ se representa por $0,5^6$
porque 0,5 se repite como factor 6 veces

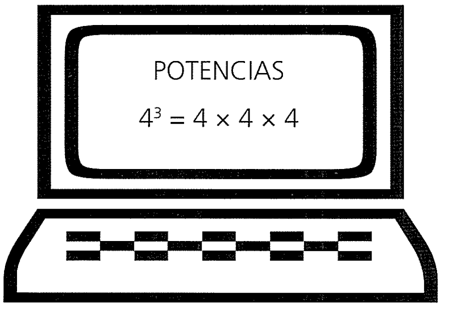
El número que se repite como factor se llama **base.**



5 es la BASE

Así en las siguientes potencias

7^2 la base es 7
5^3 la base es 5
3^4 la base es 3
$0,5^6$ la base es 0,5



4 es la BASE **3 es el EXPONENTE**

Y el número escrito en la parte superior derecha que indica las veces que se tiene que repetir la base se llama exponente.

De forma que en las siguientes potencias

7^2 el exponente es 2
5^3 el exponente es 3
3^4 el exponente es 4
$0,5^6$ el exponente es 6

1.11.3. Potencias de base 10 con exponente entero

$10^1 = 10$
$10^2 = 10 \times 10 = 100$
$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1.000$
$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10.000$, etc.

Las potencias cuya base es 10 nos permiten simplificar la representación de cantidades. El número seis millones, se escribe de la siguiente forma:

6.000.000

pero como $6.000.000 = 6 \times 1.000.000$
y $1.000.000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$

podemos escribirlo también como:

$6.000.000 = 6 \times 10^6$

Ejemplo

Vamos a representar 2.525 de diferentes maneras

2.525
$252{,}5 \times 10$
$25{,}25 \times 10^2$
$2{,}525 \times 10^3$
$0{,}2525 \times 10^4$

y así sucesivamente

1.11.4. Lectura de una potencia

Para leer una potencia:

3^4

1) Se lee el número que representa la base

tres

2) a continuación se pone la frase "elevado a"

tres **elevado a**

3) por último, se lee el número del exponente

tres elevado a **cuatro**

Ejemplo

Vamos a leer las siguientes potencias:

17^4 = diecisiete elevado a cuatro

5^6 = cinco elevado a seis

7^8 = siete elevado a ocho

35^4 = treinta y cinco elevado a cuatro

Las únicas excepciones las tenemos cuando el exponente es 2 ó 3.

Cualquier número que tenga de exponente el número 2, representa el **cuadrado** de este número.

24^2 representa el cuadrado de 24

y lo leemos como

veinticuatro elevado al cuadrado

7^2 siete elevado al cuadrado

Cualquier número que tenga de exponente el número 3, representa el **cubo** de este número.

24^3 representa el cubo de 24

y lo leemos como

veinticuatro elevado al cubo

7^3 lo leemos como siete elevado al cubo

1.11.5. Propiedades de las potencias

1) Para elevar un producto a una potencia, se eleva cada factor a dicha potencia.

$$(3 \times 4 \times 6)^{28} = 3^{28} \times 4^{28} \times 6^{28}$$

2) Para elevar un cociente a una potencia, se eleva el dividendo y el divisor a dicha potencia.

$$(3 : 7)^{14} = 3^{14} : 7^{14}$$

3) Para multiplicar potencias de igual exponente se multiplican las bases y el producto se eleva al exponente.

$$2^{35} \times 1^{35} \times 4^{35} = (2 \times 1 \times 4)^{35} = 8^{35}$$

4) Para dividir potencias de igual exponente, se dividen las bases y el cociente se eleva al exponente.

$$21^{20} : 7^{20} = (21 : 7)^{20} = 3^{20}$$

5) Para multiplicar potencias que tengan la misma base, se pone por base la misma y por exponente la suma de exponentes.

$$7^{20} \times 7^{30} = 7^{20+30} = 7^{50}$$

6) Para dividir potencias que tengan la misma base, se pone por base la misma y por exponente la diferencia entre el exponente del numerador y el exponente del denominador.

$$16^{85} : 16^{3} = 16^{85-3} = 16^{82}$$

7) Para elevar una potencia a otra potencia se pone por base la de la potencia y por exponente el producto de los exponentes.

$$(184^{5})^{3} = 184^{5x3} = 184^{15}$$

Ejemplo

Vamos a reducir a una sola potencia la siguiente expresión:

$$\frac{(10^2)^6}{5^2 \times 2^2} \times \frac{30^8 \times 30^2}{3^{10}}$$

Como $(10^2)^6 = 10^{2x6} = 10^{12}$ tenemos

$$\frac{(10^2)^6}{5^2 \times 2^2} \times \frac{30^8 \times 30^2}{3^{10}} = \frac{10^{12}}{5^2 \times 2^2} \times \frac{30^8 \times 30^2}{3^{10}}$$

ahora podemos simplificar $5^2 \times 2^2 = (5 \times 2)^2 = 10^2$

$$\frac{10^{12}}{5^2 \times 2^2} \times \frac{30^8 \times 30^2}{3^{10}} = \frac{10^{12}}{10^2} \times \frac{30^8 \times 30^2}{3^{10}} =$$

simplificamos $\frac{10^{12}}{10^2} = 10^{12-2} = 10^{10}$

$$\frac{10^{12}}{10^2} \times \frac{30^8 \times 30^2}{3^{10}} = 10^{10} \times \frac{30^8 \times 30^2}{3^{10}}$$

$30^8 \times 30^2 = 30^{8+2} = 30^{10}$ por tanto

$$10^{10} \times \frac{30^{8} \times 30^{2}}{3^{10}} = 10^{10} \times \frac{30^{10}}{3^{10}}$$

y como $$\frac{30^{10}}{3^{10}} \times \frac{(3 \times 10)^{10}}{3^{10}} = \frac{3^{10} \times 10^{10}}{3^{10}} = 10^{10}$$

$$10^{10} \times \frac{30^{10}}{3^{10}} = 10^{10} \times 10^{10} = 10^{10+10} = 10^{20}$$

1.11.6. Potencias de exponente negativo

Supongamos

$$\frac{6^{5}}{6^{8}}$$

aplicando las propiedades que hemos visto

$$\frac{6^{5}}{6^{8}} = 6^{5-8} = 6^{-3}$$

¿Que significa 6^{-3}? Volvamos al principio

$$\frac{6^{5}}{6^{8}} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{6^{3}}$$

Es decir 6^{-3} es igual a $\frac{1}{6^{3}}$

Un número elevado a un exponente negativo es igual a 1 dividido por el mismo número elevado al valor absoluto del exponente.

1.11.7. Raíces cuadradas

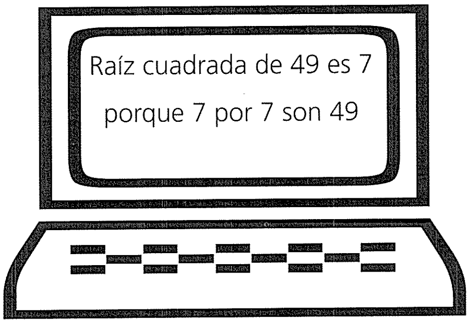
Recordemos que las potencias que tienen como exponente el número 2 se llaman cuadrados. De forma que:

9^2 representa el cuadrado del número 9

Para calcular el cuadrado de un número, éste se multiplica por sí mismo, es decir:

$9^2 = 9 \times 9 = 81$

La **raíz cuadrada** de un número es otro número que multiplicado por sí mismo nos da el primero.



El signo de la raíz cuadrada es:

$$\sqrt{\ }$$

Algunas raíces cuadradas son sencillas de calcular:

$\sqrt{1} = 1$ porque $1 \times 1 = 1$

$\sqrt{4} = 2$ porque $2 \times 2 = 4$

$\sqrt{9} = 3$ porque $3 \times 3 = 9$

El número al cual vamos a hallar la raíz cuadrada se llama **radical** y el resultado es la **raíz.** En la siguiente raíz cuadrada

$$\sqrt{81} = 9$$

81 es el radical y 9 la raíz. Como vemos, para indicar que vamos a hallar la raíz del número 81, lo colocamos debajo del signo $\sqrt{}$.

1.11.8. Cálculo de la raíz cuadrada

No todas las raíces cuadradas se pueden calcular de memoria.

1.11.8.1. Cálculo de la raíz cuadrada de un número entero

En general, para el cálculo de una raíz cuadrada de un número entero se ha de seguir paso a paso el proceso que se expone a continuación en el ejemplo siguiente

Calcular la raíz cuadrada de 122394

1er. paso: **Empezando por la derecha se separan las cifras del número en grupos de dos en dos**

En nuestro ejemplo: $\sqrt{12.23.94}$

Nota: El primer grupo de la izquierda puede tener una o dos cifras. En ambos casos los pasos a seguir son los mismos.

En nuestro ejemplo el primer grupo de la izquierda es 12 que consta de dos cifras.

2.° paso: **Se halla la raíz cuadrada del primer grupo de la izquierda, es decir, se busca un número de una cifra que multiplicado por sí mismo nos dé el valor de ese grupo o un valor inmediatamente inferior.**

En nuestro ejemplo el cuadrado del número buscado ha de ser igual o inferior a 12.

Probemos con el 4

$$4 \times 4 = 16$$

El 4 no nos sirve ya que su cuadrado es mayor que 12.

Probemos con el 3

$$3 \times 3 = 9$$

El 3 es el número buscado.

Nota: El número hallado se coloca sobre la raya horizontal.

$$\sqrt{12.23.94}\;\Big|\;\underline{3}$$

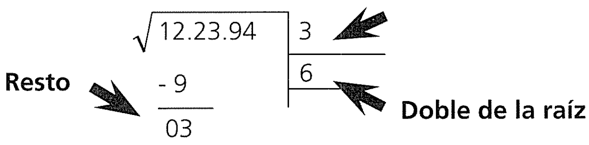
3er. paso: **El número hallado se eleva al cuadrado y el resultado se resta del primer grupo de la izquierda.**

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{12.23.94} & \underline{3} \\ \phantom{\sqrt{}}\underline{-9} & \\ \phantom{\sqrt{}}03 & \end{array}$$

Resto

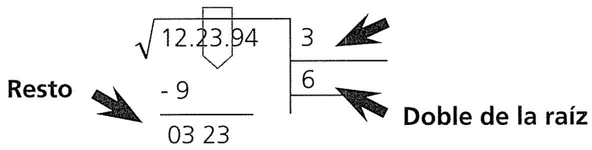
4.° paso: **Se coloca debajo de la raya horizontal el doble de la raíz hallada.**

En nuestro ejemplo, la raíz hallada es 3 y el doble de 3 es 2 × 3 = 6.



Nota: Debajo se traza otra raya horizontal.

5.° paso: **Se baja a la derecha del resto el siguiente grupo de cifras y del número que se forma "se separa" la cifra de las unidades.**

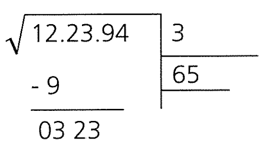


En nuestro ejemplo el número formado es el 323 del que después de separar las cifras de las unidades, el 3, queda el número 32.

6.° paso: **Se busca un número de una sola cifra que multiplicado por el doble de la raíz hallada de un resultado igual o menor que el número del resto que queda sin tener en cuenta la cifra separada.**

En nuestro ejemplo se ha de buscar un número de una cifra que multiplicado por 6 sea menor que 32, este número es el 5 ya que 6 x 5 = 30 es menor que 32.

Nota: Este número de una sola cifra que acabamos de encontrar se coloca a la derecha del doble de la raíz.



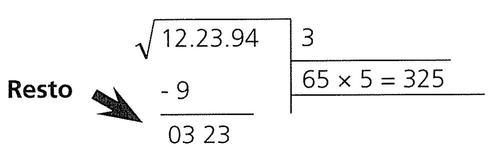
En nuestro ejemplo, entre el doble de la raíz (6) y el número que acabamos de encontrar (5), se forma el número 65.

7.° paso: **Se multiplica el número así formado por la cifra encontrada.**

En nuestro ejemplo

65 × 5 = 325

Nota: El resultado se coloca a continuación.



Nota: El resultado obtenido ha de ser menor que el resto, en caso contrario el número que hemos encontrado no sería válido y se tendría que buscar otro menor.

En nuestro ejemplo 325 es mayor que 323 por ello el número encontrado, el 5, no es válido y se ha de tomar el 4 y realizar otra vez los pasos 6.° y 7.°

8.° paso: **Se coloca el producto obtenido debajo del resto y se realiza la resta.**

	$\sqrt{12.23.94}$	3
	- 9	64 × 4 = 256
	03 23	
Resto	- 2 56	
	0 67	

9.° paso: **Se sube el número encontrado a la raíz.**

$\sqrt{12.23.94}$	34
- 9	64 × 4 = 256
03 23	
- 2 56	
0 67	

A continuación se repiten todos los pasos desde el 4.° al 9.° tantas veces como grupos de dos cifras queden por bajar.

4.°) Se coloca debajo de la segunda raya horizontal el doble de la raíz hallada.

En nuestro ejemplo la raíz hallada es 34 y su doble 68.

	$\sqrt{12.23.94}$	34	
	- 9	64 × 4 = 256	
	03 23	68	
Resto	- 2 56		**Doble de la raíz**
	0 67		

5.°) Se baja a la derecha del resto el siguiente grupo de cifras y del número que se forma "se separan" las cifras de las unidades.

$\sqrt{12.23.94}$	34
- 9	64 × 4 = 256
03 23	68
- 2 56	
0 67 94	

El número formado es el 6794 del que al separar la cifra de las unidades, el 4, queda el número 679.

6.°) Se busca un número de una sola cifra que multiplicado por el doble de la raíz hallada de un resultado igual o menor que el número del resto que queda sin tener en cuenta la cifra separada.

En nuestro ejemplo se ha de buscar un número de una cifra que multiplicado por 68 de un resultado menor que 679.

Se prueba con el 9

68 × 9 = 612

El 9 es válido ya que 612 es menor que 679.

El número encontrado es el 9.

Nota: Este número de una cifra que acabamos de encontrar, el 9, se coloca a la derecha del doble de la raíz.

```
√12.23.94  | 34
           |----------------
  - 9      | 64 × 4 = 256
  ------   |----------------
   3 23    | 689
  - 2 56
  ------
   0 67 94
```

El número formado es el 689.

7.º) Se multiplica el número así formado por la cifra encontrada.

```
        √12.23.94  | 34
                   |----------------
          - 9      | 64 × 4 = 256
          ------   |----------------
           3 23    | 689 ×9 = 6201
Resto     - 2 56
          ------
           0 67 94
```

8.º) Se coloca el producto así obtenido debajo del resto y se efectúa la resta.

```
√12.23.94  | 34
           |----------------
  - 9      | 64 × 4 = 256
  ------   |----------------
   3 23    | 689 ×9 = 6201
  - 2 56
  --------
     67 94
  -  62 01
  --------
     05 93
```

9.º) Se sube el número encontrado a la raíz.

```
        √12.23.94  | 349
                   |----------------
          - 9      | 64 × 4 = 256
          ------   |----------------
           3 23    | 689 ×9 = 6201
          - 2 56
          --------
             67 94
Resto     -  62 01
          --------
             05 93
```

La operación se puede dar por concluida ya que no quedan más grupos de dos cifras con las que operar.

El proceso de cálculo de la raíz cuadrada de 122394 seguido en los pasos anteriores se resume a continuación.

```
        √12.23.94  | 349
                   |----------------
          - 9      | 64 × 4 = 256
          ------   |----------------
           3 23    | 689 ×9 = 6201
          - 2 56
          --------
           0 67 94
Resto     -  62 01
          --------
             05 93
```

Respuesta: La raíz cuadrada de 122394 es 394 y el resto 593.

Cálculo de la raíz cuadrada de un número con decimales

Para el cálculo de la raíz cuadrada de un número con decimales se ha de operar siguiendo paso a paso el proceso que se expone a continuación con un ejemplo.

Calcular la raíz cuadrada de 75,028

1er. paso: **Si el número de cifras decimales es impar se añade un cero a la derecha de la última cifra.**

En nuestro ejemplo hay un número impar de decimales (tres), luego se añade un cero por la derecha 75,0280.

2.° paso: **Se extrae la raíz cuadrada como si fuera un número entero, sin preocuparnos por los decimales, para lo cual se siguen los 9 pasos expuestos en el apartado anterior.**

$\sqrt{75.02.80}$	866
- 64	$8 \times 8 = 64$
11 02	$166 \times 6 = 996$
- 9 96	$1726 \times 6 = 10356$
1 06 80	
- 1 03 56	
0 03 24	

3er. paso: **Se pone la coma en la raíz de modo que queden tantas cifras decimales como grupos de dos cifras decimales tenía el radical.**

En nuestro ejemplo, $\sqrt{75,02,30}$, el radical tiene dos grupos de cifras decimales, luego la raíz cuadrada calculada en el paso anterior ha de tener dos decimales.

	$\sqrt{75.02.80}$	8,66 ← **Raíz**
	- 64	$8 \times 8 = 64$
	11 02	$166 \times 6 = 996$
	- 9 96	$1726 \times 6 = 10356$
	1 06 80	
Resto →	- 1 03 56	
	0,03 24	

Nota: El resto es un número con tantos decimales como el radical.

En nuestro ejemplo ha de tener cuatro decimales.

Luego, la raíz cuadrada de 75,028 es 8,66 y el resto 0,0324.

Prueba de la raíz cuadrada

La prueba de la raíz cuadrada nos permite comprobar si los cálculos realizados han sido correctos, para ello se debe cumplir que

$$(\text{Raíz})^2 + \text{resto} = \text{radical}$$

Apliquemos esta prueba a los dos ejemplos anteriores.

Ejemplo 1

$$(349)^2 + 593 = 122394$$

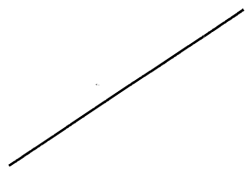
Ejemplo 2

$$(8,66)^2 + 0,0324 = 75,028$$

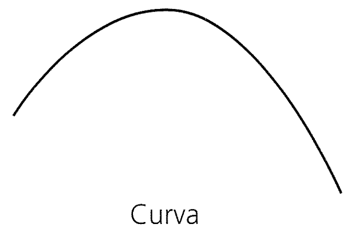
Lo que demuestran que los dos resultados son correctos.

1.12. LÍNEAS: RECTAS Y CURVAS, PARALELAS Y PERPENDICULARES, HORIZONTALES, VERTICALES E INCLINADAS

Una línea es una sucesión de infinitos puntos, uno junto al otro. Según la colocación de estos puntos tendremos diferentes líneas las cuales pueden ser **rectas** o **curvas,** la siguiente figura nos las muestra.

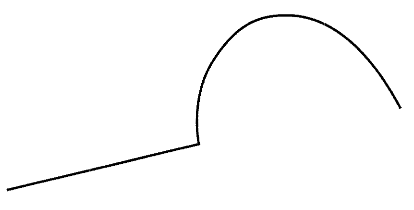


Recta

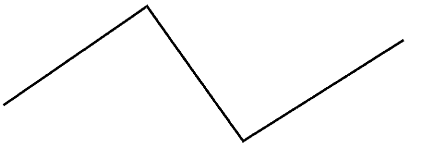


Curva

Cuando se une una línea recta y una curva tenemos una línea **mixta,** si se unen varias líneas rectas tendremos una línea **quebrada.**



Mixta

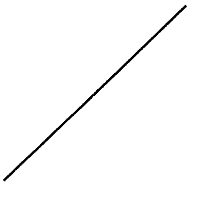


Quebrada

La línea recta considerada aisladamente en el plano, puede adoptar distintas posiciones: **vertical, horizontal e inclinada.**

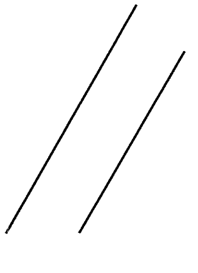
Vertical

Horizontal

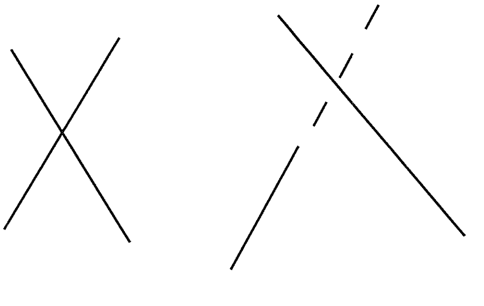


Inclinada

Dos líneas rectas representadas en el plano son **paralelas** cuando no se cortan en ningún punto, ni ellas ni sus prolongaciones. Cuando se cortan en un punto diremos que son **secantes.**

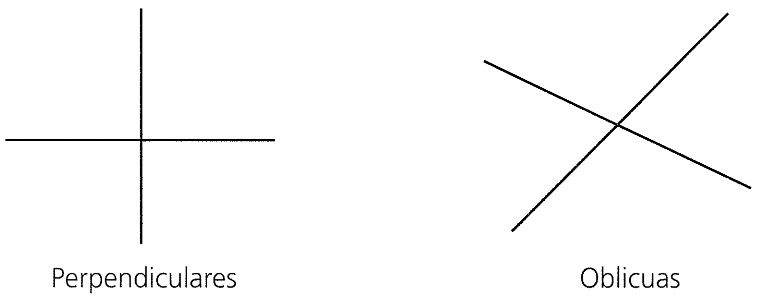


Paralelas



Secantes

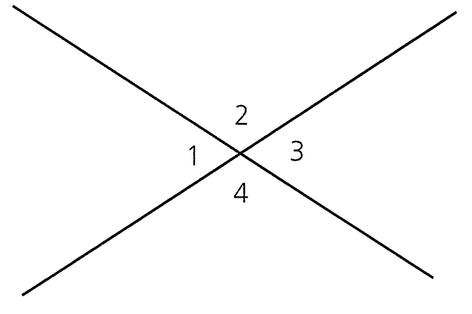
Las rectas secantes pueden ser **perpendiculares y oblicuas.**



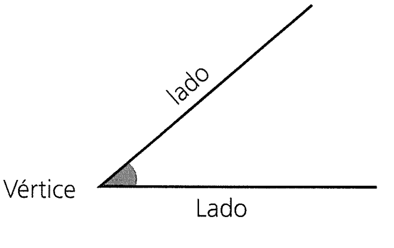
Son perpendiculares cuando dividen el plano en cuatro partes iguales, en caso contrario diremos que son oblicuas.

1.13. ÁNGULO: DENOMINACIÓN. UNIDADES ANGULARES (SISTEMA SEXAGESIMAL). ÁNGULO RECTO, AGUDO, OBTUSO

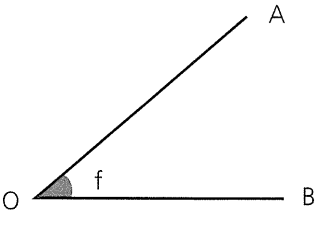
Dos rectas oblicuas dividen el plano en cuatro regiones, como nos muestra la figura:



Cada una de estas regiones define un **ángulo.** Los segmentos de la recta que lo limitan se llaman **lados** y el punto donde se cruzan las rectas **vértice.** Por tanto **un ángulo está formado por dos lados y un vértice.**



1.13.1. Denominación de los ángulos



Los ángulos los podemos nombrar de tres maneras:

1) Mediante las letras que definen sus lados, intercalando entre ellas la letra correspondiente al vértice:

ángulo A O B

2) Mediante la letra de su vértice:

ángulo O

3) Mediante una letra minúscula o número que represente el ángulo:

ángulo f

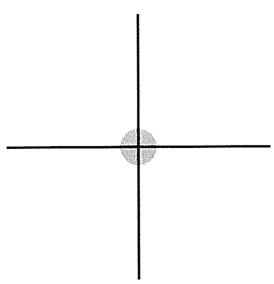
4) Es muy frecuente emplear las letras del alfabeto griego para nombrar los ángulos: ángulo α, ángulo β.

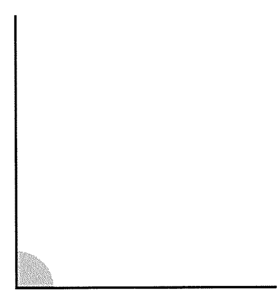
La palabra ángulo la podemos eliminar si utilizamos el símbolo $\wedge$, el cual representa el ángulo:

ángulo A O B	equivale a	$\widehat{AOB}$
ángulo O	equivale a	$\widehat{O}$
ángulo f	equivale a	$\widehat{f}$
ángulo β	equivale a	$\widehat{\beta}$

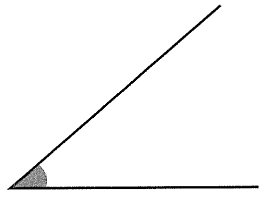
1.13.2. Tipos de ángulos

Cuando dos rectas son perpendiculares dividen el plano en cuatro regiones idénticas, y tenemos cuatro ángulos iguales. A estos ángulos que se obtienen cuando se cruzan dos rectas perpendiculares se les llama ángulos **rectos.**

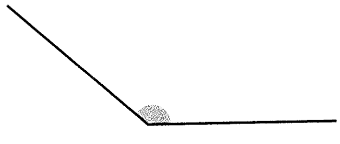


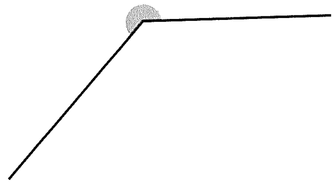


Cuando el ángulo formado por dos rectas es menor al ángulo recto, tendremos un ángulo **agudo.**



y sí es mayor un ángulo **obtuso.**





Un caso particular del ángulo obtuso es el ángulo **llano,** que como nos muestra la siguiente figura, tiene los lados alineados.

1.13.3. Unidades angulares (Sistema sexagesimal)

El SI tiene establecida, dentro de las unidades SI derivadas, como unidad de medida del ángulo plano el **radian**, que es el ángulo central de una circunferencia en que la longitud del arco es igual al radio. Su símbolo el **rad**, equivalente a m/m.

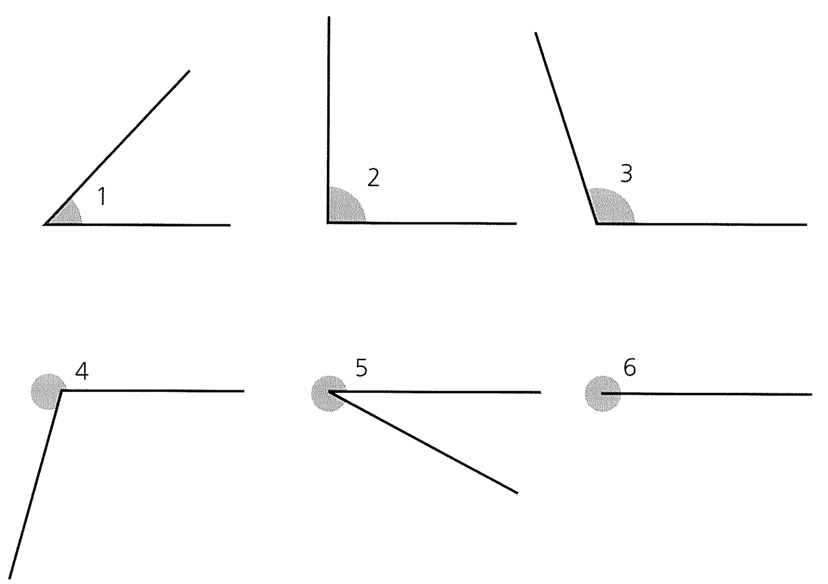
Fuera del SI, pero aceptadas por éste, existen las siguientes unidades, que constituyen el llamado **sistema sexagesimal**:

Magnitud	Unidad	Símbolo	Equivalencias
ángulo plano	grado	°	1° = (π/180) rad
	minuto	′	1 ' = (1/60)° = (π/10 800) rad
	segundo	″	1 " = (1/60)′ = (π/648 000) rad
Nota: π = 3,1416 aproximadamente			

La norma ISO 31 recomienda dividir el grado en fracciones centesimales, en lugar de sexagesimales, pero dicha práctica está aún poco extendida.

Del cuadro anterior se desprende que 1 rad = 180/π ° = 57,296 ° = 57° 17' 44".

Supongamos que tenemos un ángulo agudo el cual vamos abriendo progresivamente.



En el paso 6 lo hemos abierto al máximo. Si dividimos el ángulo 6 en 360 ángulos agudos iguales, cada uno de ellos representará un **grado** en el **sistema sexagesimal.**

El grado, a su vez, lo podemos dividir en 60 partes de iguales y cada una de ellas recibe el nombre de **minuto.**

Y el minuto lo podemos dividir en 60 partes iguales, que reciben el nombre de **segundos.**

1.13.4. Representación de los grados, minutos y segundos

Los grados se indican con un cero pequeño en el lado superior derecho del número, de esta forma noventa grados lo indicaríamos por

90°

los minutos se indican con una comilla en el lado superior derecho, treinta minutos lo indicaríamos por

30’

y los segundos mediante dos comillas, así, 45 segundos lo representamos por

45"

Ejemplo:

Cuarenta y cinco grados, 20 minutos y 10 segundos lo representaríamos por

45° 20’ 10"

1.14. CONCEPTO DE PENDIENTE

Se denomina pendiente a la inclinación de un elemento rectilíneo respecto de la horizontal.

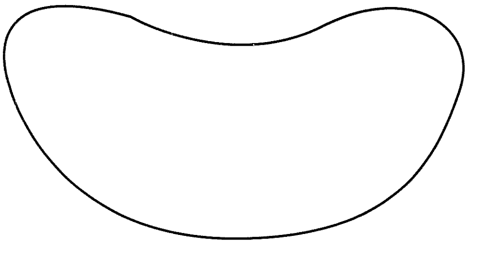
En el caso particular de la pendiente de una recta es un parámetro relevante en el diseño y construcción de canalizaciones de líquidos o de gases que pueden presentar condensaciones.

Si tenemos la recta definida por dos puntos de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente m se calcula como sigue:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

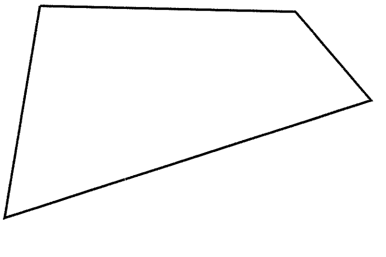
Una línea horizontal tiene pendiente = 0, mientras que una recta con una inclinación de 45 ° respecto a la horizontal tiene pendiente = 1.

1.15. POLÍGONOS: CUADRADO, RECTÁNGULO Y TRIÁNGULO

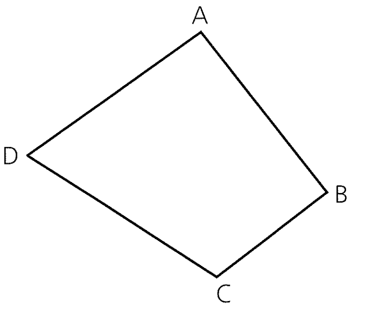


Cuando una línea cierra una porción del plano, diremos que encierra una **superficie**.

Cuando una **superficie** se encuentra delimitada por una línea quebrada cerrada, tenemos un **polígono.**

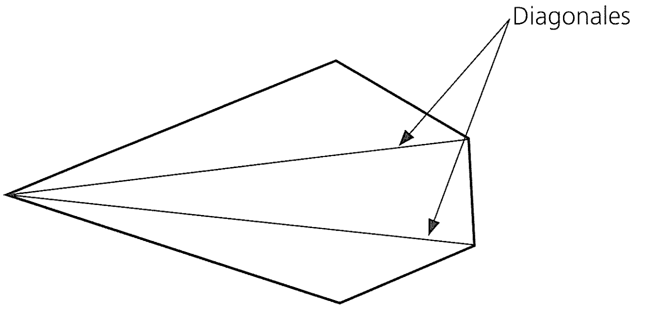


A cada una de las rectas que forman la línea quebrada se les llama **lados** del polígono, y al punto de unión de dos lados consecutivos se les llama **vértice.**

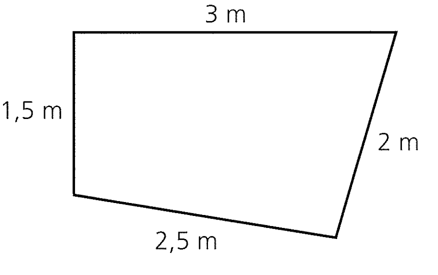


A cada vértice de un polígono le podemos asignar una letra, de esta forma la figura anterior sería el polígono ABCD.

Las rectas que unen dos vértices no consecutivos se llaman **diagonales.**



La suma de las longitudes de cada uno de los lados de un polígono es el **perímetro del polígono.**

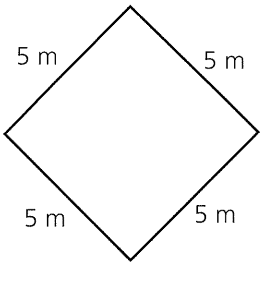


Ejemplo:

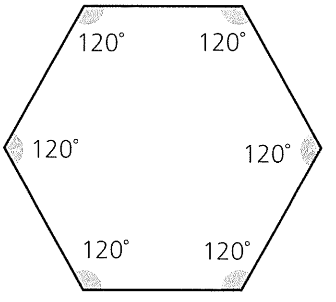
El perímetro del polígono anterior es 3 + 2 + 2,5 + 1,5 = 9 metros.

1.15.1. Tipos de polígonos

Cuando un polígono tiene sus lados iguales decimos que es **equilátero.**



Si además todos los ángulos son iguales, decimos que el polígono es **regular.**

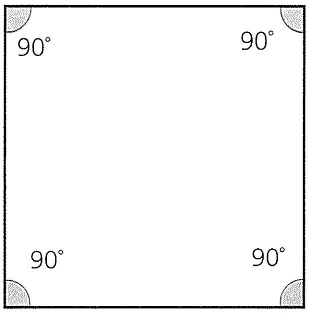


Si un polígono no tiene los lados y los ángulos iguales diremos que es **irregular**.

Veamos algunos polígonos:

1.15.2. Cuadrado

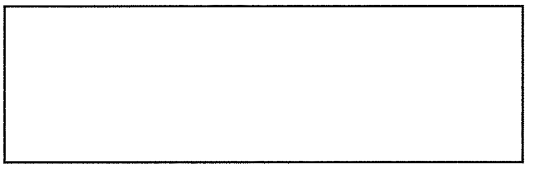
El cuadrado es un polígono que tiene los cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos, por tanto es un polígono equilátero y regular.



Los ángulos del cuadrado suman 360 °

1.15.3. Rectángulo

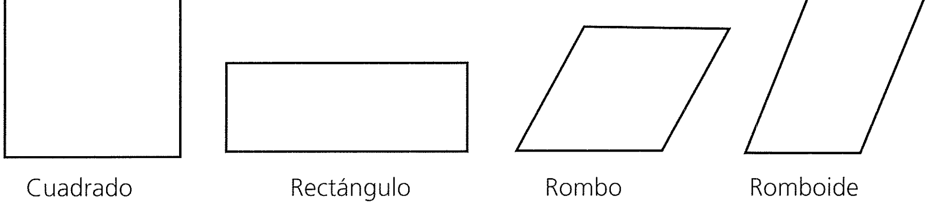
El rectángulo es un polígono que tiene los lados iguales dos a dos y cuatro ángulos rectos. El rectángulo no es un polígono equilátero y por tanto es irregular.



Los ángulos del rectángulo suman 360°.

1.15.4. Paralelogramos

Los paralelogramos son polígonos de cuatro lados cuyos lados opuestos son paralelos entre sí.



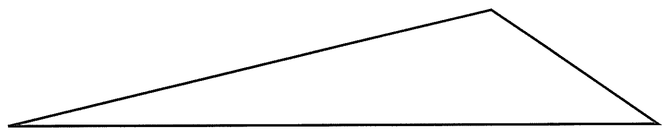
El cuadrado y el rectángulo son paralelogramos cuyos ángulos son rectos. El rombo y el romboide también son paralelogramos pero sus ángulos no son rectos.

Los cuatro ángulos de un paralelogramo suman 360°.

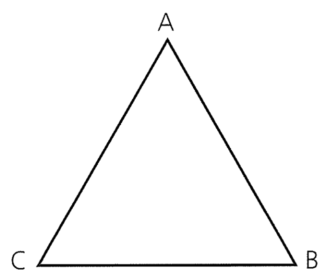
De las cuatro figuras representadas, el cuadrado y el rombo son equiláteros, pero sólo el cuadrado es un polígono regular.

1.15.5. Triángulos

Es un polígono que tiene tres lados y tres ángulos, los ángulos siempre suman 180°.

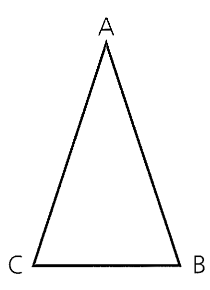


Cuando el triángulo tiene los ángulos y los lados iguales se le llama **triángulo equilátero,** y es un polígono regular.



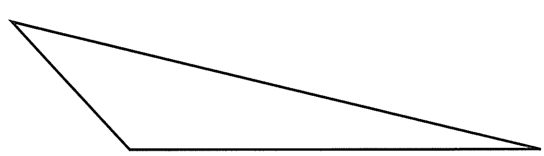
$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60°$ $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$

Cuando el triángulo tiene dos lados iguales también tiene dos ángulos iguales, se le llama **triángulo isósceles,** y es un polígono irregular.

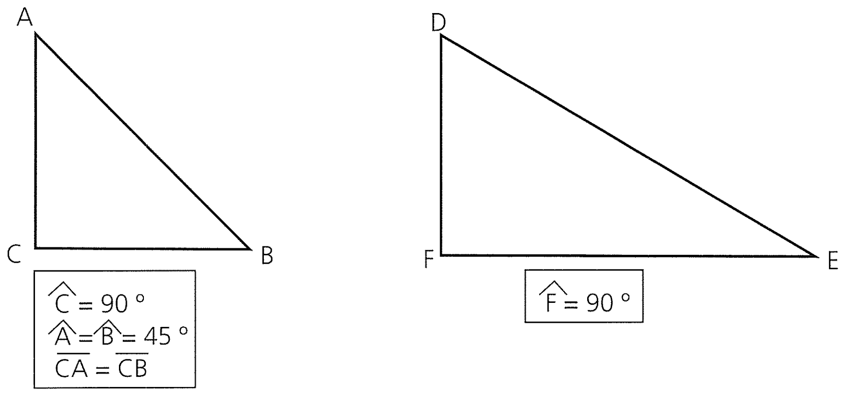


$\hat{C}=\hat{B}$ $\overline{AB}=\overline{AC}$

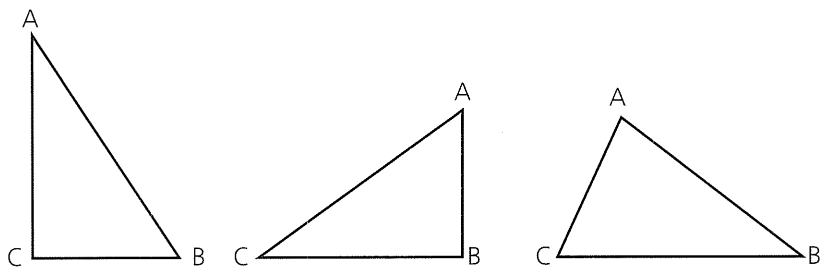
Cuando el triángulo no tiene ni los lados ni los ángulos iguales se le llama **triángulo escaleno.**



Cuando uno de los ángulos de un triángulo mide 90°, tendremos un **triángulo rectángulo.** La siguiente figura nos muestra dos triángulos rectángulos, uno isósceles (ABC) y otro escaleno (DEF).

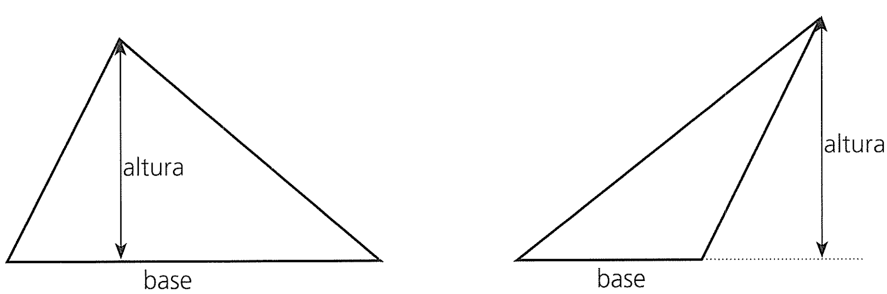


Un triángulo lo podemos representar de tres formas:



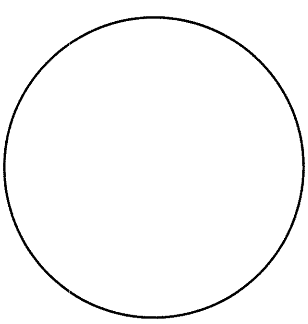
La **base** del triángulo es el lado sobre el que descansa el triángulo.

La **altura** de un triángulo es el segmento de perpendicular a la base o a su prolongación que une ésta con su vértice opuesto, tal como se representa en las siguientes figuras.



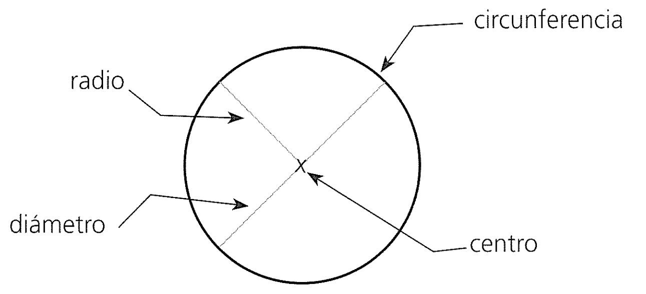
1.16. CIRCUNFERENCIA. CÍRCULO. DIÁMETRO

Si cogemos una cuerda, manteniendo un extremo fijo sobre una pizarra y el otro extremo lo hacemos girar con una tiza atada, cuando hayamos dado una vuelta completa, tendremos la siguiente figura.



Se le llama **circunferencia** y el punto que hemos mantenido fijo se llama **centro.**

La circunferencia es una línea curva, cerrada y plana cuyos puntos están a igual distancia de otro interior llamado centro.



La distancia entre cualquier punto de la circunferencia y su centro se le llama **radio.** El radio se representa por **r**. El segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por su centro se le llama **diámetro** y es igual a dos veces el radio. El diámetro se representa por **d.**

La longitud de la circunferencia nos viene dada por las siguientes fórmulas:

$\boxed{L = 2 \cdot \pi r}$ o bien $\boxed{L = \pi \cdot d}$

donde:

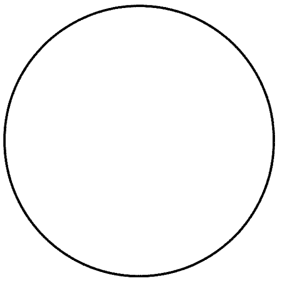
L es la longitud de la circunferencia (m)

π (se lee pi) es constante y vale 3,1416 aproximadamente

r es el radio de la circunferencia (m)

d es el diámetro de la circunferencia (m).

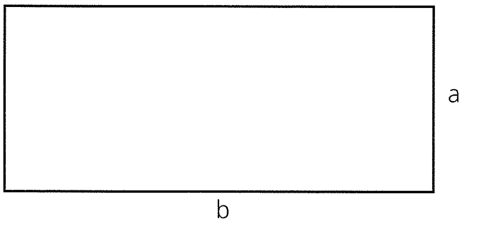
Se llama **círculo** a la superficie encerrada dentro de una circunferencia.



1.17. SUPERFICIES REGULARES: CUADRADO, RECTÁNGULO Y TRIÁNGULO (sólo categorías B y A)

El área es la medida de una superficie encerrada por una línea.

1.17.1. Área del rectángulo



Para calcular el área de un rectángulo se multiplican las medidas de dos lados consecutivos.

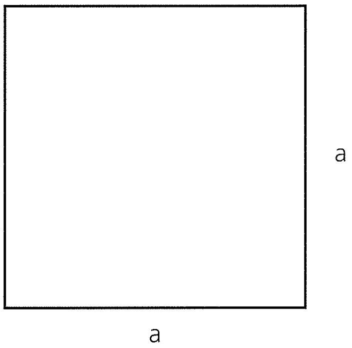
$$S = a \cdot b$$

donde:

S es el área del rectángulo (m^2)

a y b son los lados del rectángulo (m)

1.17.2. Área del cuadrado



El cuadrado es un caso particular de rectángulo que tiene todos sus lados iguales.

$$S = a \cdot a = a^2$$

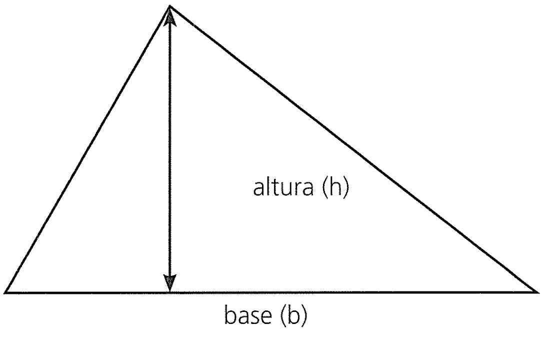
$$\boxed{S = a^2}$$

donde:

S es el área del cuadrado (m^2)

a es el lado del cuadrado (m)

1.17.3. Área del triángulo



El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura

$$\boxed{S = \frac{b \times h}{2}}$$

donde:

S es el área del triángulo (m^2)

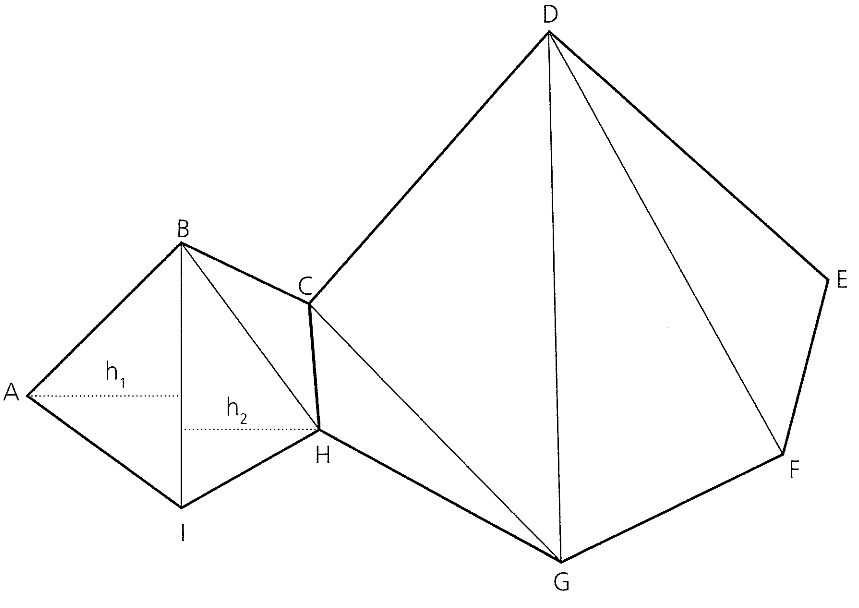
b es la base (m)

h es la altura (m)

1.18. SUPERFICIES IRREGULARES: TRIANGULACIÓN (sólo categorías B y A)

Sabemos como calcular la superficie de varias figuras básicas: triángulo, cuadrado, rectángulo, círculo. Vamos a ver la forma de calcular la superficie de un polígono irregular.

Supongamos que tenemos un solar que tiene la forma del polígono ABCDEFGHI y deseamos calcular su superficie.



En primer lugar descompondremos el polígono en tantos triángulos como sea posible. Así del polígono ABCDEFGHI obtendremos los siguientes triángulos:

ABI, IBH, BCH, CGH, CDG, GDF, DEF

Para obtener la superficie total del polígono bastará con obtener la superficie de cada uno de los diferentes triángulos y sumarlas entre sí.

Para hallar la superficie de cada triángulo escogeremos para cada uno una base y su correspondiente altura que son los datos que necesitamos para calcular su superficie.

De esta forma:

para el triángulo ABI tomamos como base su lado BI y su altura será h1;

para el triángulo IBH tomamos como base su lado BI y como altura h2.

y así sucesivamente.

A continuación debemos medir los lados escogidos como base y las alturas, hallar la superficie de cada uno de los triángulos y sumarlas.

1.19. VOLÚMENES: PARALALEPÍPEDOS

Los cuerpos que están limitados por caras planas reciben el nombre de **poliedros.**

Los **paralelepípedos** son aquellos poliedros que tienen seis caras planas, que son paralelogramos, siendo iguales y paralelas cada dos caras opuestas entre sí.

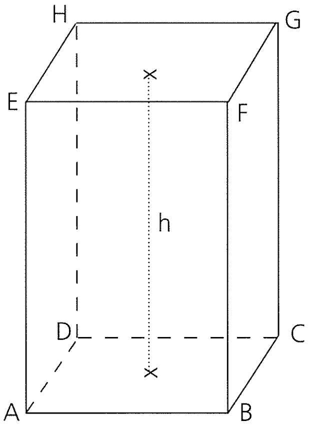


Figura 1

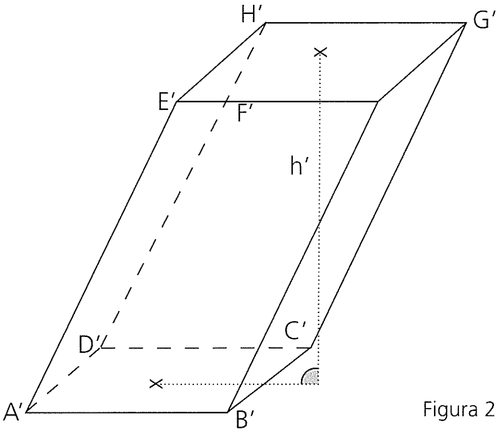


Figura 2

La recta en la que se unen las caras se llama **arista.** En la figura anterior tenemos las aristas: AB, BC, CD, DA, AE, BF, etc.

El punto en que se unen tres aristas se llama **vértice.** En la figura anterior tenemos los vértices: A, B, C, D, E, F, etc.

La **base** es la superficie sobre la que se apoya el paralelepípedo. El paralelepípedo de la figura 1 tiene como base la superficie ABCD y el de la figura 2 es el paralelogramo A' B' C' D'.

La **altura** de un paralelepípedo es el segmento de recta perpendicular a la base o a su prolongación que une ésta y la cara opuesta. En la figura 1 la altura está representada por h y en la figura 2 por h'.

El volumen de un paralelepípedo nos viene dado por la fórmula:

$$V = S_b \times h$$

donde:

V = volumen del paralelepípedo (m^3)

S_b = superficie del polígono de la base (m^2)

h = altura del paralelepípedo (m)

1.20. VOLÚMENES: CILINDROS (sólo categorías B y A)

El cilindro es una figura que tiene dos caras paralelas entre sí, que son de dos círculos, y una sola cara lateral curva.

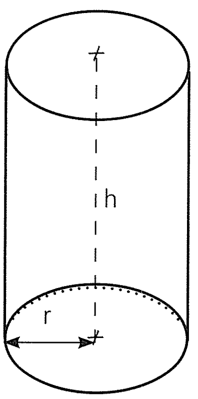


Figura 1

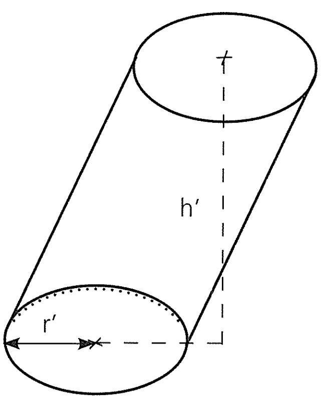


Figura 2

La altura del cilindro es el segmento de la recta perpendicular a la base o a su prolongación que une esta y la cara opuesta. En el cilindro de la figura 1 la altura está representada por h y en la figura 2 por h'.

El volumen del cilindro es igual a la superficie de la base multiplicado por la altura.

$V = S_b \times h$ o bien $V = \pi \times r^2 \times h$

donde:

V = volumen del cilindro (m^3)

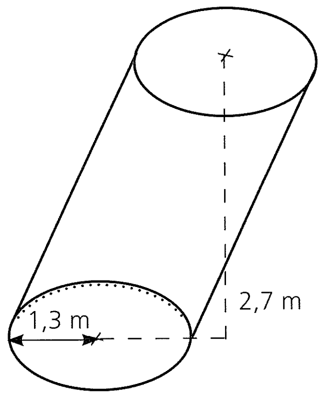
S_b = superficie de la circunferencia de la base = πr^2 (m^2)

h = altura (m)

r = radio de la base (m)

Ejemplo:

Calcula el volumen del cilindro de la figura.



El radio del cilindro es de 1,3 m y su altura de 2,7. Aplicando la fórmula directamente:

$V = \pi . r^2 \cdot h = 3,14 \times 1,3^2 \times 2,7 = 14,3\ m^3$

El volumen de este cilindro es de 14,3 m^3.

1.21. REPRESENTACIÓN DE GRÁFICAS (sólo categorías B y A)

En esta unidad vamos a estudiar la representación de puntos en un sistema de ejes de coordenadas, así como la interpretación de gráficas.

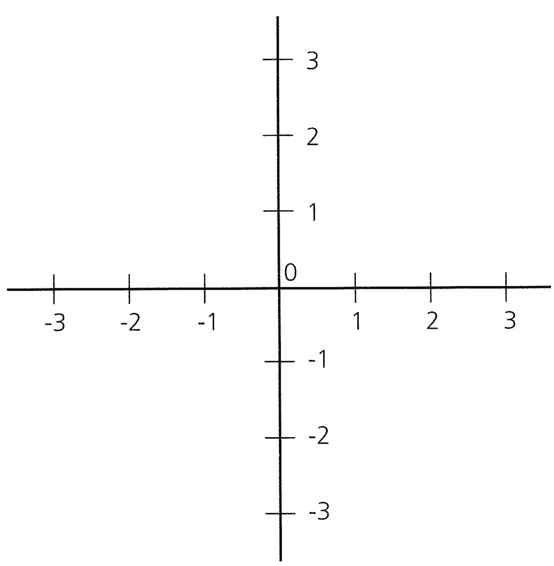
1.21.1. Ejes de coordenadas

Recordemos que los números los podemos representar sobre una recta graduada en unidades.

En la recta anterior hemos marcado los siguientes puntos:

-2; -1; -0,9; 0; 0,5; 1; 2; 2,2; 3; 4

Ahora vamos a trazar dos rectas perpendiculares, una horizontal y otra vertical.



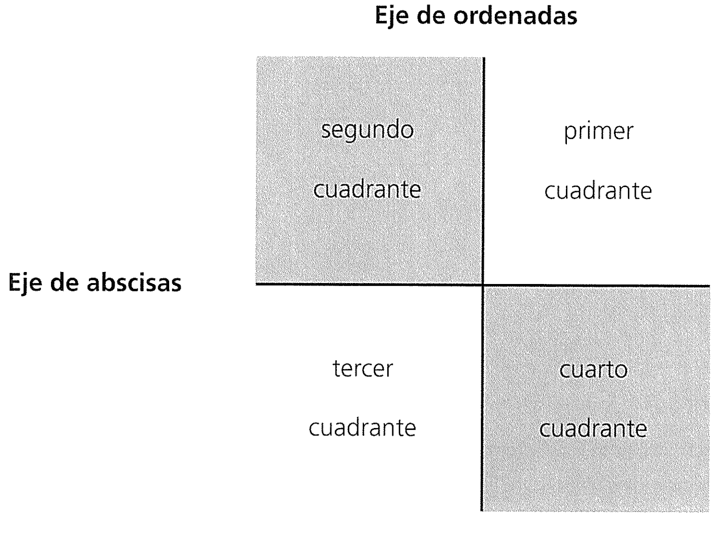
Sobre estas dos rectas también podemos representar los números. El punto de corte vamos a asignarlo al número 0. En el eje horizontal representaremos los números positivos a la derecha del punto cero y los números negativos a la izquierda. En el eje vertical los números positivos los representaremos por encima del punto cero y los negativos por debajo.

Este par de rectas se llaman **ejes de coordenadas.** El eje horizontal recibe el nombre de **eje de abscisas** y el vertical el de **eje de ordenadas.**

Los números representados sobre el eje de abscisas se llaman **abscisas,** y los números representados sobre el eje de ordenadas se llaman **ordenadas.**

El eje de ordenadas y el eje de abscisas dividen el plano en cuatro partes, cada una de ellas se llama **cuadrante.**

Para denominar los cuadrantes se sigue el orden inverso al de las agujas del reloj, tal como se indica en la siguiente figura.



Los puntos del primer cuadrante tienen la abscisa positiva y la ordenada positiva.

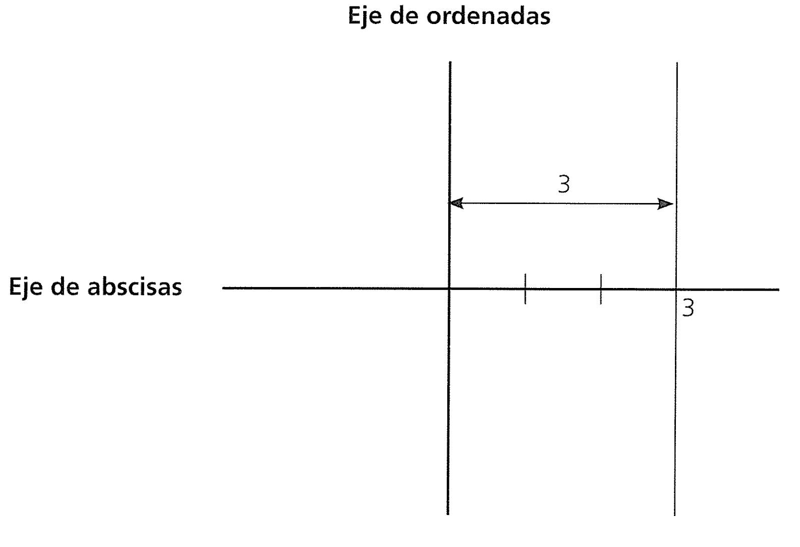
Los puntos del segundo cuadrante tienen la abscisa negativa y la ordenada positiva.

Los puntos del tercer cuadrante tienen la abscisa negativa y la ordenada negativa.

Los puntos del cuarto cuadrante tienen la abscisa positiva y la ordenada negativa.

1.21.2. Representación de puntos en el plano

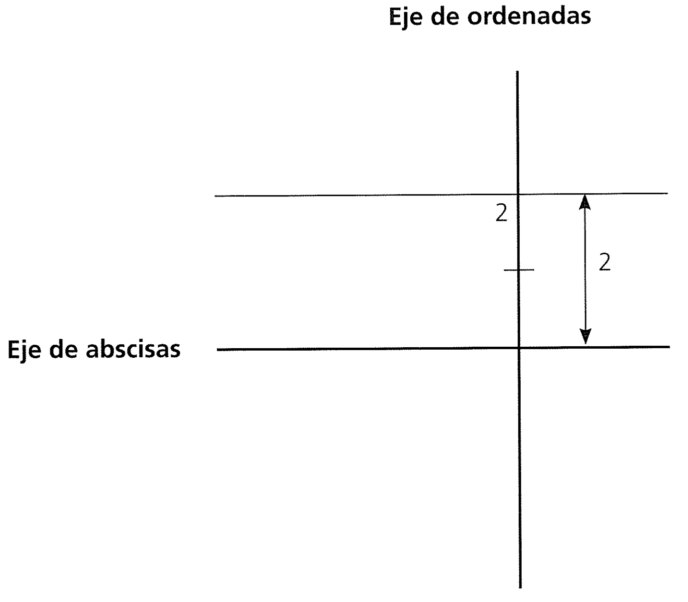
Observemos la siguiente figura:



La recta corta perpendicularmente al eje de abscisas por el punto 3, es decir, la abscisa de todos los puntos de la recta vale 3.

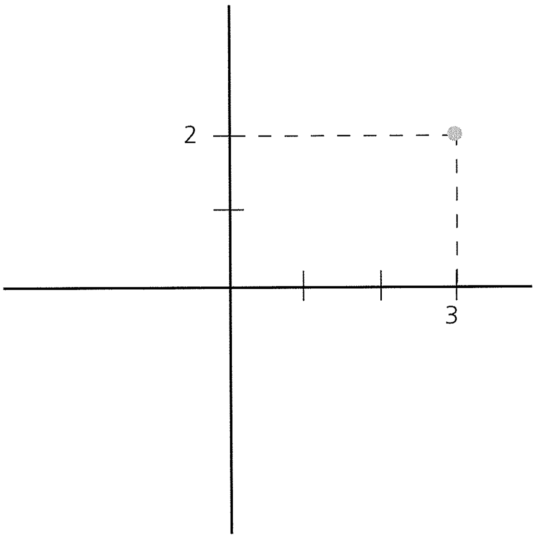
Podemos decir que la abscisa es la distancia de un punto al eje de ordenadas.

De la misma forma, en la siguiente figura tenemos una recta cuyos puntos cumplen la condición que la ordenada vale 2.



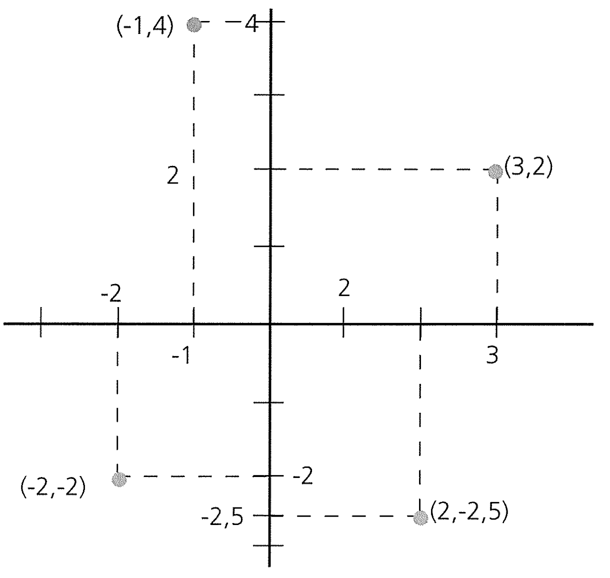
También podemos decir que la ordenada es la distancia de un punto al eje de abscisas.

Para definir la situación de un punto es necesario conocer su abscisa y su ordenada. Vamos a representar el punto cuya abscisa es 3 y cuya ordenada es 2.



Sólo existe un punto en el plano que cumple esta condición.

Para indicar un punto de un plano se encierra la abscisa y la ordenada dentro de un paréntesis, separadas por una coma de la siguiente forma: (abscisa, ordenada). En la figura anterior se representó el punto (3, 2). En la siguiente figura se representan puntos en los cuartos cuadrantes.



1.21.3. Representación de funciones

La fórmula que relaciona el espacio recorrido por un móvil con su velocidad y el tiempo que emplea en recorrerlo es:

$$e = v \times t$$

donde:

e = espacio recorrido

v = velocidad

t = tiempo

Por ejemplo, si conocemos la velocidad de un coche, la fórmula anterior nos permite determinar el espacio que recorre en el tiempo transcurrido, es decir, podemos conocer su situación en cada momento.

Supongamos que la velocidad de un automóvil es de 30 km/h, el espacio recorrido por el automóvil es:

$$e = v \times t$$
$$e = 30\ t$$

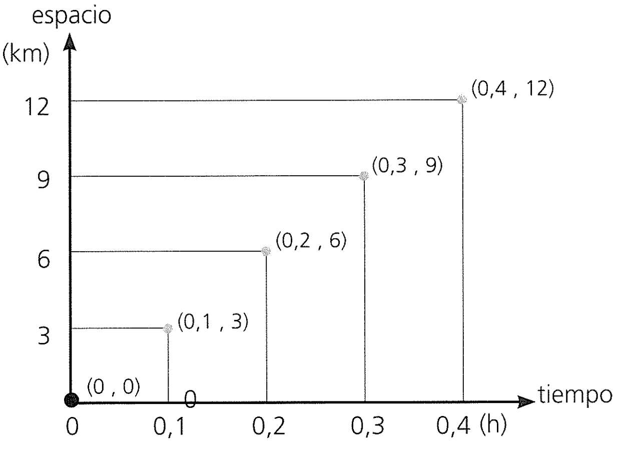
es decir:

La relación anterior es una **función,** porque el espacio recorrido es función del tiempo transcurrido.

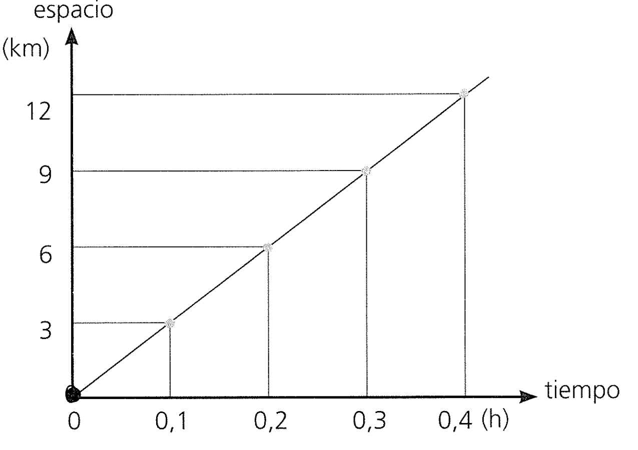
Podemos calcular varios puntos de esta función dando valores al tiempo:

tiempo (horas)	espacio (kilómetros)
0	0
0,1	3
0,2	6
0,3	9
0,4	12

Estos puntos se pueden representar en el plano sobre un sistema de ejes de coordenadas. Sobre el eje de abscisas representaremos el tiempo en horas y sobre el de ordenadas el espacio recorrido en km.

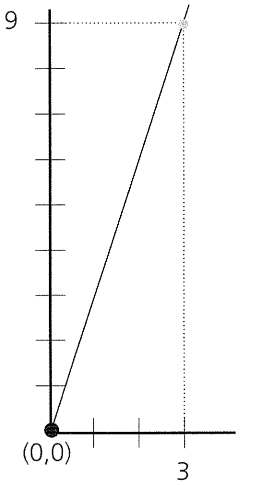


Al unir todos los puntos mediante líneas rectas tendremos la representación gráfica de la función.

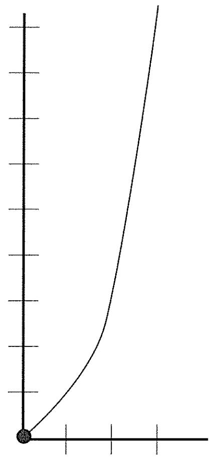


Cuantos más puntos se dispongan, la gráfica representará con mayor exactitud la función de que se trate.

Si nos dicen que realicemos la representación gráfica de una función y sólo nos dan dos puntos: (0,0) y (3,9). La representación es:

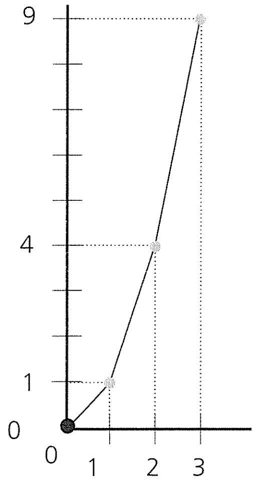


Puede que la función en realidad tenga la siguiente forma:



Por tanto deberíamos tener más puntos para realizar la representación gráfica de forma adecuada.

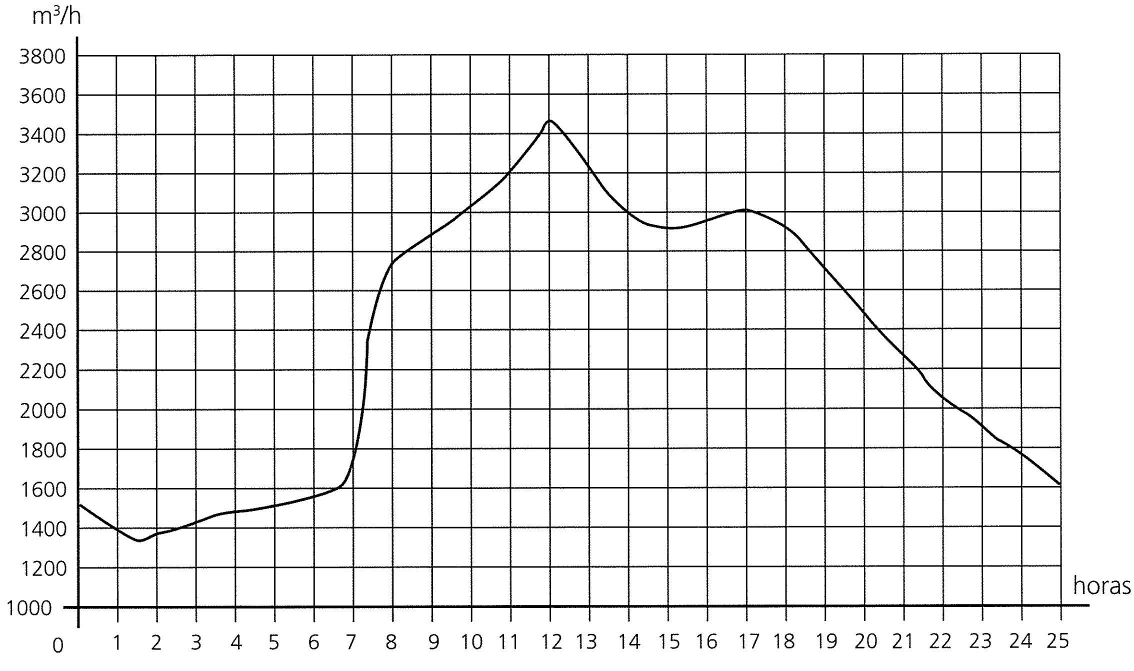
(0 , 0), (1 , 1), (2 , 4), (3 , 9)



Esta nueva representación se asemeja mucho más a la realidad. Es decir, cuantos más puntos se dispongan de una función tanto más exacta será su representación gráfica.

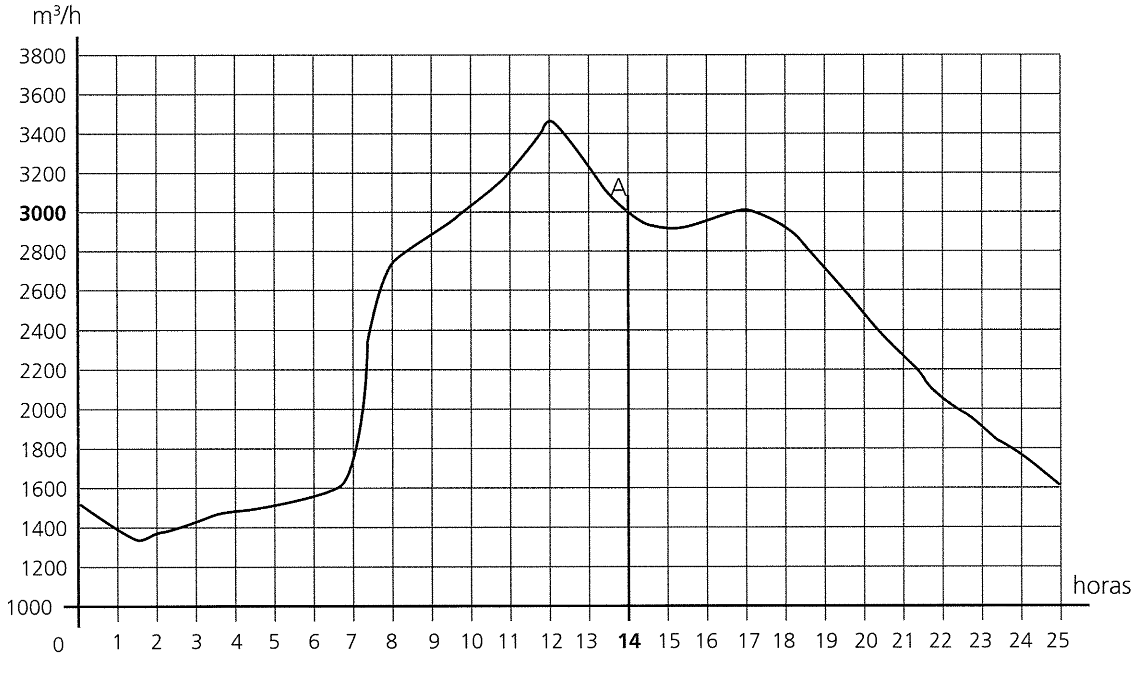
1.21.4. Interpretación de gráficos

El gráfico siguiente representa la demanda horaria de gas.

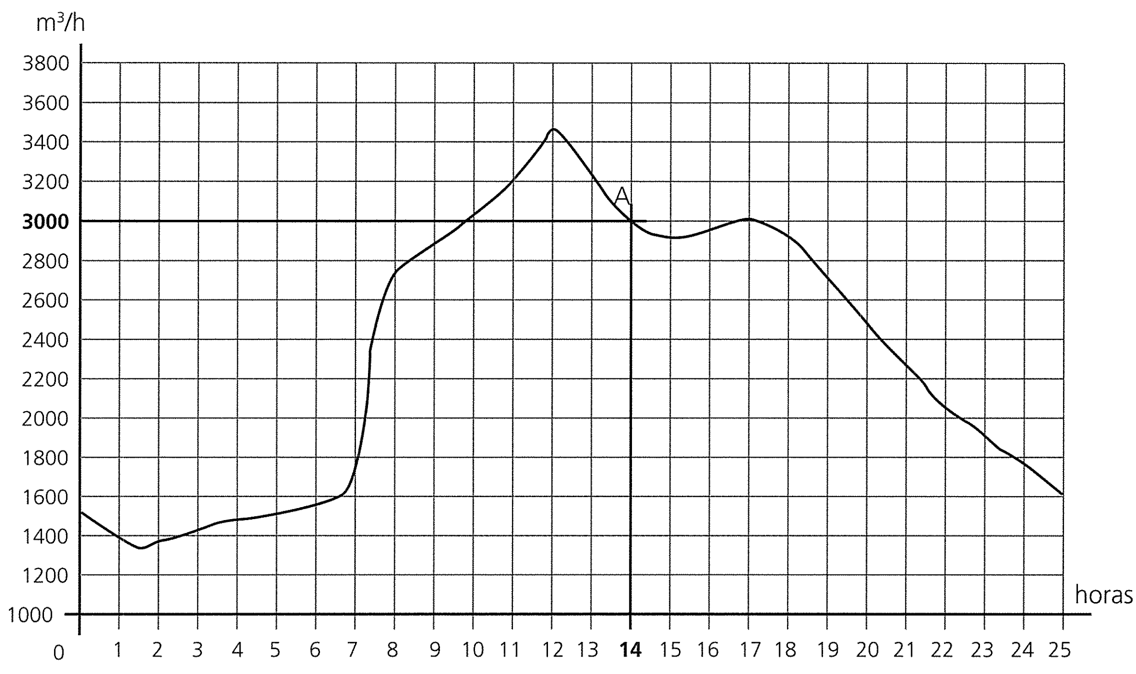


En el eje de abscisas están representadas las horas y en el eje de ordenadas el caudal en m³/h.

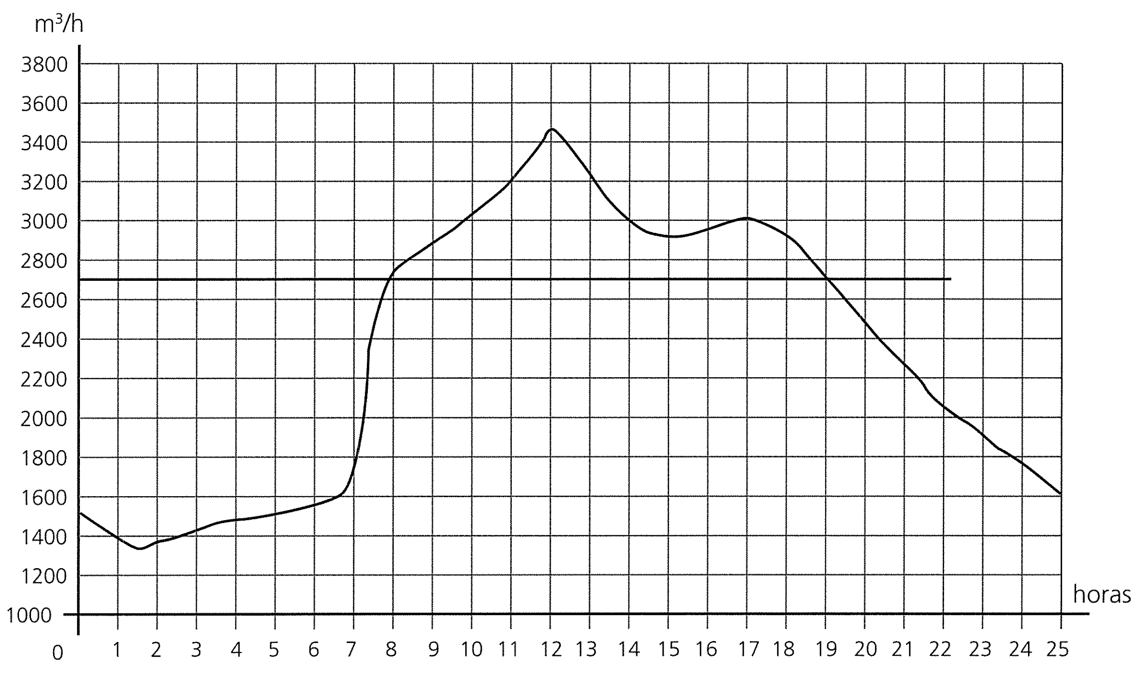
Supongamos que queremos saber el consumo a las 14 h. En primer lugar por el punto de abscisas 14 trazaremos una perpendicular al eje de las abscisas que prolongaremos hasta que corte a la gráfica (punto A en la figura).



A continuación trazaremos desde el punto A una perpendicular al eje de las ordenadas hasta que se corte con este eje (3.000 m³/h) con lo cual las coordenadas del punto A nos quedan definidas A = (14 h, 3.000 m³/h). La lectura de la gráfica en el punto A es la siguiente: la demanda de gas a las 14 h fue de 3.000 m³/h.

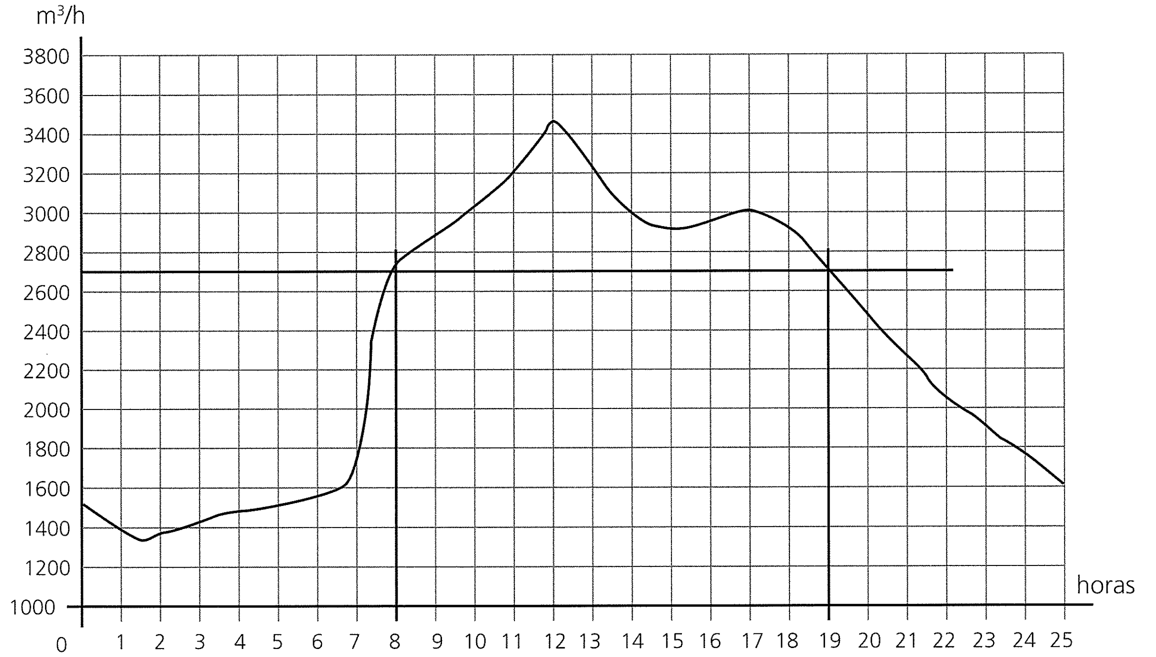


Ahora vamos a hallar los momentos en los cuales la demanda fue de 2.700 m³/h. En primer lugar trazaremos una recta paralela al eje de abscisas por el punto de ordenadas 2.700.

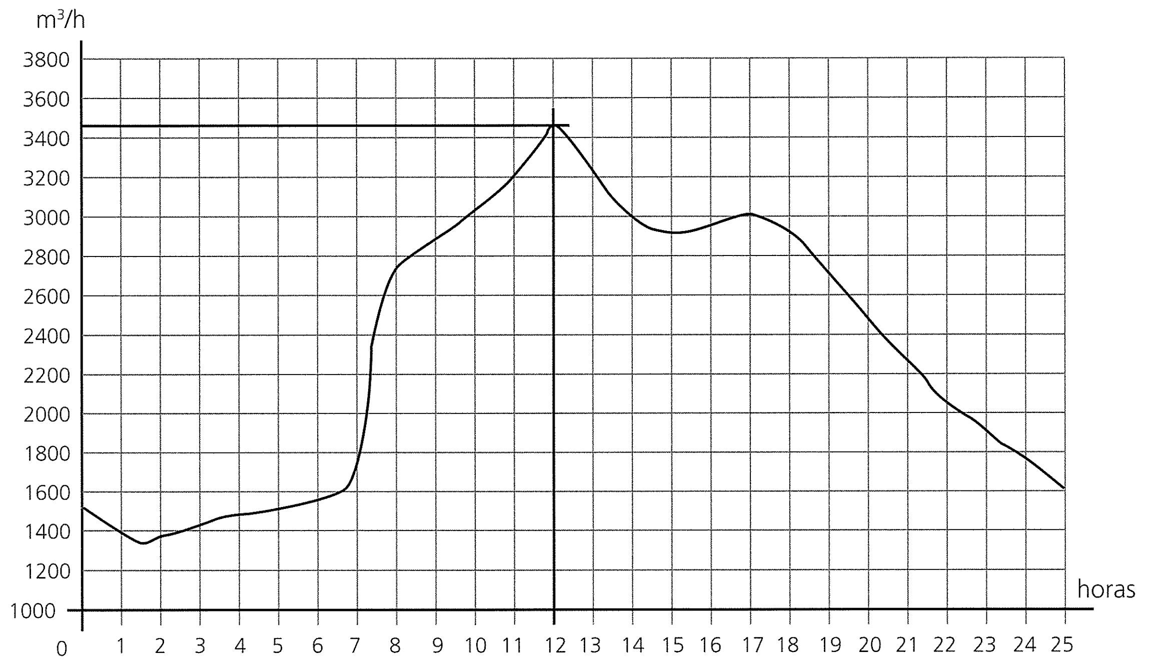


Como podemos observar esta recta corta en dos puntos a la gráfica. En cada uno de ellos trazamos una perpendicular hacia el eje de abscisas.

Los puntos de corte con el eje de abscisas nos indican los momentos en los cuales la demanda fue de 2.700 m3/h, es decir a las 8 y a las 19 horas.

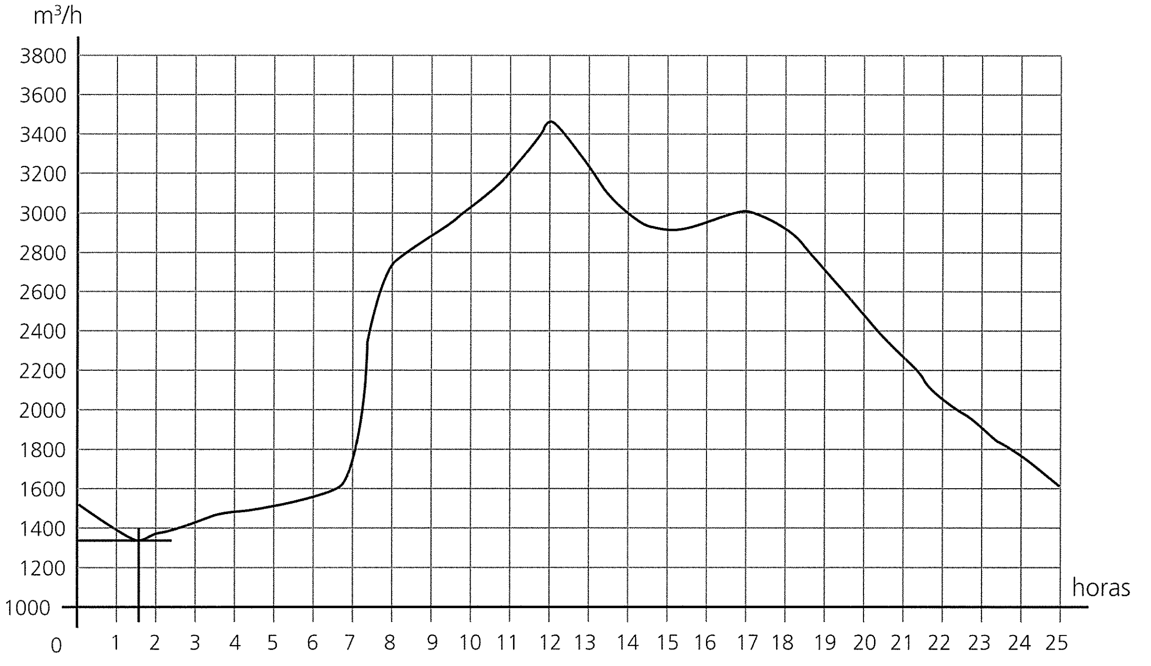


Máximo de una función



El máximo de una función es el punto en cuya ordenada toma el valor máximo, en nuestro caso el máximo consumo se registró a las 12 horas y su valor fue de 3.450 m^3/h.

Mínimo de una función



El mínimo de una función es aquel punto en el cual la ordenada tiene el valor mínimo; en la gráfica podemos observar que el mínimo consumo se registró a las 1 h 30 minutos y su valor fue de 1.300 m³/h.